Математика 3 - скрипта

Стеван Милашиновић

Новембар 2019.

Садржај

Предговор

Ова скрипта намењена је студентима Саобраћајног факултета у Београду за лакше спремање писменог испита из Математике 3. Све примедбе и сугестије су добродошле и можете их послати на s.milasinovic@sf.bg.ac.rs.

Глава 1

Редови

Нека је a_n неки низ реалних бројева. Бројевни ред је бесконачна сума чланова тог низа у ознаци

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.1}$$

За низ a_n кажемо да је општи члан реда. Са

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

означавамо $n-$ту парцијалну суму реда (1.1). Кажемо да ред (1.1) **конвергира** ако постоји коначан $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, а у супротном кажемо да **дивергира**.

Пример 1.1. По дефиницији испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$.

Парцијална сума реда је $s_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, као сума првих n природних бројева, што би требало да је познато из средње школе, па је $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = +\infty$. Дакле, закључујемо да ред дивергира.

Пример 1.2. По дефиницији испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n,\ q \in \mathbb{R}$.

$s_n = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, за $q \neq 1$, што је сума првих n чланова геометријског низа (средња школа). Одатле је

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{за } |q| < 1; \\ +\infty & \text{за } q > 1; \\ \text{не постоји} & \text{за } q \leqslant -1. \end{cases},$$

јер је

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{за } |q| < 1; \\ +\infty & \text{за } q > 1; \\ \text{не постоји} & \text{за } q \leqslant -1. \end{cases}$$

За $q = 1$ имамо $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$, па је $s_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$, одакле је $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$, што значи да ред дивергира. Дакле, ред конвергира ако и само ако је $|q| < 1$. Наведимо основни критеријум дивергенције реда, такозвани тест дивергенције.

Тврђење 1.1. Ако низ a_n не тежи нули, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Напомена! Конвергенција реда не зависи од првих коначно много чланова реда, јер конвергенција низа s_n не зависи од првих коначно много чланова низа, па зато можемо да испитујемо конвергенције редова облика

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=4}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=10101}^{\infty} a_n \ \ldots$$

1 Редови са позитивним члановима

Ред са позитивним члановима је сваки ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ код кога је $a_n \geqslant 0$. За испитивање оваквих редова постоје разни критеријуми које ћемо убудуће користити.

Тврђење 1.2. (Први поредбени критеријум) Нека су дати редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и нека је $a_n \leqslant b_n$ почевши од неког $n_0 \in \mathbb{N}$. Тада, ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, а ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Подсетимо се сада једне дефиниције из Математике 1.

Дефиниција 1.1. Нека су a_n и b_n низови који нису идентички једнаки нули. Кажемо да су a_n и b_n асимптотски еквивалентни у ознаци $a_n \sim b_n$ ако је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Из дефиниције се види да ако је $a_n \sim b_n$, онда мора бити и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, под претпоставком да лимеси или постоје или одређено дивергирају (ка $+\infty$ или $-\infty$).

Знамо да је $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, па због Хајнеове теореме граничне вредности важи $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$, за сваки низ a_n такав да је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и $a_n \neq 0$. Одатле следи

да је $\sin a_n \sim a_n$. На пример: $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, $\sin \frac{5}{(n+1)^2} \sim \frac{5}{(n+1)^2}$ итд. Мотивисани овим примером можемо дати све остале (које се најчешће користе) асипмтотске релације кад год је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

1. $\sin a_n \sim a_n$,
2. $\cos a_n \sim 1 - \frac{a_n^2}{2}$,
3. $e^{a_n} \sim 1 + a_n$,
4. $(1 + a_n)^\lambda \sim 1 + \lambda a_n$,
5. $\ln(1 + a_n) \sim a_n$,
6. $(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} \sim e$,
7. $\mathrm{tg}(a_n) \sim a_n$,
8. $\mathrm{arctg}(a_n) \sim a_n$.

Исто тако важна асимптотска релација је везана за полином

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \sim a_k n^k, \text{ где је } a_k \neq 0.$$

Често ћемо у испитвању конвергенције редова користити следећа два тврђења.

Тврђење 1.3. Ако је $a_n \sim b_n$ и $c_n \sim d_n$, онда је:

1. $a_n + c_n \sim b_n + d_n$,
2. $a_n c_n \sim b_n d_n$,
3. $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$.

Тврђење 1.4. Ако је $a_n \sim b_n$, онда је $\sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$, где су a_n и b_n позитивни низови. Такође важи и $(a_n)^{\frac{1}{p}} \sim (b_n)^{\frac{1}{p}}$, за $p \in \mathbb{R}$ и $p \neq 0$.

Не важи, међутим, ако је $a_n \sim b_n$ да је онда $a_n^n \sim b_n^n$. То можемо видети на примеру $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1$. Очигледно је $a_n \sim b_n$, али $a_n^n \sim e$, јер је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = e$, па не може бити $a_n^n \sim b_n^n$, јер је $b_n^n = 1$. Веома важна ће нам бити асимптотска релација која је позната под називом **Стирлингова формула**

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Тврђење 1.5. (Други поредбени критеријум) Ако је $a_n \sim b_n$, тада редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ истовремено конвергирају или дивергирају.

Тврђење 1.6. (Даламберов критеријум) Нека је дат ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и нека је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Тада за $L < 1$ ред конвергира, а за $L > 1$ <u>општи члан реда не тежи нули</u>, па ред дивергира.

Тврђење 1.7. (Кошијев корени критеријум) Нека је дат ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и нека је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Тада за $L < 1$ ред конвергира, а за $L > 1$ <u>општи члан реда не тежи нули</u>, па ред дивергира.

Тврђење 1.8. (Рабеов критеријум) Нека је дат ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и нека је

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = L.$$

Тада за $L > 1$ ред конвергира, а за $L < 1$ ред дивергира.

Приметимо да код Даламберовог и Кошијевог критеријума, случај $L = 1$ не даје информацију о конвергенцији реда. Зато, када је $L = 1$ код Даламберовог критеријума, пожељно је пробати са Рабеовим критеријумом. Ако нам ни он не да информацију о конвергенцији реда, онда морамо да се довијамо на други начин.

Тврђење 1.9. (Кошијев интегрални критеријум) Нека је $f(x)$ непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x \geqslant k,\ k \in \mathbb{N}$ и нека је $a_n = f(n),$ за $n \geqslant k$. Тада ред $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако конвергира несвојствени интеграл $\int_k^{+\infty} f(x)dx.$

Искористимо претходни критеријум да докажемо следеће битно

Тврђење 1.10. Ред $H(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p \in \mathbb{R}$ зове се **уопштени хармонијски ред**. $H(p)$ конвергира ако и само ако је $p > 1$.

Доказ: Нека је прво $p < 0$. Тада је $a_n = \dfrac{1}{n^p} = n^{-p}$, $-p > 0$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, што значи да ред дивергира јер општи члан не тежи нули. Слично, за $p = 0$ добијамо да је $a_n = 1$, па је и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, односно ред дивергира. Нека је сада $p > 0$. Посматрајмо функцију $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Она је непрекидна за $x \geqslant 1$, ненегативна је и важи $f'(x) = \dfrac{-p}{n^{1+p}} < 0$, за $x \geqslant 1$, што значи да је функција опадајућа за $x \geqslant 1$. Можемо сада употребити интегрални критеријум на наш ред, јер је очигледно $a_n = f(n)$, за $n \geqslant 1$. За $p \in (0, 1)$ имамо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^{+\infty} = \frac{+\infty}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty,$$

јер је $1 - p > 0$, па је $(+\infty)^{1-p} = +\infty$ и ред дивергира. За $p > 1$ имамо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^{+\infty} = \frac{0}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1},$$

јер је $1 - p < 0$, па је $(+\infty)^{1-p} = 0$ и ред конвергира. Коначно, за $p = 1$ имамо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln(x)\bigg|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln(1) = +\infty - 0 = +\infty,$$

што значи да ред дивергира. Тиме је тврђење доказано. □

Напоменимо да је ознаке попут $(+\infty)^{1-p} = +\infty$ подразумевају одговајуће граничне вредности.

Дефиниција 1.2. Нека је $n \in \mathbb{N}$. **Двоструки факторијел парног броја** је

$$(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2,$$

а **двоструки факторијел непарног броја** је

$$(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1.$$

Дакле, код двоструког факторијела неког броја множимо уназад са кораком два.

Покажимо сада једну особину двоструког факторијела парног броја.

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2\\ &= 2(n) \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2) \cdot \ldots \cdot 2(2) \cdot 2(1)\\ &= 2^n(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) = 2^n n!.\end{aligned}$$

За сваки број $n \in \mathbb{N}$ важи да је

$$(2n)!!(2n-1)!! = (2n)!,$$

јер је $(2n)!$ производ свих бројева од 1 до $2n$, $(2n)!!$ производ свих парних од 2 до $2n$, а $(2n-1)!!$ производ свих непарних од 1 до $(2n-1)$, па кад се помноже дају производ свих од 1 до $2n$.

Није лоше знати следећу асимптотску релацију

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}. \tag{1.2}$$

Докажимо ово:

$$\begin{aligned}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2} = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}[n!]^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{2^{2n}[n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}]^2}\\ &= \frac{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}},\end{aligned}$$

где је Стирлингова формула примењена на $(2n)!$ и $n!$. Дефинишимо још и уопштени биномни коефицијент.

Дефиниција 1.3. Уопштени биномни коефицијент у ознаци $\binom{a}{n}$, где је $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, је дат са

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}.$$

Пример 1.3. Наведимо неке биномне коефицијенте који се најчешће срећу у задацима:

1. $\binom{-1}{n} = (-1)^n$,
2. $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ за $n \geqslant 1$,
3. $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}$ за $n \geqslant 2$.

Докажимо, илустрације ради, део 2.

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}.\end{aligned}$$

1.1 Решени задаци

Задатак 1.1. По дефиницији испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

Одредимо чему је једнака $n-$та парцијална сума датог реда.

$$\begin{aligned}
s_n =& \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\\
=& \frac{1}{2}\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2}\frac{4-2}{2\cdot 4}+\frac{1}{2}\frac{5-3}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{2}\frac{n+2-n}{n(n+2)}\\
=& \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\
=& \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}\right),
\end{aligned}$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\dfrac{3}{4}$. Дакле, ред конвергира и збир му је $\dfrac{3}{4}$.

Задатак 1.2. Испитати конвергенцију следећих редова

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n+2}$,

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n-1}$,

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2^n+n^7}$.

Општи члан реда под 1. је $a_n=\dfrac{n^2+1}{n+2}$ и очигледно је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, па ред дивергира јер општи члан не тежи нули. За ред под 2. је

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{(n-1)\frac{4}{2n-1}\frac{2n-1}{4}}\\
&= \left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4}\frac{4(n-1)}{2n-1}},
\end{aligned}$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=e^2\neq 0$, што значи да ред дивергира. Коначно, за ред под 3. је $a_n=\sqrt[n]{2^n+n^7}$. Приметимо да је $2^n+n^7\geqslant 2^n$, па је $\sqrt[n]{2^n+n^7}\geqslant\sqrt[n]{2^n}=2$, одакле следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty} 2$. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\geqslant 2$, па општи члан тежи неком броју који је свакако различит од нуле, што значи да ред дивергира (може се показати да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$, применом леме о два полицајца нпр.).

Задатак 1.3. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

Приметимо да је

$$a_n = (\sqrt{n^2+n} - n) = (\sqrt{n^2+n} - n)\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, па ред дивергира према тесту дивергенције.

Задатак 1.4. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

<u>Први начин:</u> Приметимо да је $n \geqslant 1$, одатле следи да је $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$, па је онда $\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{2^n} \leqslant 1\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$. Одатле добијамо да је $a_n = \dfrac{1}{n2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, а ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ конвергира јер је $q = \dfrac{1}{2} < 1$. Према првом поредбеном критеријуму следи да почетни ред конвергира.

<u>Други начин:</u> Посматрајмо количник $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \dfrac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \dfrac{n}{2(n+1)}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2} < 1$, то према Даламберовом критеријуму следи да ред конвергира.

<u>Трећи начин:</u> Како је $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n2^n}} = \dfrac{1}{2\sqrt[n]{n}}$, а знамо (или би требало да знамо) да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то следи да је онда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{2} < 1$, па ред конвергира према Кошијевом критеријуму.
Не би било лоше подсетити се да је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1, \text{ за} p \in \mathbb{R} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^p} = 1, \text{ за } a > 0,\ p \in \mathbb{R}.$$

Задатак 1.5. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(1 - \cos\frac{1}{n}\Big)$.

Приметимо да је $1 - \cos\dfrac{1}{n} \geqslant 0$, јер је $\cos\dfrac{1}{n} \leqslant 1$. То значи да је

$$a_n = n\Big(1 - \cos\frac{1}{n}\Big) \geqslant 0,$$

а како је $\cos\dfrac{1}{n} \sim 1 - \dfrac{1}{2n^2}$, то је $a_n = n\Big(1 - \cos\dfrac{1}{n}\Big) \sim n\Big(1 - \Big(1 - \dfrac{1}{2n^2}\Big)\Big) = n\dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{1}{2n}$. Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ дивергира јер је то заправо ред $H(1)$, па онда мора и почетни ред да дивергира према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.6. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

Како је $1+n^2 \sim n^2$, $1+n^3 \sim n^3$, то је $a_n = \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 \sim \left(\frac{n^2}{n^3}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$. Ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = H(2)$ конвергира, па и почетни ред конвергира према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.7. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2}{n^2}$.

Приметимо да је $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{за } n \text{ парно;} \\ -1 & \text{за } n \text{ непарно.} \end{cases}$, па је $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. Одатле је $a_n = \frac{(-1)^n+2}{n^2} \leqslant \frac{1+2}{n^2} = \frac{3}{n^2}$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ конвергира, то онда конвергира и почетни ред према првом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.8. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin n!)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Како је $\sin x \leqslant 1$, за свако реално x, то је онда и $\sin n! \leqslant 1$. Одатле је $a_n = \frac{(\sin n!)^2}{n^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1^2}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, а како ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ конвергира, то конвергира и почетни ред према првом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.9. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

<u>Први начин:</u> Како је $\sqrt{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}} = \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}}$ и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n-1} = 1$, то је $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. То значи да ред конвергира према Кошијевом критеријуму.
<u>Други начин:</u> Посматрајмо количник

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)-1}{\sqrt{2}^{n+1}}}{\frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}} = \frac{\sqrt{2}^n(2n+1)}{\sqrt{2}^{n+1}(2n-1)} = \frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)}.$$

Одатле је $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, па ред конвергира према Даламберовом критеријуму.

Задатак 1.10. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{3n^2}{n^2+1}\Big)^n$.

$\sqrt[n]{a_n}=\frac{3n^2}{n^2+1}$, па је $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=3>1$, што значи да ред дивергира према Кошијевом критеријуму.

Задатак 1.11. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(n+1)^n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(2(n+1))!!}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{(2n)!!}{(n+1)^n}}=\frac{(n+1)^n(2n+2)!!}{(n+2)^{n+1}(2n)!!}=\frac{(n+1)^n(2n+2)(2n)!!}{(n+2)(n+2)^n(2n)!!}=\frac{2n+2}{n+2}\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big)^n,$$

одакле је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+2}\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big)^n=\frac{2}{e},$$

јер је $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+2}=2$, а $\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}$. Како је $\frac{2}{e}<1$ то значи да ред конвергира према Даламберовом критеријуму.

Задатак 1.12. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

<u>Први начин:</u> Како је $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}}$ дивергира, то онда и почнетни ред конвергира према другом поредбеном критеријуму.
<u>Други начин:</u> Посматрајмо количник

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}=\frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!(2n-1)!!}=\frac{(2n+1)(2n-1)!!(2n)!!}{(2n+2)(2n)!!(2n-1)!!}=\frac{2n+1}{2n+2},$$

одакле видимо да је $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, а тај случај нам је неодлучан, тј. не можемо ништа рећи о конвергенцији на основу Даламберовог критеријума. Пробамо да ли Рабеов критеријум може нешто да нам каже. Посматрамо

$$n\Big(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big)=n\Big(1-\frac{2n+1}{2n+2}\Big)=n\Big(\frac{2n+2-2n-1}{2n+2}\Big)=\frac{n}{2n+2},$$

па је $\lim_{n\to\infty}n\Big(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big)=\frac{1}{2}<1$, што значи да ред дивергира према Рабеовом критеријуму.

Задатак 1.13. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(2n-1)!!}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}(2n+1)!!}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)\cdot(4n+5)}}{\frac{2^n(2n-1)!!}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)}} = \frac{1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)2^{n+1}(2n+1)!!}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)\cdot(4n+5)2^n(2n-1)!!}$$
$$= \frac{2(2n+1)}{4n+5} = \frac{4n+2}{4n+5},$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, што нам не говори ништа о конвергенцији. Зато пробамо Рабеов критеријум.

$$n\Big(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = n\Big(1-\frac{4n+2}{4n+5}\Big) = \frac{3n}{4n+5},$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{3}{4} < 1$, што значи да ред дивергира према Рабеовом критеријуму.

Задатак 1.14. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

$$a_n = \sqrt{n}\ln\frac{n+1}{n-1} = \sqrt{n}\ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) = \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \sqrt{n}\frac{2}{n-1} \sim \frac{2\sqrt{n}}{n}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Како ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ дивергира, то дивергира и почетни ред према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.15. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1!\cdot3!\cdot5!\cdots(2n-1)!}{(n!)^n}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$.

Како је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1!\cdot3!\cdot5!\cdots(2n-1)!\cdot(2n+1)!}{((n+1)!)^{n+1}}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{(n!)^n}{1!\cdot3!\cdot5!\cdots(2n-1)!}\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)^n$$
$$= \frac{(2n+1)!\cdot(n!)^n}{((n+1)!)^{n+1}}\frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{(2n+1)!\cdot(n!)^n}{(n+1)!((n+1)!)^n}\frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{(2n+1)!\cdot(n!)^n}{(n+1)!(n+1)^n(n!)^n}\frac{\sqrt{e}}{2}$$
$$= \frac{(2n+1)!}{(n+1)!(n+1)^n}\frac{\sqrt{e}}{2} \sim \frac{(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}\sqrt{2\pi(2n+1)}}{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^n}\frac{\sqrt{e}}{2}$$
$$= \frac{(2n)^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}e^{-n}\sqrt{(2n+1)}}{n^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{n+1}\ n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{\sqrt{e}}{2} \sim \frac{4^n e e^{-n}\sqrt{2n}\sqrt{e}}{e^2\sqrt{n}}$$
$$= \left(\frac{4}{e}\right)^n\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} \to \infty, \text{ кад } n\to\infty,$$

то према Даламберовом критеријуму закључујемо да дати ред дивергира.

Задатак 1.16. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n^p}$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

$a_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n^p} = \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{n^p} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n^p} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^p} = \frac{1}{n^{p+1}}$. Како је

$$a_n \sim \frac{1}{n^{p+1}},$$

то значи да почетни ред конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$, а тај ред конвергира ако и само ако је $p+1 > 1$, односно $p > 0$, према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.17. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n+1) - \ln n)^p}{(2n-1)^2}$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

$a_n = \frac{(\ln(n+1) - \ln n)^p}{(2n-1)^2} = \frac{(\ln \frac{n+1}{n})^p}{(2n-1)^2} = \frac{(\ln(1+\frac{1}{n})^p}{(2n-1)^2} \sim \frac{(\frac{1}{n})^p}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^{p+2}}$. Одатле почетни ред конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^{p+2}}$, а он конвергира ако и само ако је $p+2 > 1$, односно $p > -1$, према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.18. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} n^3(e^{\frac{1}{n}} - 1)^p$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

$a_n = n^3(e^{\frac{1}{n}} - 1)^p \sim n^3\Big(1 + \frac{1}{n} - 1\Big)^p = n^3\Big(\frac{1}{n}\Big)^p = \frac{1}{n^{p-3}}$, одакле видимо да ред конвергира ако и само ако је $p - 3 > 1$, тј. $p > 4$, према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.19. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^p}{\sqrt{n^5 + 3n + 7}}$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

$a_n = \frac{(n+2)^p}{\sqrt{n^5 + 3n + 7}} \sim \frac{n^p}{\sqrt{n^5}} = \frac{n^p}{n^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}-p}}$, па ред конвергира ако и само ако је $\frac{5}{2} - p > 1$, односно $p < \frac{3}{2}$, према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.20. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Кад у општем члану реда имамо заједно факторијел, експоненцијалну функцију или n^n, идеја је да факторијел изразимо преко Стирлингове формуле. Дакле,

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+p}} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\; e^n}{n^{n+p}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^p} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}},$$

одакле видимо да ред конвергира ако и само ако је $p - \dfrac{1}{2} > 1$, односно $p > \dfrac{3}{2}$, према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.21. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{e}{n+1}\Big)^{n^2} \Big(\frac{n!\sin\frac{1}{n}}{n^p}\Big)^n$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Како нам је општи члан $n-$ ти степен неког низа, то се намеће Кошијев критеријум за испитивање конвергенције.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\Big(\frac{e}{n+1}\Big)^{n^2} \Big(\frac{n!\sin\frac{1}{n}}{n^p}\Big)^n} = \Big(\frac{e}{n+1}\Big)^n \frac{n!\sin\frac{1}{n}}{n^p} \sim \frac{e^n}{(n+1)^n} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\sin\frac{1}{n}}{n^p} \\
&= \frac{n^n\sqrt{2\pi n}\sin\frac{1}{n}}{(n+1)^n n^p} \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}\frac{1}{n}}{(n+1)^n n^p} = \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{(n+1)^n n^{p+1}} = \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{(n(1+\frac{1}{n}))^n n^{p+1}} \\
&= \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{n^n(1+\frac{1}{n})^n n^{p+1}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{(1+\frac{1}{n})^n n^{p+1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e n^{p+1}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}\frac{1}{n^{p+1-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је $\sqrt[n]{a_n} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{e}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$, за $p + \dfrac{1}{2} > 0$, тј. за $p > -\dfrac{1}{2}$, па ред конвергира. Ако је $p < -\dfrac{1}{2}$, онда се лако види да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty > 1$, па ред дивергира, док за $p = -\dfrac{1}{2}$ имамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{e} < 1$(доказати), па ред конвергира. Из свега претходног закључујемо да ред конвергира ако и само ако је $p \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Задатак 1.22. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^p - 1\Big|^n n^{n-q}$, у зависности од $p, q \in \mathbb{R}$.

$$a_n = \Big|\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^p - 1\Big|^n n^{n-q} = \Big|\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^p - 1\Big|^n \frac{n^n}{n^q}, \text{ па је}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \Big|\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^p - 1\Big|\frac{n}{\sqrt[n]{n^q}} = \Big|\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^p - 1\Big|\frac{n}{\sqrt[n]{n^q}} \sim \Big|\Big(1+\frac{p}{n}-1\Big)\Big|\frac{n}{1} = \Big|\frac{p}{n}\Big|n = |p|.$$

Ово важи за $|p| \neq 0$, јер не можемо низ који је различит од нуле да процењујемо са низом који је константно нула у асимптотским релацијама. За $p = 0$ се директно

провери да је тада $a_n = 0$, па ред тривијално конвергира као сума нула низа. Дакле, за $p \neq 0$, добили смо да је $\sqrt[n]{a_n} \sim |p|$, што значи да је и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |p|$. За $|p| < 1$ ред ће да конвергира, за $|p| > 1$ ред ће да дивергира, док за $|p| = 1$ немамо одговор о конвергенцији из Кошијевог критеријума. Зато убацимо у почетни ред вредности параметра p за које је задовољена једнакост $|p| = 1$, а то су $p = 1$ или $p = -1$. Имамо:
<u>за $p = 1$</u>

$$a_n = \Big|\Big(\frac{n+1}{n}\Big) - 1\Big|^n n^{n-q} = \Big|\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - 1\Big|^n \frac{n^n}{n^q} = \frac{1}{n^n}\frac{n^n}{n^q} = \frac{1}{n^q},$$

па ред конвергира ако и само ако је $q > 1$.
<u>за $p = -1$</u>

$$\begin{aligned} a_n &= \Big|\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{-1} - 1\Big|^n n^{n-q} = \Big|\Big(\frac{n}{n+1}\Big) - 1\Big|^n n^{n-q} = \Big|\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) - 1\Big|^n n^{n-q} \\ &= \Big| - \frac{1}{n+1}\Big|^n n^{n-q} = \frac{1}{(n+1)^n} n^{n-q} = \frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{1}{n^q} = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \frac{1}{n^q} \\ &= \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n \frac{1}{n^q} \sim e^{-1}\frac{1}{n^q}, \end{aligned}$$

па опет видимо да ред конвергира ако и само ако је $q > 1$.

Задатак 1.23. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^q n^{pn}}{n!}$, у зависности од $p, q \in \mathbb{R}$.

Како у општем члану имамо $n-$ти степен, пробамо Кошијев критеријум

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\frac{(n+1)^q n^{pn}}{n!}} = \frac{\sqrt[n]{(n+1)^q} n^p}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{\sqrt[n]{n^q} n^p}{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} = \frac{\sqrt[n]{n^q} n^p}{n e^{-1}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}} \\ &\sim \frac{1 \cdot n^p}{n e^{-1} \cdot 1} = \frac{e}{n^{1-p}}. \end{aligned}$$

Ако је $1 - p > 0$, тј. $p < 1$, онда важи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e}{n^{1-p}} = 0 < 1$, па ред конвергира. Ако је $p > 1$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty > 1$, па ред дивергира. Ако је $p = 1$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e > 1$, па ред дивергира. Дакле, ред конвергира ако и само ако је $p < 1$, што значи да конвергенција не зависи од параметра q.

Задатак 1.24. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\big|n + p - \sqrt{n^2 + n + 1}\big|\big(\ln(1 + n^p) - p\ln n\big),$$

у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= n\left|n+p-\sqrt{n^2+n+1}\right|\big(\ln(1+n^p)-p\ln n\big)\\
&= n\left|n+p-(n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}\right|\big(\ln(1+n^p)-\ln n^p\big)\\
&= n\left|n+p-n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right|\ln\frac{1+n^p}{n^p}\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Даље,

$$\begin{aligned}
a_n &\sim n\left|n+p-n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)\right|\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\\
&= n\left|p-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right|\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right).
\end{aligned}$$

За $p\leqslant 0$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^p}\right)$ не тежи нули кад $n\to\infty$, а са тим и a_n не тежи нули кад $n\to\infty$, па ред дивергира по тесту дивергенције. За $p>0$ и $p\neq\frac{1}{2}$ имамо

$$a_n\sim n\left|p-\frac{1}{2}\right|\frac{1}{n^p}=\left|p-\frac{1}{2}\right|\frac{1}{n^{p-1}},$$

одакле видимо да за $p-1>1$, тј. $p>2$ ред конвергира, док за $0<p\leqslant 2$ и $p\neq\frac{1}{2}$ ред дивергира. За $p=\frac{1}{2}$ је $a_n\sim n\dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, па ред дивергира. Закључак је да ред конвергира ако и само ако је $p>2$.

Задатак 1.25. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+p}{n}^2$, у зависности од $p\in\mathbb{R}$.

Озачимо са $\mathbb{Z}^-$ све целе бројеве мање од нуле. Ако $p\in\mathbb{Z}^-$, онда је $a_n=0$, па ред конвергира. Заиста, ако је $m<n$ и $m,\ n\in\mathbb{N}$ лако се провери да је $\dbinom{m}{n}=0$, па за $p\in\mathbb{Z}^-$ важи $n+p<n$ као и $n+p\in\mathbb{N}$, почевши од неког $n\in\mathbb{N}$ (проверити на простом примеру да је $\dbinom{4}{5}=0$ па уопшити доказ). Нека је сада $p\in\mathbb{R}$ и $p\notin\mathbb{Z}^-$, имамо

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(n+1+p)\cdot(n+1+p-1)\cdot(n+1+p-2)\cdots(n+1+p-n)}{(n+1)!}\right)^2\cdot\\
&\quad\left(\frac{n!}{(n+p)\cdot(n+p-1)\cdot(n+p-2)\cdots(n+p-(n-1))}\right)^2\\
&= \left(\frac{(n+1+p)\cdot(n+p)\cdot(n+p-1)\cdots(1+p)}{(n+1)!}\right)^2\cdot\\
&\quad\left(\frac{n!}{(n+p)\cdot(n+p-1)\cdot(n+p-2)\cdots(1+p))}\right)^2\\
&= \left(\frac{n+1+p}{n+1}\right)^2=\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^2\to 1,\ \text{кад } n\to\infty,
\end{aligned}$$

па нам Даламберов критеријум не говори ништа о конвергенцији реда. Пробамо сада Рабеов критеријум

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\left(1-\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^2\right)=n\left(1-1-\frac{2p}{n+1}-\frac{p^2}{(n+1)^2}\right)$$
$$=-\frac{2np}{n+1}-\frac{np^2}{(n+1)^2}\to -2p,\ \text{кад } n\to\infty.$$

Сада видимо да за $-2p>1$, односно $p<-\dfrac{1}{2}$ ред конвергира, док за $p>-\dfrac{1}{2}$ ред дивергира. За $p=-\dfrac{1}{2}$ имамо

$$a_n=\binom{n-\frac{1}{2}}{n}^2=\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(n-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\frac{2n-5}{2}\cdots\frac{1}{2}}{n!}\right)^2=\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$
$$\sim\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)^2=\frac{1}{n\pi},\ \text{где смо искористили релацију (1.2)},$$

па ред дивергира по другом поредбеном критеријуму.
Приметимо да случај $p\in\mathbb{Z}^-$ нисмо морали ни да разматрамо јер ред свакако конвергира за свако $p<-\dfrac{1}{2}$, а то укључује и све негативне целе. Међутим, није лоше имати на уму расуђивање за тај специјалан случај.

Задатак 1.26. Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n-p}{n}\binom{n+2-p}{n}$, у зависности од $p\in\mathbb{R}$.

Приметимо прво да за $p\in\mathbb{N}$ и $n-p\in\mathbb{N}$ почевши од неког $n\in\mathbb{N}$, па како је $n-p<n$ то је онда $\displaystyle\binom{n-p}{n}=0$, а одатле ред конвергира. Нека је сада $p\in\mathbb{R}$ и $p\notin\mathbb{N}$. Докажимо да је тада општи члан реда сталног знака

$$a_n=\binom{n-p}{n}\binom{n+2-p}{n}=\frac{(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot(n-p-2)\cdots(n-p-(n-1))}{n!}\cdot$$
$$\frac{(n+2-p)\cdot(n+2-p-1)\cdot(n+2-p-2)\cdots(n+2-p-(n-1))}{n!}$$
$$=\frac{(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot(n-p-2)\cdots(1-p)}{n!}\cdot$$
$$\frac{(n+2-p)\cdot(n+1-p)\cdot(n-p)\cdots(3-p)}{n!}$$
$$=\frac{(n+2-p)\cdot(n+1-p)\cdot[(n-p)\cdot(n-p-1)\cdots(3-p)]^2\cdot(2-p)\cdot(1-p)}{(n!)^2}. \tag{1.3}$$

Одавде видимо да знак од a_n зависи само од израза $(1-p)(2-p)$, јер је остатак или ненегативан (као квадрат) или је облика $(n+2-p)\cdot(n+1-p)$, што је веће од нуле почевши од неког природног броја n. Дакле, за $p \in (1,2)$ $a_n < 0$, а за остале вредности је $a_n > 0$. Ово нам даје за право да користимо неки од критеријума које важе за позитивне редове, јер ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ стално негативан, онда је ред $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$ стално позитиван, а конвергенције редова $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$ су истовремне. Посматрајмо количник

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3-p)\cdot(n+2-p)\cdot[(n+1-p)\cdot(n-p)\cdots(3-p)]^2\cdot(2-p)\cdot(1-p)}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(n+2-p)\cdot(n+1-p)\cdot[(n-p)\cdot(n-p-1)\cdots(3-p)]^2\cdot(2-p)\cdot(1-p)}$$
$$= \frac{(n+3-p)\cdot(n+2-p)\cdot(n+1-p)^2}{(n+1)^2\cdot(n+2-p)\cdot(n+1-p)} = \frac{(n+3-p)\cdot(n+1-p)}{(n+1)^2} \to 1,$$
кад $n \to \infty$,

па нам Даламберов критеријум није од помоћи. Рабеов критеријум нам даје

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{(n+3-p)\cdot(n+1-p)}{(n+1)^2}\right) = n\left(\frac{(2p-2)n-p^2+4p-2}{(n+1)^2}\right)$$
$$= \frac{(2n-2)n^2+(-p^2+4p-2)n}{(n+1)^2} \to 2p-2, \text{ кад } n\to\infty,$$

одакле следи да ред конвергира за $2p-2>1$, односно $p>\frac{3}{2}$, а дивергира за $p<\frac{3}{2}$. За $p=\frac{3}{2}$ имамо кад заменимо $p=\frac{3}{2}$ у једнакост (1.3)

$$a_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{(n!)^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{2n+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2n-1}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{2n-3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2n-5}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{(n!)^2}$$
$$= -\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot[(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3]^2}{2^{2n}(n!)^2} =$$
$$-\frac{(2n+1)\cdot(2n-1)^2\cdot((2n-3)!!)^2}{(2n-1)\cdot(2^n n!)^2} = -\frac{(2n+1)\cdot((2n-1)!!)^2}{(2n-1)\cdot((2n)!!)^2} \sim -\frac{1}{\pi n},$$

одакле следи да ред дивергира према другом поредбеном критеријуму.

Задатак 1.27. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+p}{n}\right)^{n^2} 2^n$, у зависности од $p\in\mathbb{R}$.

Искористимо Кошијев критеријум

$$\sqrt[n]{a_n} = 2\left(\frac{n+p}{n}\right)^n = 2\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \to 2e^p, \text{ кад } n \to \infty.$$

Одавде следи да за $2e^p < 1$, односно за $p < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ред конвергира, док за $p > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ред дивергира. За $p = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$ имамо

$$a_n = e^{\ln\left(2^n\left(1-\frac{\ln 2}{n}\right)^{n^2}\right)} = e^{n\ln 2 + n^2\ln\left(1-\frac{\ln 2}{n}\right)} \sim e^{n\ln 2 + n^2\left(-\frac{\ln 2}{n} - \frac{\ln^2 2}{2n^2}\right)} = e^{-\frac{\ln^2 2}{2}} > 0,$$

одакле следи да општи члан не тежи нули, па ред диверигра по тесту дивергенције. Овде смо искористили следећу асимптотску релацију

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2}, \text{ кад } x \to 0.$$

2 Алтернативни редови

Дефиниција 2.1. За ред облика

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 \cdots, \tag{1.4}$$

где је $a_n \geqslant 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, кажемо да је **алтернативни (наизменични) ред**.

Следеће тврђење односи се на конвергенцију алтернативних редова.

Тврђење 1.11. (Лајбницов критеријум) Ако је низ a_n монотоно опадајући и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тада алтернативни ред (1.4) конвергира.

Напомена! Претходно тврђење важи и за ред облика $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, јер се он може написати као $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ и даље је јасно.

Дефиниција 2.2. За ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ кажемо да **апсолутно конвергира** ако конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Ако ред $|a_n|$ дивергира, а ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (обично) конвергира , онда кажемо да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **условно конвергира**.

Следеће тврђење је од великог значаја за испитивање конвергенције редова.

Тврђење 1.12. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, онда он конвергира и обично.

Обрнуто не мора да важи што нам говори следећи

Пример 1.4. Показати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ конвергира обично, али апсолутно дивергира.

Приметимо прво да је $a_n = \frac{1}{n} \geqslant 0$ и очигледо је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Остаје још да се покаже да је низ a_n опадајући. Низ $a_n > 0$ је опадајући ако и само ако важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$, па је у нашем случају $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \leqslant 1$. Према Лајбницовом критеријум дати ред конвергира обично. Да ред не конвергира апсолутно лако се уверавамо јер је $\left|(-1)^{n-1}a_n\right| = |a_n| = a_n = \frac{1}{n}$, а тај ред дивергира.

Напомена! Да је низ a_n опадајући могли смо да проверимо и на следећи начин. Посматрајмо функцију $f(x) = \frac{1}{x}$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, за свако $x \neq 0$ (нама је довољно да буде мање од нуле **почевши од неког** $x \in \mathbb{R}$), што значи да је дата функција опадајућа, а самим тим и низ $a_n = f(n)$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Решени задаци

Задатак 2.1. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Прво испитујемо апсолутну конвергенцију $|(-1)^n a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, што значи да ред апсолутно дивергира. Из $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ видимо да је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, па остаје да покажемо да је a_n опадајући да би могли да применимо Лајбницов критеријум. Заиста, посматрајмо функцију $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$, за $x \geqslant 1$. $f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0$, за $x > 1$, што значи да је дата функција опадајућа за $x > 1$. Из $a_n = f(n)$, следи да је и дати низ опадајући за $n > 1$, па по Лајбницовом критеријуму ред конвергира. Како ред конвергира обично, а дивергира апсолутно, закључујемо да конвергира условно.

Задатак 2.2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^p}$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Испитујемо прво апсолутну конверенцију $|(-1)^n a_n| = \dfrac{1}{n^p}$, одакле закључујемо да ред апсолутно конвергира за $p > 1$, а апсолутно дивергира за $p \leqslant 1$. Приметимо да је за $p \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, па ред дивергира према тесту дивергенције. Остаје да се види шта се дешава са обичном конвергенцијом за $0 < p \leqslant 1$. Јасно је да је тада $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ради утврђивања монотоности низа посматрајмо функцију $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $x \geqslant 1$. Тада је $f'(x) = -\dfrac{p}{x^{2p}} < 0$, за $x \geqslant 1$ јер је $p \in (0,1]$, тј. $p > 0$. Одатле закључујемо да је функција опадајућа, а самим тим и низ a_n је опадајући па ред конвергира по Лајбницу за $p \in (0,1]$. Коначан закључак је да ред апсолутно конвергира за $p > 1$, дивергира за $p \leqslant 0$, а условно конвергира за $p \in (0,1]$.

Напомена! Монотоност низа из претходног задатка могли смо да проверимо и на следећи начин. Посматрајмо количник

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p < \left(\frac{n}{n+1}\right)^0 = 1,$$

јер је $\dfrac{n}{n+1} < 1$, за свако $n \in \mathbb{N}$, а како за $a \in (0,1)$ важи да је $a^x < a^y$, за $x > y$, одатле следи дата неједанкост јер је $p > 0$.

Задатак 2.3. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+3n+1)^p},$$

у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

$|(-1)^n a_n| = \dfrac{1}{(n^2+3n+1)^p} \sim \dfrac{1}{n^{2p}}$, одакле следи да ред апсолутно конвергира за $2p > 1$, односно $p > \dfrac{1}{2}$. За $2p \leqslant 0$, тј. $p \leqslant 0$ је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, па ред дивергира према тесту дивергеције. За $0 < 2p \leqslant 1$, односно $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$ је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и остаје да видимо шта се дешава са монотоношћу низа a_n. Посматрајмо функцију $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3x+1)^p}$, за $x \geqslant 1$. Тада је $f'(x) = \dfrac{-2px-3p}{(x^2+3x+1)^{2p}}$ први извод функције. Знак првог извода у овом случају (када је именилац увек позитиван, што овде јесте случај) зависиће увек од коефицијента уз оно x у бројиоцу које има највећи степен, јер су сви остали чланови занемарљиви за довољно велико x. Овде је коефицијент уз највећи степен једнак $-2p$, а како је $p > 0$, то је $-2p < 0$ па је функција опадајућа, а самим тим и низ a_n. Према Лајбницовом критеријуму ред конвергира за $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$. Коначно, ред апсолутно конвергира за $p > \dfrac{1}{2}$, дивергира за $p \leqslant 0$, а условно конвергира за $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Напомена! Монотоност је опет могла да се посматра из количника

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+5n+5}\right)^p < \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+5n+5}\right)^0 = 1,$$

јер је очигледно $\dfrac{n^2+3n+1}{n^2+5n+5} < 1$, па важи исто закључивање као у претходном задатку.

Задатак 2.4. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\sqrt[n]{e}}$.

$|(-1)^n a_n| = \dfrac{1}{n^2\sqrt[n]{e}} \sim \dfrac{1}{n^2}$, јер је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} = 1$. Одатле следи да ред апсолутно конвергира.

Задатак 2.5. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{1+n^2} - n\right).$$

$$\begin{aligned}|(-1)^n a_n| &= \sqrt{1+n^2} - n = \left(\sqrt{1+n^2} - n\right)\frac{\sqrt{1+n^2}+n}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1+n^2-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \sim \frac{1}{\sqrt{n^2}+n} = \frac{1}{2n},\end{aligned}$$

па закључујемо да ред апсолутно дивергира. Проверимо обичну конвергенцију примењујући Лајбницов критеријум. Како је $a_n \sim \dfrac{1}{2n}$, то је онда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Проверимо монотоност низа тако што ћемо показати да је $a_{n+1} < a_n$ (за вежбу применити неке од претходних техника). Имамо да је

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^2}+n+1} < \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^2}+n} < \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} = a_n,$$

јер је $n+1 > n$ као и $\sqrt{1+(n+1)^2} > \sqrt{1+n^2}$, а самим тим су одговарајући разломци већи јер делимо мањим позитивним бројевима. Из свега следи да ред конвергира по Лајбницу, а како дивергира апсолутно то он конвергира условно.

ВАЖНО Ако је $a_n \sim b_n$ онда знамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, али не мора да важи да ако је низ b_n монотон да је тада и низ a_n монотон. Пример за то су низови $a_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n}$, $n \geqslant 2$ и $b_n = \dfrac{1}{n}$. Лако се провери да је $a_n \sim b_n$ као и да је b_n опадајући, али да низ a_n није монотон јер му вредности наизменично расту па опадају.

Задатак 2.6. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^p}{n^2+1}$, у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

$|(-1)^n a_n| = \dfrac{n^p}{n^2+1} \sim \dfrac{n^p}{n^2} = \dfrac{1}{n^{2-p}}$, па ред апсолутно конвергира за $2-p>1$, односно за $p<1$. За $2-p \leqslant 0$, односно за $p \geqslant 2$ је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ па ред дивергира по тесту дивергенције. За $0<2-p\leqslant 1$, односно за $p\in[1,2)$ имамо да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и остаје да испитамо моностоност. Посматрамо функцију $f(x) = \dfrac{x^p}{x^2+1}$, за $x \geqslant 1$. Први извод је $f'(x) = \dfrac{(p-2)x^{p+1}+px^{p-1}}{(x^2+1)^2}$, па како је $p-2<0$ то је онда и $f'(x)<0$ за довољно велико x, а самим тим и функција опадајућа. Из свега следи да је низ a_n опадајући и тежи ка нули, па по Лајбницу конвергира. Како за $p\in[1,2)$ ред апсолутно дивергира, а обично конвергира закључујемо да конвергира условно.

Задатак 2.7. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{n}\right)^{pn} \frac{(n!)^p}{n^{3+q}},$$

у зависности од $p,q\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|(-1)^n a_n| &= \left(\frac{3}{n}\right)^{pn} \frac{(n!)^p}{n^{3+q}} \sim \left(\frac{3}{n}\right)^{pn} \frac{\left(n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}\right)^p}{n^{3+q}} = \frac{3^{pn}e^{-pn}\left(\sqrt{2n\pi}\right)^p}{n^{3+q}}\\ &= \left(\frac{3}{e}\right)^{pn} \frac{\left(\sqrt{2n\pi}\right)^p}{n^{3+q}}.\end{aligned}$$

Одатле је

$$\sqrt[n]{a_n} \sim \left(\frac{3}{e}\right)^p \sqrt[n]{\frac{\left(\sqrt{2n\pi}\right)^p}{n^{3+q}}} \sim \left(\frac{3}{e}\right)^p,$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{3}{e}\right)^p$. За $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{3}{e}\right)^p < 1$, односно за $p<0$ $\left(\text{јер је } \dfrac{3}{e}>1\right)$ ред апсолутно конвергира по Кошијевом критеријуму и то за свако $q\in\mathbb{R}$, а за $p>0$ ред дивергира јер општи члан не тежи ка нули. За $p=0$ добијамо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{3+q}}$ за који се лако утврђује да апсолутно конвергира за $q>-2$, дивергира за $q\leqslant -3$, а условно конвергира за $q\in(-3,-2]$.

Задатак 2.8. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^p}\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{4n}}\binom{4n}{2n}\right)^{qn},$$

у зависности од $p,q\in\mathbb{R}$.

Одредимо прво асимптотско понашање низа $\binom{4n}{2n}$ (приметимо да су $4n$ и $2n$ природни бројеви па важи позната формула за биномни коефицијент $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, за $n > m$).

$$\binom{4n}{2n} = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!} = \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \sim \frac{(4n)^{4n}e^{-4n}\sqrt{8\pi n}}{\left((2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}\right)^2} = \frac{4^{4n}\sqrt{8\pi n}}{2^{4n}\cdot 4\pi n} = \frac{2^{4n}\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi n}}.$$

Одатле је

$$|(-1)^n a_n| = \frac{1}{n^p}\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{4n}}\binom{4n}{2n}\right)^{qn} \sim \frac{1}{n^p}\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{4n}}\frac{2^{4n}\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi n}}\right)^{qn} = \frac{1}{n^p}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{qn},$$

па је

$$\sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^q \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^q.$$

Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^q$, па ред апсолутно конвергира по Кошијевом критеријуму за $q > 0$ $\left(\text{јер је тада } \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^q < 1\right)$ и за свако $p \in \mathbb{R}$, дивергира за $q < 0$ јер тада општи члан не тежи нули, а за $q = 0$ је неудлучно. За $q = 0$ добијамо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ који апсолутно конвергира за $p > 1$, дивергира за $p < 0$, а условно конвергира за $p \in (0, 1]$.

Задатак 2.9. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{n^p},$$

у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Лако се добија да је

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

па је

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{n^p} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{n^p}.$$

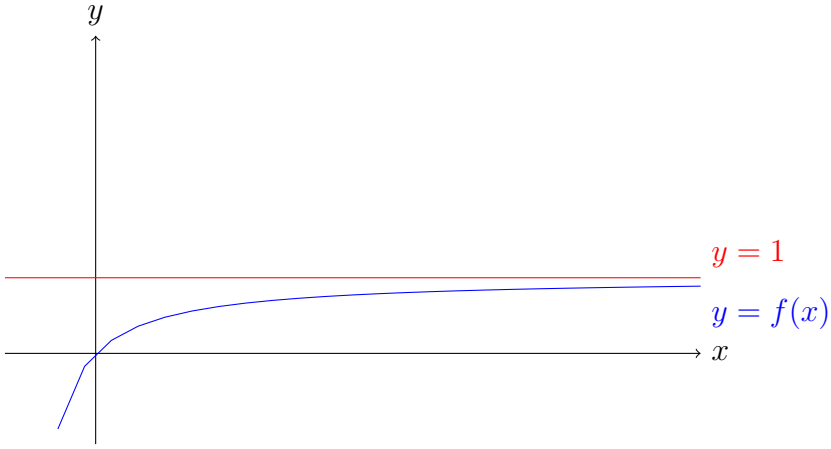
Одатле је

$$|(-1)^n a_n| = a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{n^p} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}},$$

па ред апсолутно конвергира за $p+\frac{1}{2}>1$, односно за $p>\frac{1}{2}$. За $p\leqslant -\frac{1}{2}$ општи члан не тежи нули па ред дивергира. Остаје да се види шта се дешава за $p\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Знамо да је тада сигурно $0<p+\frac{1}{2}\leqslant 1$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Остаје да покажемо да је низ a_n монотоно опадајући. Како је $a_n=\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{n^p}$, то није баш лако испитивати одговарајућу му функцију $f(x)$ због биномног коефицијента који би нам правио проблем. Остаје нам да покушамо неки други начин, на пример посматрајмо количник

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{1}{(n+1)^p}\frac{n^p(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\\&=\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p.\end{aligned}$$

Застанимо на овом месту и приметимо да су обе заграде очигледно мање од 1, па би неко могао помислити да је онда и производ мањи од 1, што би довело до тога да посматрани низ јесте опадајући. То би све било тачно да је друга заграда степенована бројем који је увек позитиван (или нула). У нашем случају дати број p може бити позитиван, а може бити и негативан, па ако је негативан онда нам је десна заграда ВЕЋА од 1, а вредност израза ab, где је $a<1$, а $b>1$ може бити и већа и мања од 1. Нпр. ако је $a=\frac{1}{100}$, а $b=2$, онда је $ab=\frac{1}{50}<1$, а ако је $a=\frac{1}{2}$, а $b=100$, онда је $ab=50>1$. Један од начина да докажемо да је овај низ опадајући за p из датог интервала је да искористимо следећу чињеницу која се лако може доказати, а интуитивно значење је приказано на слици испод: *Ако је $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функција таква да је $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ и ако је g монотоно растућа, тада је $g(x)<1$, за свако $x\in\mathbb{R}$.*



Искористимо ово посматрајући функцију $g(x)=\left(1-\frac{1}{2x+2}\right)\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^p$, која одговара датом количнику $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Лако се види да обе заграде теже ка 1, кад

x тежи ка $+\infty$, па је зато и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Остаје да покажемо да је g монотоно растућа функција, што ћем важити ако покажемо да је њен извод строго већи од нуле почевши од неког x. Заиста

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(1-\frac{1}{2x+2}\right)'\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^p + \left(1-\frac{1}{2x+2}\right)\left(\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^p\right)' \\
&= \frac{2}{(2x+2)^2}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^p + \left(1-\frac{1}{2x+2}\right)p\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{p-1}\frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{p-1}\left(\frac{2}{(2x+2)^2}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) + p\left(1-\frac{1}{2x+2}\right)\frac{1}{(x+1)^2}\right) \\
&= \left(\frac{x}{x+1}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{2(x+1)^2}\frac{x}{x+1} + p\frac{2x+1}{2(x+1)}\frac{1}{(x+1)^2}\right) \\
&= \left(\frac{x}{x+1}\right)^{p-1}\frac{1}{2(x+1)^3}\left(x+p(2x+1)\right) \\
&= \left(\frac{x}{x+1}\right)^{p-1}\frac{1}{2(x+1)^3}\left((2p+1)x+p\right) > 0.
\end{aligned}$$

почевши од неког x јер је $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{p-1}\frac{1}{2(x+1)^3} > 0$, а коефицијент $2p+1 > 0$ јер је $p > -\frac{1}{2}$. Дакле, доказали смо да је низ a_n опадајући, па из свега следи да дати низ условно конвергира по Лајбницу за $p \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Задатак 2.10. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^p}{3^n(2n+1)!((2n)!)^q},$$

у зависности од $p, q \in \mathbb{R}$.

Да би испитали апсолутну конвергенцију посматрајмо количник

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)^p}{3^{n+1}(2n+3)!((2n+2)!)^q}\frac{3^n(2n+1)!((2n)!)^q}{(n+1)^p} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^p\frac{1}{3(2n+3)(2n+2)\left((2n+2)(2n+1)\right)^q} \sim \frac{1}{3\cdot 4n^2\cdot(4n^2)^q} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{4^{1+q}}\frac{1}{n^{2+2q}}.
\end{aligned}$$

Ако је $2+2q > 0$, односно $q > -1$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, па ред конвергира по Даламберовом критеријуму. Ако је $q < -1$, онда је $\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, па ред дивергира по Даламберу, јер му општи члан тада не тежи нули. За $q = -1$ је $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{1}{3} < 1$, па ред конвергира апсолутно по Даламберу. Дакле, ред апсолутно конвергира за $q \geqslant -1$ и за свако $p \in \mathbb{R}$, а дивергира за $g < -1$ и за свако $p \in \mathbb{R}$.

Задатак 2.11. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1-p|^n}{(2n-1)(n^2+1)^q},$$

за $p, q \in \mathbb{R}$.

Апсолутна конвергенција:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|1-p|}{\sqrt[n]{(2n-1)}\ \sqrt[n]{(n^2+1)^q}} \to |1-p|,\ n \to \infty.$$

Одавде закључујемо да ако је $|1-p| < 1$ ред конвергира апсолутно по Кошију, ако је $|1-p| > 1$ ред дивергира по Кошију јер тада општи члан не тежи нули. За $|1-p| = 1$, односно $p = 0$ или $p = 2$ не можемо ништа да закључимо из Кошијевог критеријума. Враћамо те вредности у почетни ред и видимо шта добијамо.
$p = 0:$
Добијамо ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(n^2+1)^q}$ и у овом случају је ред за позитивним члановима па је апсолутна конвергенциј исто што и обична. Имамо да је

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(n^2+1)^q} \sim \frac{1}{2n^{2q+1}}, \tag{1.5}$$

па ред конвергира за $2q+1 > 1$, односно $q > 0$.
$p = 2:$
Добијамо ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(n^2+1)^q}$ који према (1.5) апсолутно конвергира за $q > 0$. Слично из (1.5) закључујемо да ако је $2q+1 \leq 0$, однсоно $q \leqslant -\dfrac{1}{2}$ ред дивергира јер општи члан не тежи нули. Остаје још случај $q \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right]$. Из (1.5) је јасно да тада општи члан тежи нули, па остаје да испитамо монотоност низа. Ако посматрамо функцију $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)(x^2+1)^q}$, имамо да је $f'(x) = -\dfrac{2(x^2(2q+1) - qx + 1)}{(2x-1)^2(x^2+1)^{1+q}} < 0$, почевши од неког $x > 1$, јер је за $x > 1$ именилац позитиван, а коефицијент уз водећи члан у бројиоцу је $-(2q+1) < 0$, за $q \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right]$. Одатле следи да је функција опадајућа, па је самим тим и низ $a_n = f(n)$ опадајући, што значи да ред условно конвергира по Лајбницу.

Задатак 2.12. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-p)^n \frac{(2n+3)^q}{(2n+1)},$$

у зависности од $p, q \in \mathbb{R}$.

Апсолутна конвергенција:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |p|\frac{\sqrt[n]{(2n+1)^q}}{\sqrt[n]{2n+1}} \to |p|,\ n \to \infty.$$

За $|p| < 1$ ред апсолутно конвергира по Кошију, за $|p| > 1$ ред дивергира по Кошију јер му општи члан не тежи нули, док за $|p| = 1$ испитујемо посебно.
$p = -1$:
Добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^q}{(2n+1)}$ који је са позитивним члановима.

$$a_n = \frac{(2n+3)^q}{(2n+1)} \sim \frac{2^q n^q}{2n} = \frac{2^{q-1}}{n^{1-q}}, \tag{1.6}$$

па ред конвергира за $1 - q > 1$, односно за $q < 0$.
$p = 1$:
Добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+3)^q}{(2n+1)}$ који према (1.6) апсолутно конвергира за $q < 0$, а за $q \leqslant 1$ општи члан не тежи нули па ред дивергира и апсолутно и обично. Остаје случај $q \in [0, 1)$. Јасно је из (1.6) да општи члан тежи нули, па остаје да испитамо монотоност низа a_n. Слично као у претходном задатку, узмемо функцију $f(x) = \frac{(2x+3)^q}{2x+1}$. Тада је $f'(x) = \frac{2(2x(q-1)+q-3)}{(2x+3)^{1-q}(2x+1)^2} < 0$, за довољно велико $x > 1$, јер је коефицијент уз водећи степен x у бројиоцу $q - 1 < 0$, а све остало је позитивно. Одатле је функција опадајућа, а самим тим и низ a_n. Дакле, ред конвергира условно по Лајбницу за $q \in [0, 1)$.

Задатак 2.13. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2^{pn}(2n^2+5n+3)^q},$$

у зависности од $p, q \in \mathbb{R}$.

Апсолутна конвергенција:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}\frac{1}{2^{pn}(2n^2+5n+3)^q} = \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n^2+5n+3)^q} \\ \sim& \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)2^{pn}(2n^2+5n+3)^q} = \frac{4^n}{2^{pn}\sqrt{\pi n}(2n^2+5n+3)^q}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

а одатле је

$$\sqrt[n]{a_n} \sim \frac{4}{2^p\ \sqrt[2n]{\pi n}\ \sqrt[n]{(2n^q+5n+3)^q}} \to \frac{4}{2^p},\ n \to \infty.$$

Ако је $\frac{4}{2^p} < 1$, тј. $4 < 2^p$, односно $p > 2$, ред конвергира апсолутно по Кошију. Ако је $p < 2$, ред дивергира, а ако је $p = 2$ испитујемо посебно.
$\underline{p = 2:}$
Из (1.7) је

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}(2n^2+5n+3)^q} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}2^q n^{\frac{1}{2}+2q}}, \tag{1.8}$$

одакле следи да тад ред апсолутно конвергира за $q > \frac{1}{4}$. За $q \leqslant -\frac{1}{4}$ ред дивергира јер општи члан не тежи нули. Остаје још да се испита случај $q \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Из (1.13) јасно је да a_n тежи нули. Остаје да проверимо монотоност низа a_n. Посматрајмо количник

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n^2+5n+3)^q}{4(n+1)^2(2n^2+9n+10)^q} = \frac{(2n+1)}{2(n+1)}\left(\frac{2n^2+5n+3}{2n^2+9n+10}\right)^q \\ &= \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{4n+7}{2n^2+9n+10}\right)^q \\ &= \left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)\left(1-\frac{4n+7}{2n^2+9n+10}\right)^q.\end{aligned}$$

На овом месту можемо да применимо ,,фору" из задатка 2.9 да би доказали да је низ опадајући, али тај начин зна да буде дост напоран за рачунање па ћемо применити следећу чињеницу:
Ако је $a_n > 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim 1 + \frac{p}{n}$ и $p < 0$, тада је $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ почевши од неког n, па је низ a_n опадајући, а ако је $p > 1$, тада је низ a_n растући.
У нашем случају је

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &\sim \left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)\left(1-\frac{4n+7}{2n^2+9n+10}\right)^q \sim \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{4qn}{2n^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{2q}{n}\right) = 1-\frac{1}{2n}-\frac{2q}{n}+\frac{q}{n^2} \sim 1+\frac{-\left(\frac{1}{2}+2q\right)}{n},\end{aligned}$$

а одатле следи да је низ a_n опадајући јер је $-\left(\frac{1}{2}+2q\right) < 0$, за $q \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Из свега наведеног закључујемо да ред условно конвергира по Лајбницу.

3 Степени редови

Дефиниција 3.1. Степени ред по степенима од x је ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1.9}$$

или, у општијем случају, по степенима од $x - x_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \quad (1.10)$$

где је a_n неки реални низ, а $x_0 \in \mathbb{R}$.

Како се сменом $t = x - x_0$ ред (1.10) своди на ред облика (1.9), то је довољно разматрати само степене редове облика (1.9).

Основно питање је проналажење оних $x \in \mathbb{R}$ за које ред (1.9) конвергира. Одговор на то питање добија се по следећем ,,рецепту":

1. Одредимо такозвани полупречник (радијус) конвергенције степеног реда R по једној од следеће две формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \text{ или } R = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. За $|x| < R$ ред је апсолутно конвергентан, а за $|x| > R$ ред дивергира.

3. За $x = R$ или $x = -R$ не знамо шта се дешава па те вредноти заменимо у ред и добијамо неки бројевни ред, па неким од већ рађених критеријума проверавамо да ли ред дивергира или конвергира апсолутно или условно у тим тачкама.

Напоменимо да ако је $R = 0$ тада ред (1.9) конвергира само за $x = 0$, а ако је $R = +\infty$ конвергира за све $x \in \mathbb{R}$. Такође, није лоше имати на уму да за испитивање конвергенције реда (1.9) у тачкама $x = -R$ и $x = R$ не треба користити ни Кошијев ни Даламберов критеријум јер ће у том случају одговарајући лимес бити 1 и нећемо имати одговор на питање о конвергенцији.

У задацима ће се јављати питања сумирања неког реда или развоја неке функције у степени (Маклоренов) ред. Ако за реалну функцију f важи

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ за } x \in (a,b),$$

тада кажемо да је функција f развијена у степени ред по степенима од x у интервалу (a,b). Због тога је потребно познавање развоја у степени ред следећих функција:

1. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, развој важи за $x \in \mathbb{R}$;

2. $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, развој важи за $x \in \mathbb{R}$;

3. $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, развој важи за $x \in \mathbb{R}$;

4. $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$, развој важи за $|x| < 1$ и свако $a \in \mathbb{R}$. За $x = -1$ или $x = 1$ развој важи за неке a, а за неке не важи (ово ћемо посебно испитивати у зависности од a);

5. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, развој важи за $-1 < x \leqslant 1$.

Ми ћемо најчешће користити геометријски ред, односно $\frac{1}{1-x} = (1+(-x))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, где развој важи за $|x| < 1$. У задацима са сумирањем степеног реда користићемо чињеницу да се он може диференцирати и интегалити члан по члан унутар свог радијуса конвергенције, односно да за $|x| < R$ важи:

1. $\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

2. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$

Тиме се полазни ред сведе на неки од горе наведених познатих, а затим се та функција интеграли или деференцира колико је пута потребно да би се добила тражена сума реда. Све ово биће приказано кроз задатке.

3.1 Решени задаци

Задатак 3.1. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} x^n.$$

Прво тражимо радијус конвергенције. Имамо да је $a_n = \binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}$, одакле је

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(2n+1)}{3(3n+2)(3n+1)} = \frac{4}{27}.$$

Одавде закључујемо да ред апсолутно конвергира за $|x| < \frac{4}{27}$, а дивергира за $|x| > \frac{4}{27}$. Остаје да испитамо случајеве $x = -\frac{4}{27}$ и $x = \frac{4}{27}$. На овом месту није

лоше споменути да увек прво ваља испитати конвергенцију за онај $x = \pm R$ за који се заменом у степени ред добије ред са позитивним члановима. То је из разлога што ако тај ред апсолутно конвергира, онда ће конвергирати апсолутно и онај други јер ће бити исти по апсолутној вредности!

$\underline{x = \dfrac{4}{27}:}$

Добијамо ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{3n}{n}\left(\frac{4}{27}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!(2n)!}\left(\frac{4}{27}\right)^n$, па је

$$a_n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}\left(\frac{4}{27}\right)^n \sim \frac{(3n)^{3n}e^{-3n}\sqrt{6\pi n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}\frac{4^n}{27^n} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}},$$

одакле закључујемо да ред у том случају дивергира.

$\underline{x = -\dfrac{4}{27}:}$

Добијамо ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{3n}{n}\left(\frac{4}{27}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n)!}{n!(2n)!}\left(\frac{4}{27}\right)^n$. Из претходонг случаја видимо да дати ред апсолутно дивергира, али је $a_n \sim \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$, па је $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Остаје да проверимо монотоност. Лако се добије да је $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4}{27}\dfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{4}{27}\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \dfrac{18n^2+18n+4}{18n^2+27n+9} < 1$, па је низ a_n опадајући и ред конвергира условно према Лајбницовом критеријуму. Закључујемо да ред конвергира ако и само ако $x \in \left[-\dfrac{4}{27}, \dfrac{4}{27}\right)$.

Задатак 3.2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{x^n}{n+1}.$$

Одредимо прво низ a_n. У ту сврху срачунајмо $\binom{\frac{1}{3}}{n}$:

$$\binom{\frac{1}{3}}{n} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-4}{3}\right)}{n!}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n n!}.$$

Дакле, $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n(n+1)n!} = (-1)^{n-1}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n(n+1)!}$.

Одредимо радијус конвергенције R.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n(n+1)!}\frac{3^{n+1}(n+2)!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-4)\cdot(3n-1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+2)}{3n-1} = 1. \tag{1.11}$$

Дакле, степен ред апсолутно конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$. Остаје још случај $|x| = 1$.
$\underline{x = 1:}$
Добијамо ред $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n (n+1)!}$. Апсолутна конвергенција овог реда еквивалентна је конвергенцији реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n (n+1)!}$.
Из (1.11) имамо да је $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n-1}{3(n+2)}$, па по Рабеовом критеијуму имамо

$$\lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3n-1}{3n+6}\right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{7}{3n+6}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{3n+6} = \frac{7}{3} > 1,$$

одакле закључујемо да степени ред апсолутно конвергира за $x = 1$.
$\underline{x = -1:}$
Добијамо ред $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n (n+1)!}$. Како је апсолутна конвергенција овог реда еквивалентна апсолутној конвергенцији претходног реда, добијамо да и за $x = -1$ степени ред апсолутно конвергира. Можемо на крају споменути и да је интервал конвергенције степеног реда $I = [-1, 1]$.

Задатак 3.3. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln^p \left(\frac{n+1}{n-1}\right) x^{2n},$$

у завиности од $p \in \mathbb{R}$.

Пре свега, приметимо да је дати степени ред по парним степенима x^{2n}. Сменом $t = x^2$ добили би степени ред са степенима по t за који знамо да одредимо радијус конвергенције, означимо га са R_t. Одатле, радијус конвергенције степеног реда са степенима по x се добија једноставним коренованьем броја R_t. Дакле, $R_x = \sqrt{R_t}$. Сличан поступак се може применити на било који степени ред са степенима x^{kn}. Биће $R_x = \sqrt[k]{R_t}$, где је $t = x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Ми ћемо овај пуступак радити скраћено, без увођења додатних ознака и смена.

Напишимо општи члан мало другачије.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln^p \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{2^p}{(n-1)^p}. \tag{1.12}$$

Одатле је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{2^p}}{\sqrt[n]{\sqrt[3]{n}(n-1)^p}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt[3]{n}(n-1)^p}}{\sqrt[n]{2^p}} = 1$, па је према претходној причи $R = \sqrt{1} = 1$. Дакле, степени ред апсолутно конвергира за

$|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$. За $|x| = 1$ испитујемо посебно.
Напомена! Приметимо да је степени ред са парним степенима, па ће конвергенција у тачки $x = 1$ бити еквивалентна конвергенцији у тачки $x = -1$ (заправо биће исти редови).
$\underline{x = 1:}$ Добијамо ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln^p \left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ који је са позитивним члановима, и према (1.12) је $a_n \sim \frac{2^p}{\sqrt[3]{n}(n-1)^p} \sim \frac{2^p}{n^{p+\frac{1}{3}}}$, одакле видимо да ред конвергира ако и само ако је $p + \frac{1}{3} > 1$, односно $p > \frac{2}{3}$. Према претходно напомени, ред конвергира и за $x = -1$. Такође, ако је ред са позитивним члановима, тада је његова апсолутна конвергенција еквивалентна обичној, па можемо рећи и да степени ред апсолутно конвергира у тачкама $x = -1$ и $x = 1$.

Задатак 3.4. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^p}{2n+3} x^n,$$

у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Одредимо прво радијус конвергенције

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+3}{(2n+1)^p}} = 1.$$

Дакле, степени ред апсолутно конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.
$\underline{x = 1:}$
Добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^p}{2n+3}$, одакле је $a_n \sim \frac{(2n)^p}{2n} = \frac{2^{p-1}}{n^{1-p}}$, па ред конвергира ако и само ако је $1 - p > 1$, тј. $p < 0$.
$\underline{x = -1:}$
Добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^p}{2n+3}(-1)^n$, па из случаја за $x = 1$ добијамо да ред апсолутно конвергира за $p < 0$, дивергира за $1 - p \leqslant 0$, тј. $p \geqslant 1$ јер тада a_n не тежи нули. Остаје да се испита случај $p \in [0, 1)$. Како је $a_n \sim \frac{2^{p-1}}{n^{1-p}}$, а $1 - p > 0$ за p из датог интервала, закључујемо да је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Остаје да се покаже да је низ опадајући. У ту сврху посматрамо функцију $f(x) = \frac{(2x+1)^p}{2x+3}$, за $x \geqslant 1$. Њен извод је $f'(x) = \frac{(2x+1)^{p-1}}{(2x+3)^2}(4x(p-1) + 6p - 2) \leqslant 0$, за довољно велико x, јер је $(p-1) < 0$, па је израз у загради негативан, док је количник испред њега увек позитиван за $x \geqslant 1$. Одатле $f(x)$ опада, па и низ $a_n = f(n)$ опада. Дакле, закључујемо да ред условно конвергира по Лајбницу за $p \in [0, 1)$.

Задатак 3.5. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln^p \left(1+\frac{1}{n}\right) x^n,$$

у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Одредимо прво полупречник конвергенције. Како је $\ln^p \left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^p}$, то је

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 \ln^p \left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 \frac{1}{n^p}}} = 1.$$

Задатак 3.6. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^{n+p}} x^{2n},$$

у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Како је

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{(n+1)\sqrt[n]{(n+1)^p}} \sim \frac{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{n+1} = \frac{ne^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}}{n+1} \sim \frac{1}{e},$$

то је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = e,$$

па је полупречник конвергенције $R = \sqrt{e}$.

Дакле, степени ред апсолутно конвергира за $|x| < \sqrt{e}$, дивергира за $|x| > \sqrt{e}$, док за $x = \pm\sqrt{e}$ испитујемо засебно. Како је степени ред по парним степенима, довољно је испитати конвергенцију само у једној од те две тачке. Испитајмо нпр. за $x = \sqrt{e}$. Добијамо ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^{n+p}} e^n,$$

за чији општи члан важи

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!e^n}{(n+1)^{n+p}} \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, e^n}{(n+1)^{n+p}} = \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{(n+1)^p (n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{\sqrt{2\pi n}}{(n+1)^p} \sim e^{-1}\sqrt{2\pi}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

одакле следи да ред конвергира ако и само ако је $p > \frac{3}{2}$.

Задатак 3.7. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^q n^{pn}}{n!} x^{2n},$$

у зависности од $p, q \in \mathbb{R}$.

Како је

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{(n+1)^q} n^p} \sim \frac{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{n^p} = \frac{n e^{-1} \sqrt[2n]{2\pi n}}{n^p} \sim \frac{e^{-1} n}{n^p} = \frac{1}{e n^{p-1}},$$

то је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \begin{cases} 0 & \text{за } p-1>0 \iff p>1; \\ +\infty & \text{за } p-1<0 \iff p<1; \\ \frac{1}{e} & \text{за } p-1=0 \iff p=1. \end{cases},$$

па је

$$R = \begin{cases} 0 & \text{за } p-1>0 \iff p>1; \\ +\infty & \text{за } p-1<0 \iff p<1; \\ \sqrt{\frac{1}{e}} & \text{за } p-1=0 \iff p=1. \end{cases}$$

То значи да степени ред конвергира једино у тачки $x = 0$ ако је $p > 1$, а апсолутно конвергира за све $x \in \mathbb{R}$ ако је $p < 1$. Ако је $p = 1$, тада је $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$, па степени ред апсолутно конвергира за $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$, дивергира за $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$, док за $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ испитујемо посебно. Како је степени ред по парним степенима, довољно је испитати конвергенцију у једној од те две тачке. Испитајмо нпр. за $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Добијамо ред са позитивним члановима $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^q n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$. За његов општи члан важи

$$a_n = \frac{(n+1)^q n^n}{e^n n!} \sim \frac{n^q n^n}{e^n n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{n^q}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} n^{\frac{1}{2}-q}},$$

па ред конвергира ако и само ако је $q < -\frac{1}{2}$.

Задатак 3.8. Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} \left(\frac{(2n-1)!!}{n^2}\right)^p x^n,$$

у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Како је

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}\left(\frac{(2n-1)!!}{n^2}\right)^p \frac{(n+1)!}{(n+2)(n+3)}\left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)!!}\right)^p$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(n+3)}\left(\frac{(n+2)^2}{n^2(2n+1)}\right)^p \sim \frac{n}{(2n)^p} = \frac{1}{2^p n^{p-1}},$$

то је

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \begin{cases} 0 & \text{за } p-1>0 \iff p>1; \\ +\infty & \text{за } p-1<0 \iff p<1; \\ \frac{1}{2} & \text{за } p-1=0 \iff p=1. \end{cases}$$

То значи да степени ред конвергира једино у тачки $x=0$ ако је $p>1$, а апсолутно конвергира за све $x\in\mathbb{R}$ ако је $p<1$. Ако је $p=1$, тада је $R=\frac{1}{2}$, па степени ред апсолутно конвергира за $|x|<\frac{1}{2}$, дивергира за $|x|>\frac{1}{2}$, док за $x=\pm\frac{1}{2}$ испитујемо посебно.

$\underline{x=\frac{1}{2}:}$

Добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}\frac{(2n-1)!!}{n^2}\frac{1}{2^n}$, који је са позитивним члановима па је апсолутна конвергенција еквивалентна обичној. За његов општи члан важи

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \sim \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \tag{1.13}$$

па закључујемо да ред дивергира.

$\underline{x=-\frac{1}{2}:}$

Добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{n!}\frac{(2n-1)!!}{n^2}\frac{1}{2^n}$ који по претходном апсолутно дивергира, па испитујемо условну конвергенцију. Из (1.13) имамо да је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, док монотоност низа a_n проверавамо упоређивањем два узастопна члана

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)(2n+1)n^2}{2(n+1)^4} = \frac{2n^4+7n^3+3n^2}{2n^4+8n^3+12n^2+8n+2} < 1,$$

јер је јасно да је $2n^4+7n^3+3n^2 < 2n^4+8n^3+12n^2+8n+2$, па је низ a_n опадајући. Дакле, ред условно конвергира по Лајбницовом критеријуму.

Задатак 3.9. Наћи суму степених редова:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

1. У оваквим задацима циљ је неким трансформацијама дате суме (углавном изводом или интегралом) свести суму на неку познату (углавном на суму геометријског реда), а затим враћањем уназад добити суму одговарајућег реда. Знамо да се диференцирањем спушта степен полинома, а интеграцијом подиже. У овом примеру смета нам ово n у имениоцу да би имали суму геометријског реда. Да би смо се ослободили тог n диференцираћемо дату суму.

   Први начин: Нека је $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Тада је

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}.$$

   Ако уведемо смену $n-1=k$, имамо да је $k=0$ за $n=1$, па је

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ за } |x|<1,$$

   па је $S'(x) = \frac{1}{1-x}$. Да би одредили $S(x)$ потребна нам је интеграција. Дакле, $S(x) = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C$. Остаје још да одредимо константу C. Њу одређујемо убацивањем вредности $x=0$ у суму, а затим у функцију. Са једне стране је $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$, а са друге стране је $S(0) = -\ln(1-0) + C = \ln 1 + C = C$. Изједначавањем добијамао $C=0$, па је коначно

$$S(x) = -\ln(1-x).$$

   Напомена! Приметимо да смо код убацивања вредности $x=0$ закључили да је и вредност суме једанака нули. То је тачно због тога што је наша сума била по степенима x без константног тј. нултог члана (заправо $a_0=0$). Уколико сума иде од нуле, односно $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тада је вредност те суме у тачки $x=0$ заправо a_0.

   Други начин: Напишимо суму у мало другачијем облику

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-(-x))^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\ln(1-x),$$

   јер је $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$, где смо у претходној суми узели да је $t=-x$.

2. Нека је $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Слично као и у првој суми, желимо да се ослободимо овог n које множи x^n. Знамо да интеграцијом добијамо неки степен повећан

за један у имениоцу, али уколико би одмах интегралили дату суму не би добили ништа. Зато мало модификујмо суму како нам одговара. Одговарало би нам да је x на степен $n-1$, па је онда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Сада имамо степен у суми који нам одговара, али имамо и x које множи читаву суму, па ако би одмах интегралили морали би да радимо парцијалну интеграцију и само би се упетљали. Због тога означимо са $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Тада је $S(x) = xF(x)$, а $F(x)$ рачунамо

$$\begin{aligned}\int F(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n} + C = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1 - 1 + C = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 + C\\ &= \frac{1}{1-x} - 1 + C = \frac{x}{1-x} + C \text{ за } |x| < 1.\end{aligned}$$

Одатле $F(x)$ добијамо диференцирањем

$$F(x) = \left(\frac{x}{1-x} + C\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Коначно имамо

$$S(x) = xF(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

3. Нека је $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$. Тада је

$$S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = xF(x),$$

где је $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$. Имамо да је

$\int F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int n^2x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + C = \frac{x}{(1-x)^2} + C$ према делу 2, па је

$$F(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2} + C\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

одакле је коначно

$$S(x) = xF(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

4. Први Начин: Нека је $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$. Тада је

$$\int S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int n(n+1)x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}+C=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^n+C$$
$$=\frac{x^2}{(1-x)^2}+C, \text{ према делу 2.}$$

Одатле је

$$S(x)=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}+C)\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Други начин: Имамо да је

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n+\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{x(1+x)+x(1-x)}{(1-x)^3}=\frac{2x}{(1-x)^3} \text{ према деловима 2 и 3.}$$

5. Први начин: Нека је $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$. Тада је

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x^2}F(x),$$

где је $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Сменом $k=n+1$ добијамо

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k}+x-x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}-x$$
$$=-\ln(1-x)-x \text{ према делу 1.}$$

Даље је

$$S'(x)=\frac{1}{x^2}F(x)=-\frac{\ln(1-x)+x}{x^2},$$

одакле је

$$S(x)=\int -\frac{\ln(1-x)-x}{x^2}dx+C=\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+C.$$

Да би одредили константу C морамо да заменимо $x=0$ у ред и у функцију. Међутим, функција $S(x)$ није дефинисана у тачки $x=0$. У том случају ће

важити да је вредност степеног реда у $x = 0$ једнака лимесу функције $S(x)$ кад x тежи нули! Дакле, са једне стране је $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n(n+1)} = 0$, а са друге стране је $S(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + C\right) = -1 + C$. Одатле је $0 = -1 + C$, па је $C = 1$. Коначно

$$S(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + 1.$$

Други начин: Приметимо следеће

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\ln(1-x) - \frac{(-\ln(1-x) - x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + 1. \end{aligned}$$

Напомена! Приметимо да у претходним примерима нигде код логаритма нисмо стављали апсолутне заграде (јер смо их добили интеграцијом функције $\frac{1}{1-x}$). Разлог за то је што смо све радили унутар полупречника конвергенције датих редова, а који су сви једнаки 1, па је $1 - x > 0$ за $|x| < 1$.

Задатак 3.10. Наћи суму степеног реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} x^n.$$

Први начин: Раставимо израз $\frac{n+1}{n(n-1)}$ на парцијалне разломке, тј.

$$\frac{n+1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1}.$$

Лако се добије да је $A = -1$ $B = 2$, односно $\frac{n+1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1}$, па је

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1}\right) x^n = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x + x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x + 2x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \\ &= \ln(1-x) + x - 2x\ln(1-x) = (1-2x)\ln(1-x) + x. \end{aligned}$$

Други начин:

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} x^n = \frac{1}{x} F(x),$$

где је $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} x^n$. Тада је

$$\int F(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int \frac{n+1}{n-1} x^n dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n-1} + C = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + C$$
$$= x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} + C = -x^2 \ln(1-x) + C,$$

па је

$$F(x) = (-x^2 \ln(1-x) + C)' = \frac{x^2}{1-x} - 2x \ln(1-x).$$

Одатле је

$$S(x) = \int \frac{\frac{x^2}{1-x} - 2x\ln(1-x)}{x} dx = \int \frac{x}{1-x} dx - 2\int \ln(1-x)dx$$
$$= x + (1-2x)\ln(1-x) + C.$$

Коначно, константу C одређујемо из услова $S(0) = \sum_{n=2}^{\infty} 0 = 0$ и $S(0) = 0 + (1-0)\ln 1 + C = C$, па је $C = 0$.

Задатак 3.11. Наћи суму степених редова:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^{2n}$,
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)n!}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^{2n}$.

1. Нека је $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$. Ако уведемо смену $t = x^2$ добијамо степени ред $S_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$, па је $S(x) = S_1(x^2) = e^{x^2}$.

2. Нека је $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^{2n}$. Сменом $t = x^2$ добијамо $S_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} t^n$. Одатле је

$$\int S_1(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n+1}{n!} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} + C = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + C = te^t + C,$$

па је

$$S_1(t) = (te^t + C)' = te^t + t,$$

а одатле је

$$S(x) = x^2 e^{x^2} + x^2.$$

3. Нека је $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)n!}$. Увођењем смене $t = x^2$ добијамо $S_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)n!}$. Имамо да је

$$S_1(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)n!} = \frac{1}{t} F(t),$$

где је $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)n!}$. Даље је

$$F'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t,$$

па је

$$F(t) = \int e^t dt = e^t + C.$$

Са једне стране је $F(0) = 0$ (јер је $a_0 = 0$), а са друге стране је $F(0) = e^0 + C = 1 + C$. Из ова два услова следи да је $C = -1$, па је $F(t) = e^t - 1$. Одатле је $S_1(t) = \frac{e^t - 1}{t}$, па је

$$S(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

4. Нека је $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n$. Тада је

$$\int S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{n!} x^{n+1} + C = F(x) + C,$$

где је $F(x) = \frac{(n+2)}{n!} x^{n+1}$. Даље је

$$\int F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + D = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + D = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 1 - 1 \right) + D$$
$$= x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x \right) + D = x^2 \left(e^x - 1 \right) + D.$$

Одатле је
$$F(x) = (x^2(e^x - 1) + D)' = x^2e^x + 2xe^x - 2x,$$
па је коначно
$$S(x) = (x^2e^x + 2xe^x - 2x + C)' = x^2e^x + 4xe^x + 2e^x - 2.$$

5. Нека је $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^{2n}$. Тада је
$$S(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^{2n+2} = \frac{1}{x^2} F(x),$$
где је $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^{2n+2}$. Даље је
$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{(n+1)(2n)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 2x \cos x, \end{aligned}$$
па је
$$F(x) = \int 2x \cos x dx = 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$
Са једне стране је $F(0) = 0$, а са друге стране је $F(0) = 0 + 2 + C$, па је $C = -2$. Коначно
$$S(x) = \frac{2x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^2}.$$

Задатак 3.12. Наћи следеће суме:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)3^n}$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

1. Нека је $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Да би нашли суму треба приметити да је она заправо вредност неког степеног реда у тачки $x = \frac{2}{3}$. Заправо, посматрамо степени ред $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ и тада ће бити $S = S\left(\frac{2}{3}\right)$. Према делу 5. задатка 3.9. имамо да је $S(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + 1$, па је $S = S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3}} - \ln\left(1 - \frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 1$.

2. Слично као у претходном примеру посматрајмо степени ред $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

   Из дела 1. задатка 3.9. имамо да је $S(x) = -\ln(1-x)$, па је $S = S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

3. Посматрамо степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. Из дела 3. задатка 3.9. имамо да је $S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, па је $S = S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

Задатак 3.13. Наћи суму степеног реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{e^n n!} x^n.$$

Нека је $S(x) = \frac{(n+1)}{e^n n!} x^n$. Тада је

$$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{e^n n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{e}\right)^n = xe^{\frac{x}{e}} + C.$$

Одатле је

$$S(x) = (xe^{\frac{x}{e}} + C)' = e^{\frac{x}{e}} + \frac{xe^{\frac{x}{e}}}{e}.$$

Задатак 3.14. Функцију $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој добијеног реда. На основу добијеног развоја израчунати суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Идеја у овим задацима је да се дата функција диференцирањем или на неки други начин сведе на неки од познатих развоја (најчесчће геометријски). Први извод функције је

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ за } |x|^2 < 1,$$

а то је еквивалентно са тим да је $|x| < 1$.

Одатле је

$$f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C \text{ такође за } |x| < 1$$

јер диференцирање и интеграљење не мењају полупречник конвергенције.

Отаје још да одредимо константу C. То радимо на исти начин као и код сумирање редова. Са једне стране је $f(0) = \operatorname{arctg}(0) = 0$, а са друге је $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 + C = C$, па је $C = 0$. Дакле, развој функције у Маклоренов ред је

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

За сада знамо да развој важи за $|x| < 1$. Остаје још да проверимо у тачкама $x = \pm 1$. Довољно је проверити конвергенцију само у тачки $x = 1$ због фактора $2n$ који се јавља као степен. У тачки $x = 1$ добијамо ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ који конвергира по Лајбницовом критеријуму. Како је функција $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ непрекидна у тачки $x = 1$ (и у тачки $x = -1$), а ред конвергира у тим тачкама, закључујемо да ће развој да важи у тим тачкама. Дакле,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ за } x \in [-1, 1].$$

Остаје још да нађемо суму која се тражи. Међутим, то сада није тешко. Означимо са $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ и приметимо да је $S = f(1) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Напомена. Ако је $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ развој функције у Маклоренов ред и развој важи за $x \in (-R, R)$, онда је довољно да функција буде непрекидна са леве (десне) стране и да ред конвергира у тачки $x = R$ ($x = -R$) да би развој важио у тачки $x = R$ ($x = -R$).

Задатак 3.15. Функцију $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој добијеног реда. На основу добијеног развоја израчунати суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$.

Рачунамо први извод

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}} \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

одакле је исто као у претходном задатку $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ за $|x| < 1$. Односно $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C$. Са једне стране је $f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, а са

друге је $f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}0=0+C$, одакле је $C=-\frac{\pi}{4}$ и $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-\frac{\pi}{4}$, за $|x|<1$. Приметимо да ред конвергира у тачкама $x=\pm1$ (Лајбниц), али да полазна функција није дефинисана у тачки $x=-1$! Како је непрекидна у тачки $x=1$ закључујемо да развој важи за $x\in(-1,1]$. Да би нашли суму напишимо је као $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. Облик суме нас наводи да израчунамо вредност функције у тачки $x=\frac{1}{2}$. Имамо да је

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}+S\right),\end{aligned}$$

одакле је $S=2f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-1=2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\pi}{2}-1=-2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)-1+\frac{\pi}{2}$.

Задатак 3.16. Функцију $f(x)=x\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој добијеног реда. На основу добијеног развоја израчунати суму реда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}$.

Означимо са $g(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$. Тада је $f(x)=xg(x)$. Имамо да је $g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}=2x(1+x^4)^{-1}=2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{4n}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{4n+1}$ за $|x|<1$. Одатле је $g(x)=\int\left(2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{4n+2}\right)dx=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{4n+2}+C=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}+C$. Са једне стране је $g(0)=0+C$, а са друге је $g(0)=\operatorname{arctg}(0)=0$, па је $C=0$. Дакле,

$$f(x)=xg(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{2n+1}\ \text{за}\ |x|<1.$$

За $x=\pm1$ лако се покаже да ред конвергир по Лајбницу, а функција $f(x)$ је непрекидна у тим тачкама, па закључујемо да развој важи за $x\in[-1,1]$. Остаје да нађемо још суму. Имамо да је $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16^n(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}$. Дакле, рачунамо вредност функције у $x=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n+3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}=\frac{1}{8}S.$$

Одатле је $S=8f\left(\frac{1}{2}\right)=8\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)=4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$.

Задатак 3.17. Функцију $f(x) = x\arcsin(x)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој добијеног реда. На основу добијеног развоја израчунати суму реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

Означимо са $g(x) = \arcsin(x)$. Тада је

$$g'(x) = \frac{1}{1-x^2} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n},$$

за $|x| < 1$. Одатле је

$$g(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} \right) dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Лако се добије да је $C = 0$, па је коначно

$$f(x) = xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \text{ за } |x| < 1.$$

Проверимо да ли развој важи и за $x = \pm 1$. За $x = 1$ добијамо ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{2n+1}$$

који апсолутно конвергира јер је према Примеру 1.3

$$\left| \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{2n+1} \right| = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{1+\frac{1}{2}}}.$$

Потпуно исти аргумент важи и за $x = -1$, а функција $f(x)$ је непрекидна у обе тачке па закључујемо да развој важи за $x \in [-1, 1]$. Да би израчунали дату суму морамо другачије да запишемо дати развој. Како је $\displaystyle\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ за $n \geqslant 1$, а наш развој почиње од $n = 0$, онда морамо другачије да напишемо тај нулти члан. Међутим, по дефиницији је $\displaystyle\binom{\alpha}{0} = 1$ за свако $\alpha \in \mathbb{R}$. Због тога је

$$f(x) = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+2},$$

па је $f(1) = 1 + S$, одакле је $S = f(1) - 1 = \arcsin(1) - 1 = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Задатак 3.18. Функцију $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{4x}{x^2+4}\right)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој добијеног реда.

Рачунамо извод функције

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{x^2+4}\right)^2}}\left(\frac{4x}{x^2+4}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4-8x^2+16}{(x^2+4)^2}}}\frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{4(4-x^2)}{\sqrt{(x^2-4)^2}(x^2+4)}$$
$$=\frac{4(4-x^2)}{|x^2-4|\,(x^2+4)}=(*).$$

Застанимо овде на тренутак. Видимо да је израз $\dfrac{4-x^2}{|x^2-4|}=\pm 1$ у зависности од тога како се понаша апсолутна вредност. Важи да је

$$\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4 & \text{за } x^2-4\geqslant 0 \iff x^2\geqslant 4;\\ 4-x^2 & \text{за } x^2-4<0 \iff x^2<4.\end{cases}$$

Први начин да утврдимо шта ће бити апсолутна вредност је да се сетимо да је Маклоренов ред заправо развој функције у околини тачке $x=0$ и да приметимо да је услов $x^2<4$ ближи нули него $x^2\geqslant 4$, па узимамо да је апсолутна вредност заправо $4-x^2$ и да је $x^2<4$. Други начин да то видимо је тако што прво кренемо да развијамо $\dfrac{4}{x^2+4}=\dfrac{4}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}=\left(1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\right)^{-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\frac{x^{2n}}{4^n}\ldots$ и да видимо да тај развој важи за $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$, што је еквивалентно са $x^2<4$, па узимамо да је апсолутна вредност $4-x^2$. Вратимо се сада у $(*)$. Имамо да је

$$f'(x)=\frac{4}{4+x^2}=\frac{4}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}=\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\frac{x^{2n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n},$$

одакле је после интеграције

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}+C \text{ за } \left|\frac{x}{2}\right|<1, \text{ односно } |x|<2.$$

Лако се добија да је $C=0$, као и да дати ред конвергира по Лајбницу у тачкама $x=\pm 2$, а како је функција $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{4x}{4+x^2}\right)$ непрекидна у тим тачкама, то ће развој важити и у њима, односно развој функције важи за $x\in[-2,2]$.

Задатак 3.19. Функцију $f(x)=x\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој добијеног реда.

Означимо са $g(x)=\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$. Тада је $f(x)=xg(x)$ и довољно је одредити

развој за функцију $g(x)$

$$g'(x)=\frac{2+x}{2-x}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'=\frac{2+x}{2-x}\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{4}{4-x^2}=\frac{4}{4\left(1+\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\right)}$$
$$=\left(1+\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n},\ \text{за}\ \left|\frac{x}{2}\right|<1,\ \text{односно}\ |x|<2.$$

После интеграције добијамо

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}+C,$$

а лако се добије да је $C=0$. Како функција $g(x)$ није дефинисана у тачки $x=2$ (дељење нулом), а ни у тачки $x=-2$ (логаритам од нуле), закључујемо да развој важи за $x\in(-2,2)$. Коначно

$$f(x)=xg(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{4^n(2n+1)},\ \text{за}\ x\in(-2,2).$$

Задатак 3.20. Функцију $f(x)=x\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)+\ln(4+x^2)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој. Користећи добијени развој израчунати суму реда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n n(2n-1)}$.

Задатак 3.21. Функцију $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој. Користећи добијени развој израчунати суму реда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(2n-3)!!}{8^n n!}$.

Имамо да је

$$f(x)=\sqrt{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}+\frac{4}{\sqrt{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}}=2\left(\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n}\right)$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\binom{\frac{1}{2}}{n}+\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right)\frac{x^{2n}}{4^n},\ \text{за}\ |x|<2.$$

Развој ће да важи за $x \in (-2, 2)$, јер функција није дефинисана у тачкама $x = \pm 2$. Да би израчунали суму која се тражи видимо да развој треба написати у другачијем облилку, као и да сума треба да нам почиње за $n = 2$. Важи да је

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} \text{ за } n \geqslant 2$$
$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} \text{ за } n \geq 1,$$

као и

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} \overset{\text{деф}}{=} 1, \ \binom{\frac{1}{2}}{0} \overset{\text{деф}}{=} 1, \ \binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}, \ \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Одатле је

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\left(\binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{0} - \left(\binom{\frac{1}{2}}{1} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}\right)x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n} + \binom{-\frac{1}{2}}{n}\right)\frac{x^{2n}}{4^n}\right) \\
&= 4 + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\binom{\frac{1}{2}}{n} + \binom{-\frac{1}{2}}{n}\right)\frac{x^{2n}}{4^n} \\
&= 4 + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)\frac{x^{2n}}{4^n} \\
&= 4 + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{-(-1)^n(2n-3)!!}{(2n)!!} + \frac{(-1)^n(2n-1)(2n-3)!!}{(2n)!!}\right)\frac{x^{2n}}{4^n} \\
&= 4 + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n(2n-3)!!}{(2n)!!}(-1+2n-1)\frac{x^{2n}}{4^n} \\
&= 4 + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!(n-1)}{4^n(2n)!!}x^{2n} = 4 + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!(n-1)}{8^n n!}x^{2n},
\end{aligned}$$

јер је $(2n)!! = 2^n n!$. За $x = 1$ имамо $f(1) = 4 + 4S$, а са друге стране је $f(1) = \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$, одакле је $4 + 4S = \frac{7}{\sqrt{3}}$, односно $S = \frac{7}{4\sqrt{3}} - 1$.

Задатак 3.22. Функцију $f(x) = (x^3 + x)\operatorname{arctg}(x) - \ln(1 + x^2) - \frac{x^2}{2}$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој добијеног реда. На основу добијеног развоја израчунати суму реда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n^2 - 6n + 3)}{n(2n-1)(2n-3)}$.

Означимо са $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$ и $h(x) = \ln(1 + x^2)$. Из задатка 3.14 је $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ и развој важи за $x \in [-1, 1]$. Нађимо развој за $g(x)$. Имамо да је

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 2x\left(1+x^2\right)^{-1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}, \text{ за } |x| < 1.$$

Одатле је после интеграције $h(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2n+2} + C = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2} + C$. Лако се добије да је $C = 0$, као и да развој важи и за $x = \pm 1$ (Лајбницов критеријум + непрекидност функције). Дакле, $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2}$ и развој важи за $x \in [-1, 1]$. Како је $f(x) = (x^3 + x)g(x) - h(x) - \frac{x^2}{2}$, а развоји за $g(x)$ и $h(x)$ важе на истом интервалу $[-1, 1]$, закључујемо да ће и развој за $f(x)$ да важи на интервалу $[-1, 1]$. Заменом развоја за $g(x)$ и $h(x)$ добијамо

$$f(x) = (x^3 + x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2} - \frac{x^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n+4}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2} - \frac{x^2}{2}.$$

Ово није развој у Маклоренов ред! Не можемо оставити функцију као збир неких сума, него морамо спојити све у једну суму. Да би то урадили морамо довести све три суме на исти степен. Приметимо да прва сума иде по стпенима $4, 6, 8...$, док друге две иду по сетпенима $2, 4, 6....$ Издвојимо прво квадратни степен (односно чланове за $n = 0$) у друге две суме јер ће онда степени у све три суме бити исти. Добијамо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+4} + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2} - x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2} - \frac{x^2}{2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2} - \frac{x^2}{2}.$$

Сада све три суме имају исти степен, али су нам индекси сума различити, па их морамо довести на исти индекс. Можемо их довести на било који заједнички индекс, али је најбоље да погледамо суму реда која се тражи у поставци задатка. Њен индекс ће нам бити водиља и на тај индекс ћемо да намештамо суме. У првој суми уведимо смену $k = n+2$, а у друге две смену $k = n+1$. Одатле је $n = k-2$,

односно $n = k - 1$. Заменом добијамо

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-2}}{2(k-2)+1} x^{2(k-2)+4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2(k-1)+1} x^{2(k-1)+2} \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1+1} x^{2(k-1)+2} - \frac{x^2}{2} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-3} x^{2k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-(-1)^k}{2k-1} x^{2k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-(-1)^k}{k} x^{2k} - \frac{x^2}{2} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{k} \right) x^{2k} - \frac{x^2}{2} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{(2k-1)k - (2k-3)k + (2k-3)(2k-1)}{k(2k-1)(2k-3)} \right) x^{2k} - \frac{x^2}{2} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k^2 - 6k + 3)}{k(2k-1)(2k-3)} x^{2k} - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Одавде је јасно да је $f(1) = S - \frac{1}{2}$, а са друге стране је $f(1) = 2\operatorname{arctg}(1) - \ln(2) - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2}$, одакле је $S = \frac{\pi}{2} - \ln(2)$.