1 Nizovi

5. $a_n = \frac{5n^2+3n+2}{2n^2-n+1}$. 6. $a_n = \frac{n^3-100n^2+1}{100n^3+15n}$. 7. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^3}$.
8. $a_n = \frac{n^3-2n^2+3n+1}{2n^2+3n-1}$. 9. $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3$. 10. $a_n = \frac{4n^{3/2}+2n+\sqrt{n}}{5n^{3/2}+5n+2\sqrt{n}}$.
11. $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$. 12. $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. 13. $a_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$.
14. $a_n = \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$. 15. $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$. 16. $a_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$.
21. $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. 22. $a_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Koriste i jednakost $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ izračunati granične vrednosti slede ih nizova:

23. $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. 24. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. 25. $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$. 26. $a_n = \frac{1+x^{2n}}{2+x^{2n}}$.
27. $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2}$. 28. $a_n = n(\ln(n+1)-\ln n)$. 29. $a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n$.
30. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin...\sin 1}$.

Dodatak

Osnovni limesi:
$\lim_{n\to\infty}|q|^n = ...$, $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ za $a > 0, k \in \mathbb{N}$, $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$,$\lim \frac{\ln n}{n} = 0$, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim n|q|^n = 0$ za $|q| < 1$

1.1 Odrediti graničnu vrednost niza $a_n = \dfrac{1}{2n}\cos 2n - \dfrac{3n}{6n+1}$

1.2 $a_n = \dfrac{\sin(n^2+n)}{\sqrt{n}}$

1.3 $a_n = \dfrac{(2^{n-1}+arctgn)}{2^n}$

1.4 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

1.5 Pokazati da je niz $a_n = \dfrac{5^n n!}{(2n)^n}$ konvergentan i naći njegov limes.

2 Granične vrednosti funkcija

Tablične granične vrednosti:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e, \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

1. $\lim\limits_{x\to2} x^3+3x$.
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+3}{x+5}$.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7x^2+6x-9}{9x^3+8x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2-4x}$.

11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$, $k=\text{const}$, $k\neq 0$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin lx}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+a}{x-a}^{x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{X^2}}$.

22. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^a x}{x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos^{\sqrt{2}} x}{x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-\sqrt{x^3+1}}{\ln(1+tgx-\sin x)}$.

27. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt[3]{8x^3+9x^2}-\sqrt{4x^2-8x})$.

28. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{x(\sqrt{x+1}-1)}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln \frac{x+3}{x}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$.

3 Izvodi funkcija jedne promenljive i Lopital

Definicija. Izvod funkcije $f(x)$ je $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Koristi se i oznaka $\frac{df}{dx}$ za izvod funkcije f po x.

Izvod funkcije $f(x)$ u tački $x=a$ je $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ako taj limes postoji i konačan je, kažemo da je funkcija f diferencijabilna u tački $x=a$.

Geometrijsko značenje prvog izvoda je:
$f'(x_0) = tg\alpha = k$, gde je k koeficijent pravca tangente na krivu $y=f(x)$ u tački (x_0, y_0), gde je $y_0 = f(x_0)$.

Levi izvod u tački $x=a$ je $f'_-(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, a desni izvod u tački $x=a$ je $f'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Da bi postojao izvod u tački $x=a$, $f'(a)$, treba da važi sledeći uslov: $f'_-(a) = f'_+(a) \in \mathbb{R}$.

Osnovna pravila. Neka je c konstanta, a $f(x)$ i $g(x)$ funkcije po x. Tada važe sledeća pravila:
1. $(c)'=0$, **2.** $(x)'=1$, **3.** $(f+g)'=f'+g'$, **4.** $(f-g)'=f'-g'$, **5.** $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$, **6.** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$.

Tablica izvoda.
1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, **2.** $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, **3.** $(e^x)'=e^x$, **4.** $(a^x)' = a^x \ln a$, **5.** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, **6.** $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a}$,
7. $(\sin x)' = \cos x$, **8.** $(\cos x)' = -\sin x$, **9.** $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, **10.** $(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, **12.** $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, **13.** $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, **14.** $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

Izvod složene funkcije.
Ako je $y=f(u)$ i $u=\varphi(x)$, tj. $y=f(\varphi(x))$, tada je $y'_x = f'_u(u)\cdot u'_x$ (ovde $f'_u(u)$ označava izvod po u).

Izvod inverzne funkcije.
Ako je $y=f(x)$ funkcija koja ima inverznu funkciju $f^{-1}=g$, tj. $x=f^{-1}(y)=g(y)$, onda važi: $f'_x = \frac{1}{g'_y}$. Kako je ovde g'_y funkcija od y, a mi hoćemo da izrazimo izvod po x, potrebno je još da na desnoj strani jednakosti svako y zamenimo sa $f(x)$!

Izvod parametarski zadate funkcije.
Parametarski zadata funkcija je $x=f(t)$, $y=g(t)$ i njen izvod (y po x) je dat sa $y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f'_t}{g'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.
Ovaj izvod je takođe parametarski zadata funkcija od istog parametra t!

Izvod implicitno zadate funkcije. Implicitno zadata funkcija je $F(x,y)=0$ i za traženje njenog izvoda (y po x) koristimo dva načina:
I Diferenciramo jednačinu $F(x,y)=0$ po x smatrajući da je y funkcija od x (po pravilima za izvod složene funkcije) i iz tako dobijene jednačine "izvučemo" y'_x.
II Odredimo parcijalne izvode funkcije $F(x,y)$ po x, $\frac{\partial F}{\partial x}$, (tu y tretiramo kao konstantu i pravimo izvod po x) i po y, $\frac{\partial F}{\partial y}$, (tu x tretiramo kao konstantu i pravimo izvod po y). Tada je traženi izvod $y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Logaritamski izvod. Koristi se za izračunavanje izvoda funkcije $y(x) = f(x)^{g(x)}$ (primetimo da ovde ne možemo da iskoristimo ni **1.** ni **4.** iz tablice izvoda!) i ovo možemo uraditi na dva načina:
I $\ln y = g \cdot \ln f$. Kad ovo diferenciramo dobijamo $\frac{y'_x}{y} = g' \cdot \frac{1}{f} + g' \cdot \ln f$, odakle je $y'_x = y \cdot (g' \cdot \frac{1}{f} + g' \cdot \ln f) = f^g \cdot (g' \cdot \frac{1}{f} + g' \cdot \ln f)$.
II $y = f^g = \left(e^{\ln f}\right)^g = e^{(\ln f) \cdot g}$ i diferenciranjem ovog izraza dobijamo isti rezultat za y'_x.

Diferencijal funkcije. Diferencijal funkcije $f(x)$ je jednak $df = f'_x \cdot dx$.
Koristi se za aproksimiranje priraštaja funkcije $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$: $\Delta f \approx df$ (tu je $\Delta x = dx$).

Izvodi višeg reda. Drugi izvod funkcije je izvod prvog izvoda, tj. $f''(x) = (f'(x))'$ i uopšteno n–ti izvod je $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Odrediti izvode sledećih funkcija:

1.	$f(x) = tgx + 3x$	2.	$f(x) = 2e^x - \cos x + 5$
3.	$f(x) = x^5 \cdot \ln x$	4.	$f(x) = \frac{arctgx}{2x}$
5.	$f(x) = \sin^2 x$	6.	$f(x) = \sin x^2$
7.	$f(x) = \ln(x^2 + 3)$	8.	$f(x) = \arcsin e^x$
9.	$f(x) = ctg(\ln x + x^5)$	10.	$f(x) = arctg(\ln x - \cos x)$
11.	$f(x) = 2^{\frac{\sin x}{x}}$	12.	$f(x) = 2^a$
13.	$f(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$	14.	$f(x) = x \sin x + 5 \sin 5$
15.	$f(x) = \sqrt{\ln x}$	16.	$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
17.	$f(x) = \cos(\ln(x^5))$	18.	$f(x) = arctg(5x + \ln x - \sin x)$
19.	$f(x) = \ln(\frac{\cos x}{1-x})$	20.	$f(x) = (ctgx)^5 - 7x$
21.	$f(x) = \sin x \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$	22.	$f(x) = \sin(\ln \sqrt{x})$
23.	$f(x) = \arccos(\ln \sqrt{1 - x})$	24.	$f(x) = \cos x \cdot \log(\frac{2}{x})$
25.	$f(x) = \frac{x \cdot tgx}{e^x}$	26.	$f(x) = (\sin x)^3 + \ln x \cdot \cos x$
27.	$f(x) = \log_2(\sin x + e^x \cdot x)$	28.	$f(x) = 5tg((\ln x)^2 + e^x) - 2x + arcctg(1 - x)$
29.	$f(x) = 8^{\log(\sin x \cdot \sqrt{x})}$	30.	$f(x) = \frac{\ln(5-x+x^2)}{\cos x}$
31.	$f(x) = \ln(\sin x - \sqrt{x} \cdot e^{2x})$	32.	$f(x) = \cos(\frac{5x-7}{\ln x}) + \sin x + e^{x^2}$
33.	$f(x) = x^{x^2}$	34.	$f(x) = \sin x^x$ | 35. $f(x) = (\sin x)^x$

Dodatak

1. Po definiciji odrediti prvi izvod funkcija x^2, e^x, $\sin x$ u tački x_0.

2. Koristeći diferencijal približno izračunati vrednosti: $\sqrt[3]{1,02}$, $\sin 29$.

3. Odrediti jednačine tangente i normale postavljene na krivu $y = xe^x$ u tački x=0.

4. Primenom Lopitalovog pravila naći sledeće granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(e - x) + x - 1}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x + arctgx}{x+1}$

2. $\lim_{x\to\pi}(x-\pi)tg\dfrac{x}{2}$

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x})$, $\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)})$, $\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$

4. $\lim_{x\to\infty}(\dfrac{2}{\pi}arctgx)$, $\lim_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$, $\lim_{x\to 0}(\dfrac{x^2}{2})^{-x}$

4 Tejlorova formula

4.1 Aproksimirati funkciju $f(x) = x^2\ln^2 x$ Tejlorovim polinomom trećeg stepena u okolini tačke $a = 1$ i za $|x-1| < \frac{1}{10}$ dokazati da je $|R_3(x)| < \frac{1}{81\cdot 10^3}$

4.2 Data je funkcija $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{e^x}$. Ispitati datu funkciju, razviti je u Maklorenov razvoj i provreiti da li je $|R_3(x)| \le \frac{86e^{\frac{1}{10}}}{10^6}$ za $x \le \frac{1}{10}$.
$D = R$ nema 0 $f > 0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{x} = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f = 0$
$f' = \frac{x(3-2x)}{e^x}$ $f'' = \frac{3-7x-2x^2}{e^x}$ $f''' = \frac{-2x^2+11x-10}{e^x}$ $f^{iv} = \frac{2x^2-15x+21}{e^x}$
$f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + R_3(x)$
$|R_3(x)| = |\frac{2c^2-15c+21}{e^c}\frac{1}{4!}\frac{1}{10^4}| \le |\frac{\frac{2}{100}-\frac{15}{10}+21}{e^c}\frac{1}{4}\frac{1}{10^4}| \le |\frac{1952}{24}\frac{e^{\frac{1}{10}}}{10^6}| \le |\frac{86}{10^6}e^{\frac{1}{10}}|$

4.3 (drugi kolokvijum 2002)Data je funkcija $f(x) = (x^2-7x+14)e^x$.Razviti je u Maklorenov polinom trec1eg stepena i proveriti da li je $|R_3(x)| < \frac{1}{10}$ za $x \in [-1,0]$.
$f' = (x^2-5x+7)e^x$ $f'' = (x^2-3x+2)e^x$ $f''' = (x^2--x-1)e^x$ $f^{iv} = (x^2+x-2)e^x$
$f(x) = 14 + 7x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + R_3(x)$
$|R_3(x)| = |\frac{f^{iv}(x)x^4}{4!}| = \frac{1}{24}|(c^2+c-2)e^c||x^4| \le \frac{1}{24}|c^2+c-2|e^c 1 \le \frac{1}{24}|\frac{-91}{4}|e^0 = \frac{9}{8*12} < \frac{1}{10}$
Iskoristiti za procenu grafik kvadratne funkcije i formulu za teme parabole.

4.4 (28.9.2001)$f(x) = arcsinx + \sqrt{1-x^2}$.Razviti je u Maklorenov red drugog stepena i ispitati da li je greshka manja od $\frac{5^2}{2^4 3^8}$ za $-0.1 \le x \le 0.1$.
$f' = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'' = \frac{x-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $f''' = \frac{2x^2-3x+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$
$T_2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}$
$R_2 = \frac{x^3}{6}\frac{2c^2-3c+1}{(1-c^2)^{\frac{5}{2}}}$ $|R_2| \le \frac{1}{6*10^3}|...|$
Kako je $1-c^2 \ge \frac{99}{100} \Rightarrow |R_2| \le \frac{1}{6*10^3}|\frac{2c^2-3c+1}{(\frac{99}{100})^{\frac{5}{2}}}| = \frac{10^5}{6*10^3*(9*11)^{\frac{5}{2}}}|...| = \frac{10^2}{2*3^6*11^{\frac{5}{2}}}|...|$
Ispitivanjem kvadrane funkcije (nacrtatati grafik) na datom intervalu vidimo da je
$|2c^2-3c+1| \le (2\frac{1}{100} + \frac{3}{10} + 1 = \frac{132}{100}$ $\Rightarrow |R_2| \le \frac{100}{2*3^6*11^{\frac{5}{2}}} = \frac{4*3*11}{...} = \frac{2}{3^5 11^{\frac{3}{2}}}$
Ostaje da se pokaze da je to manje od zadate granice

4.5 $f(x) = x^3\sqrt{1-x}$.Ispitati funkciju, i razviti je u Maklorenov polinom petog stepena i ispitati da li je za $-0.1 \le x \le 0.1$ greshka manja od $\frac{10^{-6}}{8}$.
$g = \sqrt{1-x}$ $g' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ $g'' = -\frac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ $g''' = \frac{-3}{8(1-x)^{\frac{5}{2}}}$
$g = 1 - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} - \frac{x^2}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}} + R_2$ $R_2 = |\frac{-6}{6*8*(1-c)^{\frac{5}{2}}}x^3|$
$f(x) = x^3 g(x) = x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{4} + x^3 R_2$
$|R_5| = |x^3 R_2| = |\frac{-3}{6*8*(1-c)^{\frac{5}{2}}}x^6| \le \frac{10^{-6}}{16} \le \frac{10^{-6}}{8}$

4.6 (23.06.2000) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4} - x$.Aproksimirati je Maklorenovim polinomom drugog stepena i dokazati da je za $|x| \leq \frac{1}{5}$ ispunjeno $|R_2| \leq \frac{10^{-2}}{3}$.
$f' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}} - 1 \quad f'' = \frac{-9}{4\sqrt{x^2-5x+4}^3} \quad f''' = \frac{27}{8}\frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^{\frac{5}{2}}}$
$f(x) = 2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{8\sqrt{2}}\frac{x^2}{2} + R_2(x)$

4.7 $f(x) = \frac{2\ln^2 x + 2\ln x - 1}{x^2}$ aproksimirati oko a=1 i za $|x-1| \leq 0.1$ dokazati da je $|R_2| \leq 8\frac{100}{9^5}$

4.8 Koristeći Tejlorovu formulu razložiti polinom $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 9x + 1$ po stepenima polinoma $x-2$.

5 Ispitivanje funkcija

5.1 $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2$

5.2 $f(x) = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$

5.3 $f(x) = (2x-1)\,e^{\frac{1}{x-1}}$

5.4 $f(x) = x - \sqrt{x^2+4x+3}$

5.5 $f(x) = x - 2arctg\dfrac{x-1}{x+1}$

5.6 $f(x) = \dfrac{x}{2} + arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

5.7 $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

5.8 $f(x) = \dfrac{x\ln x}{2\ln x - 1}$

5.9 $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^2 - \dfrac{4}{3}x$

5.10 $\cos x - \ln\cos x$