

1. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Израчунати, ако је могуће:

- а) DC и $C^T D$;
 б) A^2 , CA , AC и AC^T ;
 в) AB , BA , $B^T A$ и $\det(A^T B)$;
 г) $CC^T - 2D + E$;
 д) A^{-1} и $(CB)^{-1}$.

2. Наћи све матрице другог реда чији је квадрат једнак јединичној матрици.

3. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Показати да је матрица $B = A - E$ инверзibilна и одредити B^{-1} .

4. Решити матричне једначине:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Решити матричну једначину $AX - B = 2X + 3E$, ако су: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Решити матричну једначину $A^2 \cdot X = B$, ако су: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 9 & 12 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

7. За дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ решити матричну једначину $(X - A)^{-1} = (B - C) \cdot A^{-1}$.

8. Нека су $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Решити матричну једначину $X^T A + X^T = B$.

9. У зависности од реалног параметра a одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & a+2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & a+1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & a+3 \end{bmatrix}$.

10. Користећи Крамерово правило дискутовати и решити системе једначина:

$$\text{а) } \begin{array}{rclcl} ax & +ay & +(a+1)z & = & a \\ ax & +ay & +(a-1)z & = & a \\ x & & +(a+2)z & = & 1-a \end{array}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } \begin{array}{rclcl} \lambda x & +y & +z & +t & = 0 \\ x & +\lambda y & +z & +t & = 0 \\ x & +y & +\lambda z & +t & = 0 \\ x & +y & +z & +\lambda t & = 0 \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

11. Применом Кронекер-Капелијеве теореме дискутовати и решити системе линеарних једначина:

$$\text{а) } \begin{array}{rclcl} \lambda x & +y & +z & = & 1 \\ x & +\lambda y & +z & = & \lambda \\ x & +y & +\lambda z & = & \lambda^2 \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } \begin{array}{rclcl} 2x & +6y & +(a+6)z & = & 0 \\ -x & +7y & +5z & = & 0 \\ ax & +5y & +13z & = & 0 \end{array}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$\text{в) } \begin{array}{rclcl} x & -2y & +z & = & k-1 \\ -x & +3y & -z & = & 2 \\ (k+2)x & +3y & +z & = & -2 \\ x & +y & +(k-1)z & = & 0 \end{array}, \quad k \in \mathbb{R}.$$