Statistička teorija telekomunikacija, 1. kolokvijum **13.5.2016.**

1. *(10 poena)*
a) (5p) Definisati n-ti početni moment, n-ti apsolutni moment i n-ti centralni moment kontinualne slučajne promenljive.

b) (5p) Kvadratna transformacija jedne slučajne promenljive. Navesti karakterističan primer.

2. *(10 poena)*
a) (5p) Definisati stacionarnost i ergodičnost slučajnog procesa. Navesti primer nestacionarnog i primer neergodičnog procesa.

b) (5p) Objasniti vremenske i spektralne karakteristike procesa koji se dobija propuštanjem aditivnog belog Gausovog šuma kroz filtar propusnik niskih učestanosti granične učestanosti f_g. Objasniti Rajsov model uskopojasnog šuma.

3. *(15 poena)*
Posmatraju se dve nezavisne slučajne promenljive X i Y sa Gausovom raspodelom srednje vrednosti nula i varijanse σ^2. Odrediti funkciju gustine verovatnoće slučajne promenljive $Z = \frac{1}{2}(X + Y)$.

4. *(15 poena)*
Posmatra se naponski signal sinusoidalnog talasnog oblika sa slučajnom fazom, definisan izrazom: $X(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t + \Theta)$, pri čemu je ω_0 konstanta. Faza Θ ovog slučajnog signala ima uniformnu raspodelu u intervalu $[-\pi, \pi]$.

a) (*10p*) Odrediti i grafički prikazati autokorelacionu funkciju $R_X(\tau)$ slučajnog signala $X(t)$.
b) (*5p*) Odrediti srednju snagu jednosmerne komponente, naizmenične komponente i ukupnu srednju snagu slučajnog signala $X(t)$ (na otpornosti od 1Ω).

<u>NAPOMENA</u>: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Kolokvijum traje 120 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja kolokvijuma.

Rešenja

(3) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} Z = \frac{1}{2}(x+y) = Q_1(x,y) \\ W = y = Q_2(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = w \\ x = 2Z - w \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x} & \frac{\partial Q_1}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial x} & \frac{\partial Q_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$f_{ZW}(z,w) = \left.\frac{f_{XY}(x,y)}{|J|}\right|_{\substack{x=2Z-w \\ y=w}} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(2z-w)^2+w^2}{2\sigma^2}}}{1/2}$$

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{4z^2-4zw+2w^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{2z^2-2zw+w^2}{\sigma^2}}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z,w)\,dw = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2-2zw+w^2}{\sigma^2}} dw$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(w-z)^2}{\sigma^2}} dw \leftarrow$$

SMENA: $\frac{w-z}{\sigma} = u$, $dw = \sigma\,du$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sigma\,du = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}} \cdot \sigma\sqrt{\pi}\, \boxed{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du}$$

$\text{erf}(\infty) = 1$

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}}, \quad -\infty < z < \infty}$$

Ovaj izraz se može napisati i u obliku:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

To znači da je rezultat Gausova raspodela varijanse $\sigma_Z^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$

4 $\quad x(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t + \theta) \qquad f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \theta \le \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

a) $$R_x(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)} = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,x(t+\tau)\, f_\theta(\theta)\, d\theta$$

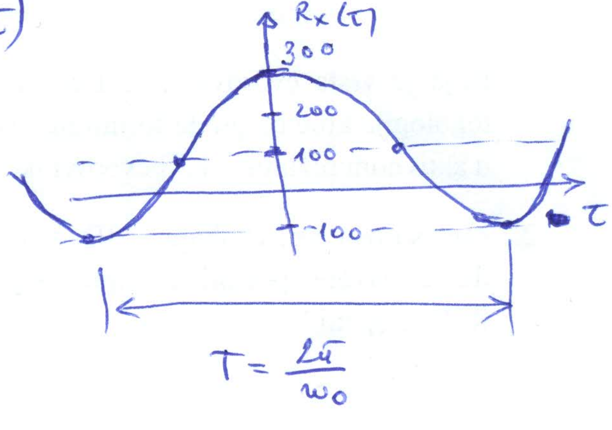
$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[10 + 20\cos(\omega_0 t + \theta)\right] \cdot \left[10 + 20\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta)\right] d\theta$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[100 + 200\cos(\omega_0 t + \theta) + 200\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta) + 400\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta)\Big] d\theta$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} 100\, d\theta + \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} 200\cos(\omega_0 t + \theta)\, d\theta} \to 0 + \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} 200\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta)\, d\theta} \to 0 + \cancel{\frac{400}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\omega_0(2t+\tau) + 2\theta)\, d\theta} \to 0 + \frac{400}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 \tau)\, d\theta \right\}$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 100 \cdot 2\pi + \frac{400}{2}\cos(\omega_0 t) \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta}_{2\pi} \right\}$$

$$R_x(\tau) = 100 + 200\cos(\omega_0 \tau)$$



b) $P_{DC} = 10^2 = 100\ \text{W}$

$P_{UK} = R_x(0) = 100 + 200 = 300\ \text{W}$

$P_{AC} = P_{UK} - P_{DC} = 200\ \text{W}$