

1 Kompleksni brojevi

1.1 Naći sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslove $|z| = |2 + \bar{z}|$ i $\arg \frac{z}{1+i} = \frac{\pi}{2}$.

1.2 Naći sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslove $|\frac{z}{z+1}| = 1$ i $\frac{z}{\bar{z}} = i$, a zatim naći z^5 .

1.3 Ako je $\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\arg z_2 = \frac{2\pi}{3}$ i $z_1 + z_2 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} - 1)i$, naći kompleksne brojeve z_1 i z_2 , a zatim izračunati $\frac{z_1^{14}}{z_2^{13}}$.

1.4 Rešiti jednačinu $|z - a| = |1 - a\bar{z}|$ u zavisnosti od realnog parametra a . U slučaju kada je $\arg z = \frac{\pi}{4}$ i $a \neq \pm 1$, odrediti $\sqrt[3]{z}$.

1.5 Rešiti jednačinu $\frac{z^3-1}{z^3+1} = -i$. Rešenja predstaviti u algebarskom obliku i u kompleksnoj ravni.

1.6 Rešiti jednačinu $\frac{128i}{(z-1)^3} - \sqrt{3} + i = 0$.

1.7 Izračunati $\sqrt[4]{\frac{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^5}{(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})^{10} - 1}}$.

1.8 Ako je $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, naći $1 + z + z^2 + \dots + z^{46}$.

1.9 Rešiti jednačinu $z^6 = w$, gde je $w = \begin{vmatrix} 1 & 1-i & i \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 2i & -1 \end{vmatrix}$.

2 Determinante i Gaus

Izračunati sledeće determinante:

2.1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2.2 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.3 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

2.4 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

2.5 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

$$2.6 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.7 \quad \text{Izračunati } \sqrt[3]{2w+14}, \text{ ako je } w = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 & -1 \\ -1 & z & 1 & 1 \\ 1 & -1 & z & 1 \\ 1 & 1 & -1 & z \end{vmatrix}, \text{ za } z = 2^{-998}(1+i)^{1997}.$$

$$2.8 \quad \text{Ako je } z = \begin{vmatrix} 0 & -1-3i & -1-i & 2 \\ 1+3i & 0 & -i & -1+i \\ 1+i & i & 0 & 0 \\ -2 & 4-2i & 1-i & 2i \end{vmatrix}, \text{ izračunati } \sqrt[3]{z}. \text{ Rezultate prikazati u algebarskom obliku i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.}$$

$$2.9 \quad \text{Gausovom metodom rešiti sistem:}$$

$$\begin{aligned} x - y + 3z + 4t &= 1 \\ x + y + z - 2t &= 2 \\ 3x - 2y + 2z + t &= 3 \\ -x + 2y + 2z + t &= 0 \end{aligned}$$

$$2.10 \quad \text{Gausovom metodom rešiti sistem:}$$

$$\begin{aligned} (a-1)x + y - z &= a \\ (a+2)x + ay + 2z &= 2a+1 \\ (a+1)x + y + z &= a+1 \end{aligned}$$

3 Kramer

$$3.1 \quad \text{Rešiti sistem}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + a^2y &= a \end{aligned}$$

$$3.2 \quad \text{Rešiti sistem}$$

$$\begin{aligned} 3x + (a-1)y + (a-2)z &= -1 \\ 6x - 2y + (a-4)z &= -2 \\ (a-3)x + y + (a+2)z &= -3 \end{aligned}$$

$$3.3 \quad \text{Rešiti sistem}$$

$$\begin{aligned} ax + ay + (a+1)z &= a \\ ax + ay + (a-1)z &= a \\ x + (a+2)z &= 1-a \end{aligned}$$

$$3.4 \quad \text{Rešiti sistem}$$

$$\begin{aligned} ax + ay + 5z &= -a \\ (a-1)y + (a-3)z &= a+1 \\ ax + y + 10z &= -4a-1 \end{aligned}$$

$$3.5 \quad \text{Rešiti sistem}$$

$$\begin{aligned} (a+1)x - 2y + (a+2)z &= 0 \\ -2x + ay - 2z &= 0 \\ (a-1)x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$3.6 \quad \text{Rešiti sistem}$$

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1-a \\ ax - y + z &= -1 \\ x - ay - z &= 0 \end{aligned}$$

4 Matrice

4.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Izračunati:

1. $A \cdot B^T$;

2. $2D + 3(A - 5C)^T$.

4.2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$

4.3 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$

4.4 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X^{-1} + X^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

4.5 Formalno rešiti sledeće matrične jednačine:

1. $(AX + X)^{-1} = B$;

2. $X^T A^T - X^T = B$;

3. $AX^{-1}B = C$.

4.6 Izračunati rang matrice $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4.7 Izračunati rang matrice $\begin{bmatrix} -a & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & a+2 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 5 \\ 3 & a & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.8 Odrediti rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & -a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

4.9 Matričnom metodom rešiti sistem
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= -1 \\ 2x + 6y + 3z &= 1 \end{aligned}$$
.

5 KKT

$$5.1 \left[\begin{array}{ccc|c} a & 5 & -6 & 0 \\ 2 & a-3 & 18 & 0 \\ 5 & 6 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right].$$

5.2 Rešiti sistem u zavisnosti od realnog parametra a Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\begin{aligned} 3x + ay - z &= 6 \\ x + 2y - 2z &= -1 \\ 2x + y + z &= 7 \\ 4x + 5y - 2z &= 8 \end{aligned}.$$

5.3 Rešiti sistem u zavisnosti od realnog parametra a Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\begin{aligned} (a-1)x + y - z &= a \\ (a+2)x + ay + 2z &= 2a+1 \\ (a+1)x + y + z &= a+1 \end{aligned}.$$

$$5.4 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & a+7 & 1 \\ 4 & a & 2 & a+1 \end{array} \right].$$

$$5.5 \left[\begin{array}{ccc|c} m & 5m+27 & m+12 & -m \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & m+1 & m & 1 \\ 4 & 2m & m-4 & 1 \end{array} \right].$$

5.6 U zavisnosti od realnog parametra m diskutovati sistem i u slučaju kada je određen rešiti ga

matričnom metodom.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & m-2 \\ 3 & -1 & m-2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6m-15 & -3 & 6 & 9 \end{array} \right].$$