# 1 Kompleksni brojevi

**1.1** Naći sve kompleksne brojeve $z$ koji zadovoljavaju uslove $|z| = |2 + \bar{z}|$ i $\arg\frac{z}{1+i} = \frac{\pi}{2}$.

**1.2** Naći sve kompleksne brojeve $z$ koji zadovovljavaju uslove $|\frac{z}{z+1}| = 1$ i $\frac{z}{\bar{z}} = i$, a zatim naći $z^5$.

**1.3** Ako je $\arg z_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\arg z_2 = \frac{2\pi}{3}$ i $z_1 + z_2 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} - 1)i$, naći kompleksne brojeve $z_1$ i $z_2$, a zatim izračunati $\frac{z_1^{14}}{\bar{z}_2^{13}}$.

**1.4** Rešiti jednačinu $|z - a| = |1 - a\bar{z}|$ u zavisnosti od realnog parametra $a$. U slučaju kada je $\arg z = \frac{\pi}{4}$ i $a \neq \pm 1$, odrediti $\sqrt[3]{z}$.

**1.5** Rešiti jednačinu $\frac{z^3-1}{z^3+1} = -i$. Rešenja predstaviti u algebarskom obliku i u kompleksnoj ravni.

**1.6** Rešiti jednačinu $\frac{128i}{(z-1)^3} - \sqrt{3} + i = 0$.

**1.7** Izračunati $\sqrt[4]{\dfrac{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^5}{(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})^{10} - 1}}$.

**1.8** Ako je $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, naći $1 + z + z^2 + \cdots + z^{46}$.

**1.9** Rešiti jednačinu $z^6 = w$, gde je $w = \begin{vmatrix} 1 & 1-i & i \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 2i & -1 \end{vmatrix}$.

# 2 Determinante i Gaus

Izračunati sledeće determinante:

**2.1** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

**2.2** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

**2.3** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

**2.4** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

**2.5** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

**2.6** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**2.7** Izračunati $\sqrt[3]{2w+14}$, ako je $w = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 & -1 \\ -1 & z & 1 & 1 \\ 1 & -1 & z & 1 \\ 1 & 1 & -1 & z \end{vmatrix}$, za $z = 2^{-998}(1+i)^{1997}$.

**2.8** Ako je $z = \begin{vmatrix} 0 & -1-3i & -1-i & 2 \\ 1+3i & 0 & -i & -1+i \\ 1+i & i & 0 & 0 \\ -2 & 4-2i & 1-i & 2i \end{vmatrix}$, izračunati $\sqrt[3]{z}$. Rezultate prikazati u algebarskom obliku i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.

**2.9** Gausovom metodom rešiti sistem: $\begin{array}{rcl} x-y+3z+4t &=& 1 \\ x+y+z-2t &=& 2 \\ 3x-2y+2z+t &=& 3 \\ -x+2y+2z+t &=& 0 \end{array}$

**2.10** Gausovom metodom rešiti sistem: $\begin{array}{rcl} (a-1)x+y-z &=& a \\ (a+1)x+ay+2z &=& 2a+1 \\ (a+1)x+y+z &=& a+1 \end{array}$

# 3 Kramer

**3.1** Rešiti sistem $\begin{array}{rcl} x+2y &=& 1 \\ 2x+a^2y &=& a \end{array}$.

**3.2** Rešiti sistem $\begin{array}{rcl} 3x+(a-1)y+(a-2)z &=& -1 \\ 6x-2y+(a-4)z &=& -2 \\ (a-3)x+y+(a+2)z &=& -3 \end{array}$.

**3.3** Rešiti sistem $\begin{array}{rcl} ax+ay+(a+1)z &=& a \\ ax+ay+(a-1)z &=& a \\ x+(a+2)z &=& 1-a \end{array}$.

**3.4** Rešiti sistem $\begin{array}{rcl} ax+ay+5z &=& -a \\ (a-1)y+(a-3)z &=& a+1 \\ ax+y+10z &=& -4a-1 \end{array}$.

**3.5** Rešiti sistem $\begin{array}{rcl} (a+1)x-2y+(a+2)z &=& 0 \\ -2x+ay-2z &=& 0 \\ (a-1)x-y+z &=& 0 \end{array}$.

**3.6** Rešiti sistem $\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 1-a \\ ax-y+z &=& -1 \\ x-ay-z &=& 0 \end{array}$.

# 4 Matrice

**4.1** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Izračunati:

1. $A \cdot B^T$;
2. $2D + 3(A - 5C)^T$.

**4.2** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$

**4.3** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$

**4.4** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X^{-1} + X^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

**4.5** Formalno rešiti sledeće matrične jednačine:

1. $(AX + X)^{-1} = B$;
2. $X^T A^T - X^T = B$;
3. $AX^{-1}B = C$.

**4.6** Izračunati rang matrice $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

**4.7** Izračunati rang matrice $\begin{bmatrix} -a & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & a+2 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 5 \\ 3 & a & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**4.8** Odrediti rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & -a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

**4.9** Matričnom metodom rešiti sistem $\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= -1 \\ 2x + 6y + 3z &= 1 \end{aligned}$.

## 5 KKT

**5.1** $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 5 & -6 & 0 \\ 2 & a-3 & 18 & 0 \\ 5 & 6 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$

**5.2** Rešiti sistem u zavisnosti od realnog parametra $a$ Kroneker-Kapelijevom metodom: $\begin{array}{rcl} 3x+ay-z &=& 6 \\ x+2y-2z &=& -1 \\ 2x+y+z &=& 7 \\ 4x+5y-2z &=& 8 \end{array}.$

**5.3** Rešiti sistem u zavisnosti od realnog parametra $a$ Kroneker-Kapelijevom metodom:
$$\begin{array}{rcl} (a-1)x+y-z &=& a \\ (a+2)x+ay+2z &=& 2a+1 \\ (a+1)x+y+z &=& a+1 \end{array}.$$

**5.4** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & a+7 & 1 \\ 4 & a & 2 & a+1 \end{array}\right].$

**5.5** $\left[\begin{array}{ccc|c} m & 5m+27 & m+12 & -m \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & m+1 & m & 1 \\ 4 & 2m & m-4 & 1 \end{array}\right].$

**5.6** U zavisnosti od realnog parametra $m$ diskutovati sistem i u slučaju kada je odredjen rešiti ga matričnom metodom. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & m-2 \\ 3 & -1 & m-2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6m-15 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right].$

## 6 Vektori, analitička geometrija-dodatak

**6.1** Odrediti jedinični vektor $\vec{c}$ koji je komplanaran sa $\vec{a}=(1,-2,2)$ i $\vec{b}=(3,2,6)$ i polovi ugao izmedju njih.

**6.2** Tačke $A(3,0,0)/, B(0,3,0)/, C(1,5,0)/, D(1,1,a)/, a>0$ predstavljaju temena tetraedra.

(a) Odrediti vrednost parametra $a$ tako da ivica $AD$ bude upravna na ravan odredjenu tačkama $B, C, D$.

(b) Za tako nadjenu vrednost parametra izračunati zapreminu tetraedra i vektor visine koja odgovara strani ACD.

**6.3** Dovesti jednačinu na kanonski oblik i naći formule transformaciju za krivu $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$.

**6.4** $x^2-6\sqrt{3}xy-5y^2-16\sqrt{3}x+16y=0$.

**6.5** $x^2-6xy+9y^2+2x-6y=0$.

**6.6** $x^2-2xy+y^2+6\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-14=0$.

## 7 Nizovi

Brojni niz je funkcija definisana na skupu prirodnih brojeva ($\mathbb{N}$).
Niz $\{a_n\}$ je rastući $\nearrow$ ako važi $a_1 < a_2 < a_3 < ...$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < a_{n+1}$. Ako je niz sa pozitivnim članovima onda se može koristiti i uslov $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.
Niz je opadajući $\searrow$ ako važi $a_1 > a_2 > a_3 > ...$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > a_{n+1}$ (i slično $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$).
Niz je neopadajući $\underline{\nearrow}$ ako važi $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq a_{n+1}$ (i slično $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$).
Niz je nerastući $\overline{\searrow}$ ako važi $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ...$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq a_{n+1}$ (i slično $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$).
Niz je monoton ukoliko zadovoljava jedno od prethodna četiri svojstva.
Niz je ograničen odozdo akko postoji $m$ takvo da je $a_n \geq m$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Niz je ograničen odozgo akko postoji $M$ takvo da je $a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Niz je ograničen akko postoje $m$ i $M$ tako da je $m \leq a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$
Za niz koji teži ka nekom konačnom broju kažemo da konvergira.
Za niz koji ne konvergira (ili teži ka beskonačnosti ili uopšte nema graničnu vrednost) kažemo da divergira.
T. Monoton i ograničen niz je konvergentan.

Primer 1. Niz parnih prirodnih brojeva je dat sa: 2,4,6,8,10,12,14... Formulom ga možemo zadati sa $a_n = 2n$. Ovaj niz je rastući: $a_n = 2n < 2n+2 = a_{n+1}$ i nije ograničen (ma koliko veliko $M$ uzeli, postoje veći članovi niza od $M$). Kada $n \to \infty$ i $a_n \to +\infty$ (ili drugačije zapisano $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$), pa ovaj niz divergira.
Primer 2. Niz zadat sa $a_n = (-1)^n$ je: $-1, 1, -1, 1, -1...$ Znači naizmenično uzima vrednosti $-1$ i 1. Ovaj niz nije monoton (nije ni rastući, ni opadajući, ni nerastući, ni neopadajući), ali je ograničen: $-1 \leq a_n \leq 1$. Ovaj niz ne teži nekom broju (nego je naizmenično $-1$ i 1), tj. on nema graničnu vrednost: ovaj niz divergira.
Primer 3. Niz recipročnih vrednosti je dat sa $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}...$ Ovaj niz je opadajući ($n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, tj. $a_n > a_{n+1}$). Ovaj niz je i ograničen, $0 \leq a_n \leq 1$ (kako je $n > 0$ dobijamo i da je $\frac{1}{n} > 0$, a iz $n \geq 1$ sledi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$). Na osnovu prethodnog tvrdjenja dobijamo da prethodni niz konvergira. Kada $n \to \infty$ $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ (ili drugačije zapisano $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

## Zadaci

1. Napisati prvih pet članova niza čiji je opšti član $a_n = \frac{n}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Ispitati ograničenost i monotonost ovog niza. Da li je dati niz konvergentan?
2. Naći opšti član niza datog sa prvih nekoliko članova: $\frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{30}{31}, ...$
3. Kakvi moraju biti pozitivni brojevi $a, b, c, d$ da bi niz sa opštim članom $a_n = \frac{a\cdot n+b}{c\cdot n+d}$ bio rastući.
4. Dokazati da je niz zadat sa $a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n$, $a > 0$, $a \neq 1$ rastući.

Izračunati granične vrednosti, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, slede ih nizova:

5. $a_n = \frac{5n^2+3n+2}{2n^2-n+1}$. 6. $a_n = \frac{n^3-100n^2+1}{100n^3+15n}$. 7. $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^3}$.
8. $a_n = \frac{n^3-2n^2+3n+1}{2n^2+3n-1}$. 9. $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3$. 10. $a_n = \frac{4n^{3/2}+2n+\sqrt{n}}{5n^{3/2}+5n+2\sqrt{n}}$.
11. $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$. 12. $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. 13. $a_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$.
14. $a_n = \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$. 15. $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$. 16. $a_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$.
17. $a_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$. 18. $a_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.
19. $a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$. 20. $a_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot ...\cdot\sqrt[2^n]{2}$.

21. $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. 22. $a_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Koriste i jednakost $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ izračunati granične vrednosti slede ih nizova:

23. $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. 24. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. 25. $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$. 26. $a_n = \frac{1+x^{2n}}{2+x^{2n}}$.

27. $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2}$. 28. $a_n = n(\ln(n+1)-\ln n)$. 29. $a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n$.

30. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin 1}$.

Dodatak

Osnovni limesi:
$\lim_{n\to\infty}|q|^n = \ldots$, $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ za $a>0, k\in\mathbb{N}$, $\lim\frac{a^n}{n!} = 0$, $\lim\frac{n!}{n^n} = 0$,$\lim\frac{\ln n}{n} = 0$, $\lim\sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\sqrt[n]{a} = 1$, $\lim n|q|^n = 0$ za $|q|<1$

**7.1** Odrediti graničnu vrednost niza $a_n = \dfrac{1}{2n}\cos 2n - \dfrac{3n}{6n+1}$

**7.2** $a_n = \dfrac{\sin(n^2+n)}{\sqrt{n}}$

**7.3** $a_n = \dfrac{(2^{n-1}+arctgn)}{2^n}$

**7.4** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

**7.5** Pokazati da je niz $a_n = \dfrac{5^n n!}{(2n)^n}$ konvergentan i naći njegov limes.

# 8 Granične vrednosti funkcija

Tablične granične vrednosti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha,\ \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

1. $\lim\limits_{x\to 2} x^3+3x$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x+1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+5}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2+6x-9}{9x^3+8x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$ .

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ .

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-4x}$ .

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}$ .

12. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ .

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x}$, $k = \text{const}$, $k \neq 0$ .

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{\sin lx}$ .

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ .

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ .

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ .

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$ .

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$ .

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+a}{x-a}^{x}$ .

21. $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{X^2}}$ .

22. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tgx}$ .

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ .

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^a x}{x^2}$ .

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos^{\sqrt{2}} x}{x^2}$ .

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-\sqrt{x^3+1}}{\ln(1+tgx-\sin x)}$ .

27. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{8x^3+9x^2}-\sqrt{4x^2-8x})$ .

28. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ .

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x(\sqrt{x+1}-1)}$ .

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\frac{x+3}{x}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$ .

## 9 Izvodi funkcija jedne promenljive i Lopital

*Definicija.* Izvod funkcije $f(x)$ je $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ . Koristi se i oznaka $\frac{df}{dx}$ za izvod funkcije $f$ po $x$.

Izvod funkcije $f(x)$ u tački $x = a$ je $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ . Ako taj limes postoji i konačan je, kažemo da je funkcija $f$ diferencijabilna u tački $x = a$.

Geometrijsko značenje prvog izvoda je:
$f'(x_0) = tg\alpha = k$, gde je $k$ koeficijent pravca tangente na krivu $y = f(x)$ u tački $(x_0, y_0)$, gde je $y_0 = f(x_0)$.

Levi izvod u tački $x = a$ je $f'_-(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ , a desni izvod u tački $x = a$ je $f'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Da bi postojao izvod u tački $x = a$, $f'(a)$, treba da važi sledeći uslov: $f'_-(a) = f'_+(a) \in \mathbb{R}$.

*Osnovna pravila.* Neka je $c$ konstanta, a $f(x)$ i $g(x)$ funkcije po $x$. Tada važe sledeća pravila:
**1.** $(c)' = 0$, **2.** $(x)' = 1$, **3.** $(f+g)' = f' + g'$, **4.** $(f-g)' = f' - g'$, **5.** $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$, **6.** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$.

*Tablica izvoda.*
**1.** $(x^n)' = nx^{n-1}$, **2.** $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, **3.** $(e^x)' = e^x$, **4.** $(a^x)' = a^x \ln a$, **5.** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, **6.** $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a}$,
**7.** $(\sin x)' = \cos x$, **8.** $(\cos x)' = -\sin x$, **9.** $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, **10.** $(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,
**11.** $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, **12.** $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, **13.** $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, **14.** $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

*Izvod složene funkcije.*
Ako je $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$, tj. $y = f(\varphi(x))$, tada je $y'_x = f'_u(u)\cdot u'_x$ (ovde $f'_u(u)$ označava izvod po $u$).

*Izvod inverzne funkcije.*
Ako je $y = f(x)$ funkcija koja ima inverznu funkciju $f^{-1} = g$, tj. $x = f^{-1}(y) = g(y)$, onda važi: $f'_x = \frac{1}{g'_y}$. Kako je ovde $g'_y$ funkcija od $y$, a mi hoćemo da izrazimo izvod po $x$, potrebno je još da na desnoj strani jednakosti svako $y$ zamenimo sa $f(x)$!

*Izvod parametarski zadate funkcije.*
Parametarski zadata funkcija je $x = f(t)$, $y = g(t)$ i njen izvod ($y$ po $x$) je dat sa $y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f'_t}{g'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.
Ovaj izvod je takođe parametarski zadata funkcija od istog parametra $t$!

*Izvod implicitno zadate funkcije.* Implicitno zadata funkcija je $F(x,y) = 0$ i za traženje njenog izvoda ($y$ po $x$) koristimo dva načina:
I Diferenciramo jednačinu $F(x,y) = 0$ po $x$ smatrajući da je $y$ funkcija od $x$ (po pravilima za izvod složene funkcije) i iz tako dobijene jednačine "izvučemo" $y'_x$.
II Odredimo parcijalne izvode funkcije $F(x,y)$ po $x$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, (tu $y$ tretiramo kao konstantu i pravimo izvod po $x$) i po $y$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, (tu $x$ tretiramo kao konstantu i pravimo izvod po $y$). Tada je traženi izvod $y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

*Logaritamski izvod.* Koristi se za izračunavanje izvoda funkcije $y(x) = f(x)^{g(x)}$ (primetimo da ovde ne možemo da iskoristimo ni **1.** ni **4.** iz tablice izvoda!) i ovo možemo uraditi na dva načina:
I $\ln y = g\cdot \ln f$. Kad ovo diferenciramo dobijamo $\frac{y'_x}{y} = g'\cdot\frac{1}{f} + g'\cdot \ln f$, odakle je $y'_x = y\cdot(g'\cdot\frac{1}{f} + g'\cdot\ln f) = f^g\cdot(g'\cdot\frac{1}{f} + g'\cdot\ln f)$.
II $y = f^g = \left(e^{\ln f}\right)^g = e^{(\ln f)\cdot g}$ i diferenciranjem ovog izraza dobijamo isti rezultat za $y'_x$.

*Diferencijal funkcije.* Diferencijal funkcije $f(x)$ je jednak $df = f'_x \cdot dx$.
Koristi se za aproksimiranje priraštaja funkcije $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$: $\Delta f \approx df$ (tu je $\Delta x = dx$).

*Izvodi višeg reda.* Drugi izvod funkcije je izvod prvog izvoda, tj. $f''(x) = (f'(x))'$ i uopšteno $n$–ti izvod je $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Odrediti izvode sledećih funkcija:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $f(x) = tgx + 3x$ | 2. | $f(x) = 2e^x - \cos x + 5$ |
| 3. | $f(x) = x^5 \cdot \ln x$ | 4. | $f(x) = \frac{arctgx}{2x}$ |
| 5. | $f(x) = \sin^2 x$ | 6. | $f(x) = \sin x^2$ |
| 7. | $f(x) = \ln(x^2 + 3)$ | 8. | $f(x) = \arcsin e^x$ |
| 9. | $f(x) = ctg(\ln x + x^5)$ | 10. | $f(x) = arctg(\ln x - \cos x)$ |
| 11. | $f(x) = 2^{\frac{\sin x}{x}}$ | 12. | $f(x) = 2^a$ |
| 13. | $f(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$ | 14. | $f(x) = x \sin x + 5 \sin 5$ |
| 15. | $f(x) = \sqrt{\ln x}$ | 16. | $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ |
| 17. | $f(x) = \cos(\ln(x^5))$ | 18. | $f(x) = arctg(5x + \ln x - \sin x)$ |
| 19. | $f(x) = \ln(\frac{\cos x}{1-x})$ | 20. | $f(x) = (ctgx)^5 - 7x$ |
| 21. | $f(x) = \sin x \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$ | 22. | $f(x) = \sin(\ln \sqrt{x})$ |
| 23. | $f(x) = \arccos(\ln \sqrt{1-x})$ | 24. | $f(x) = \cos x \cdot \log(\frac{2}{x})$ |
| 25. | $f(x) = \frac{x \cdot tgx}{e^x}$ | 26. | $f(x) = (\sin x)^3 + \ln x \cdot \cos x$ |
| 27. | $f(x) = \log_2(\sin x + e^x \cdot x)$ | 28. | $f(x) = 5tg((\ln x)^2 + e^x) - 2x + arcctg(1-x)$ |
| 29. | $f(x) = 8^{\log(\sin x \cdot \sqrt{x})}$ | 30. | $f(x) = \frac{\ln(5-x+x^2)}{\cos x}$ |
| 31. | $f(x) = \ln(\sin x - \sqrt{x} \cdot e^{2x})$ | 32. | $f(x) = \cos(\frac{5x-7}{\ln x}) + \sin x + e^{x^2}$ |
| 33. | $f(x) = x^{x^2}$ | 34. | $f(x) = \sin x^x$ \| 35. $f(x) = (\sin x)^x$ |

Dodatak

**1.** Po definiciji odrediti prvi izvod funkcija $x^2$, $e^x$, $\sin x$ u tački $x_0$.

**2.** Koristeći diferencijal približno izračunati vrednosti: $\sqrt[3]{1,02}$, $\sin 29$.

**3.** Odrediti jednačine tangente i normale postavljene na krivu $y = xe^x$ u tački x=0.

**4.** Primenom Lopitalovog pravila naći sledeće granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x) + x - 1}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x+arctgx}{x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\pi} (x-\pi) tg\dfrac{x}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\dfrac{x}{ctgx} - \dfrac{\pi}{2\cos x})$, $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \dfrac{1}{\ln(1+x)})$, $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1})$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2}{\pi} arctgx)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} (ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$ , $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{x^2}{2})^{-x}$

# 10 Tejlorova formula

**10.1** Aproksimirati funkciju $f(x) = x^2 \ln^2 x$ Tejlorovim polinomom trećeg stepena u okolini tačke $a = 1$ i za $|x-1| < \frac{1}{10}$ dokazati da je $|R_3(x)| < \frac{1}{81 \cdot 10^3}$

**10.2** Data je funkcija $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{e^x}$. Ispitati datu funkciju, razviti je u Maklorenov razvoj i provreiti da li je $|R_3(x)| \leq \frac{86e^{\frac{1}{10}}}{10^6}$ za $x \leq \frac{1}{10}$.
$D = R$ nema 0 $f > 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{x} = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f = 0$
$f' = \frac{x(3-2x)}{e^x}$ $f'' = \frac{3-7x-2x^2}{e^x}$ $f''' = \frac{-2x^2+11x-10}{e^x}$ $f^{iv} = \frac{2x^2-15x+21}{e^x}$
$f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + R_3(x)$
$|R_3(x)| = |\frac{2c^2-15c+21}{e^c}\frac{1}{4!}\frac{1}{10^4}| \leq |\frac{\frac{2}{100}-\frac{15}{10}+21}{e^c}\frac{1}{4}\frac{1}{10^4}| \leq |\frac{1952}{24}\frac{e^{\frac{1}{10}}}{10^6}| \leq |\frac{86}{10^6}e^{\frac{1}{10}}|$

**10.3** (drugi kolokvijum 2002)Data je funkcija $f(x) = (x^2-7x+14)e^x$.Razviti je u Maklorenov polinom trec1eg stepena i proveriti da li je $|R_3(x)| < \frac{1}{10}$ za $x \in [-1, 0]$.
$f' = (x^2-5x+7)e^x$ $f'' = (x^2-3x+2)e^x$ $f''' = (x^2--x-1)e^x$ $f^{iv} = (x^2+x-2)e^x$
$f(x) = 14 + 7x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + R_3(x)$
$|R_3(x)| = |\frac{f^{iv}(x)x^4}{4!}| = \frac{1}{24}|(c^2+c-2)e^c||x^4| \leq \frac{1}{24}|c^2+c-2|e^c 1 \leq \frac{1}{24}|\frac{-91}{4}|e^0 = \frac{9}{8*12} < \frac{1}{10}$
Iskoristiti za procenu grafik kvadratne funkcije i formulu za teme parabole.

**10.4** (28.9.2001)$f(x) = arcsinx + \sqrt{1-x^2}$.Razviti je u Maklorenov red drugog stepena i ispitati da li je greshka manja od $\frac{5^2}{2^4 3^8}$ za $-0.1 \leq x \leq 0.1$.
$f' = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $f'' = \frac{x-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $f''' = \frac{2x^2-3x+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$
$T_2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}$
$R_2 = \frac{x^3}{6}\frac{2c^2-3c+1}{(1-c^2)^{\frac{5}{2}}}$ $|R_2| \leq \frac{1}{6*10^3}|...|$
Kako je $1-c^2 \geq \frac{99}{100} \Rightarrow |R_2| \leq \frac{1}{6*10^3}|\frac{2c^2-3c+1}{(\frac{99}{100})^{\frac{5}{2}}}| = \frac{10^5}{6*10^3*(9*11)^{\frac{5}{2}}}|...| = \frac{10^2}{2*3^6*11^{\frac{5}{2}}}|...|$
Ispitivanjem kvadrane funkcije (nacrtatati grafik) na datom intervalu vidimo da je
$|2c^2-3c+1| \leq (2\frac{1}{100} + \frac{3}{10} + 1 = \frac{132}{100}$ $\Rightarrow |R_2| \leq \frac{100}{2*3^6*11^{\frac{5}{2}}} = \frac{4*3*11}{...} = \frac{2}{3^5 11^{\frac{3}{2}}}$
Ostaje da se pokaze da je to manje od zadate granice

**10.5** $f(x) = x^3\sqrt{1-x}$.Ispitati funkciju, i razviti je u Maklorenov polinom petog stepena i ispitati da li je za $-0.1 \leq x \leq 0.1$ greshka manja od $\frac{10^{-6}}{8}$.
$g = \sqrt{1-x}$ $g' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ $g'' = -\frac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ $g''' = \frac{-3}{8(1-x)^{\frac{5}{2}}}$
$g = 1 - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} - \frac{x^2}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}} + R_2$ $R_2 = |\frac{-6}{6*8*(1-c)^{\frac{5}{2}}}x^3|$
$f(x) = x^3 g(x) = x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{4} + x^3 R_2$
$|R_5| = |x^3 R_2| = |\frac{-3}{6*8*(1-c)^{\frac{5}{2}}}x^6| \leq \frac{10^{-6}}{16} \leq \frac{10^{-6}}{8}$

**10.6** (23.06.2000) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4} - x$.Aproksimirati je Maklorenovim polinomom drugog stepena i dokazati da je za $|x| \leq \frac{1}{5}$ ispunjeno $|R_2| \leq \frac{10^{-2}}{3}$.
$f' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}} - 1$ $f'' = \frac{-9}{4\sqrt{x^2-5x+4}^3}$ $f''' = \frac{27}{8}\frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^{\frac{5}{2}}}$
$f(x) = 2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{8\sqrt{2}}\frac{x^2}{2} + R_2(x)$

**10.7** $f(x) = \frac{2\ln^2 x + 2\ln x - 1}{x^2}$ aproksimirati oko a=1 i za $|x-1| \leq 0.1$ dokazati da je $|R_2| \leq 8\frac{100}{9^5}$

**10.8** Koristeći Tejlorovu formulu razložiti polinom $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 9x + 1$ po stepenima polinoma $x - 2$.

# 11 Ispitivanje funkcija

**11.1** $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2$

**11.2** $f(x) = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$

**11.3** $f(x) = (2x-1)\,e^{\dfrac{1}{x-1}}$

**11.4** $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

**11.5** $f(x) = x - 2arctg\dfrac{x-1}{x+1}$

**11.6** $f(x) = \dfrac{x}{2} + arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

**11.7** $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

**11.8** $f(x) = \dfrac{x\ln x}{2\ln x - 1}$

**11.9** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^2 - \dfrac{4}{3}x$

**11.10** $\cos x - \ln\cos x$