Решени примери - ранг и ККТ

Задатак. Користећи Кронекер Капелијеву теорему, у зависности од реалног параметра α дискутовати систем

$$\begin{aligned} &x - 2y + z = 0\\ &2\alpha x + 3z = 4 - 2\alpha\\ &3x + 2y + \alpha z = 0\\ &2x + 4y + z = \alpha - 2. \end{aligned}$$

У случају када је систем одређен, решити га матричном методом.
Решење. Користимо следеће чињенице:

1. Ранг матрице се не мења применом следећих (тзв. елементарних) операција:
   - множењем врсте (колоне) бројем различитим од 0;
   - сабирањем врста (колона);
   - пермутовањем врста (колона).
2. Ако је j-та колона матрице A облика
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{ij} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$
   где је $a_{ij} \neq 0$, онда је
$$\mathrm{rang}A = 1 + \mathrm{rang}A_{ij},$$
   при чему матрица A_{ij} настаје избацивањем i-те врсте и j-те колоне из матрице A.
3. Кронекер Капелијева теорема: Нека је дат систем линеарних једначина (по променљивим $x_1, \dots, x_n$)
$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\ &\vdots\\ &a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$
   и нека је
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$
   - Ако је $\mathrm{rang}A < \mathrm{rang}A^*$, онда је дати систем немогућ (нема решења);
   - Ако је $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^* = k < n$, онда је дати систем неодређен (има бесконачно много решења) са $n-k$ степена слободе ($n-k$ променљивих узима произвољне вредности, а остале променљиве се изражавају преко њих);
   - Ако је $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^* = n$, онда је дати систем одређен (има јединствено решење).

$$
\begin{aligned}
A^* &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 2\alpha & 0 & 3 & | & 4-2\alpha \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 1 & | & \alpha-2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 2\alpha & 0 & 3 & | & 4-2\alpha \\ 4 & 0 & \alpha+1 & | & 0 \\ 4 & 0 & 3 & | & \alpha-2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(2-\alpha)(\alpha+3)}{2} & | & 4-2\alpha \\ 4 & 0 & \alpha+1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & | & \alpha-2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & (2-\alpha)(\alpha+3) & | & 8-4\alpha \\ 4 & 0 & \alpha+1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & | & \alpha-2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & (2-\alpha)(\alpha+7) \\ 4 & 0 & \alpha+1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & | & \alpha-2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

На основу особине 1. следи да је

$$
\text{rang}A = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix}
$$

и

$$
\text{rang}A^* = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2-\alpha)(\alpha+7) \\ 4 & 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & \alpha-2 \end{bmatrix}.
$$

Применом особине 2. добијамо следеће:

$$
\text{rang}A = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = 1 + \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & \alpha+1 \\ 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} = 2 + \text{rang}\begin{bmatrix} 0 \\ 2-\alpha \end{bmatrix};
$$

$$
\text{rang}A^* = 2 + \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & (2-\alpha)(\alpha+7) \\ 2-\alpha & \alpha-2 \end{bmatrix}.
$$

Сада можемо формирати табелу рангова у зависности од вредности параметра α:

	$\alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -7$	$\alpha = 2$	$\alpha = -7$
rang$A$	3	2	3
rangA^*	4	2	3

На основу Кронекер Капелијеве теореме закључујемо следеће:

- У случају када је $\alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -7$ систем је немогућ;
- У случају када је $\alpha = 2$ систем је неодређен са 1 степеном слободе;
- У случају када је $\alpha = -7$ систем је одређен.

Обзиром на чињеницу да смо приликом одређивања рангова примењивали исте елементарне операције које би користили и приликом решавања полазног система Гаусовим поступком, закључујемо да је дати систем еквивалентан систему

$$
\begin{aligned}
&x - 2y + z = 0 \\
&0 = (2-\alpha)(\alpha+7) \\
&4x + (\alpha+1)z = 0 \\
&(2-\alpha)z = \alpha - 2
\end{aligned}.
$$

Дакле, за $\alpha = -7$ систем

$$
\begin{aligned}
&x - 2y + z = 0 \\
&4x - 6z = 0 \\
&z = -1
\end{aligned}
$$

треба решити матричном методом. Одговарајућа матрична репрезентација овог система је дата са

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{Q}$$

Прво проверимо да ли је P инверзибилна матрица, тј. да ли је $\det P \neq 0$.

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

Матрица P је инверзибилна , па је $X = P^{-1}Q$.

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Коначно,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\square$