Писмени испит из Математике 3 12.7.2021.

1. [18 + 7] а) Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n((2n+1)!!)^p}{6^n \cdot n! \cdot (n+2)} x^n,$$
у зависности од параметра $p \in \mathbb{R}$;

б) Одредити суму реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

2. [20] Функцију $f(x) = \pi^2 - x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = f(x + 2\pi)$ развити у Фуријеов ред и одредити где важи развој. На основу добијеног развоја израчунати $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

3. [15] Израчунати
$$\iint_D \frac{x \sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\, dxdy,$$
где је D дато са
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2,\ x^2 + y^2 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2,\ y = -x,\ y = -\sqrt{3}x,\ x \geq 0.$$

4. [20] Израчунати запремину тела T које је одређено неједнакостима:
$$z \geqslant \sqrt{x^2+y^2-1} \text{ и } z \leqslant 3 - x^2 - y^2.$$

5. [20] Нека је $L(y) = x^2y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y$.

а) Показати да диференцијална једначина $L(y) = 0$ има једно решење у облику полинома, а затим је решити.

б) Решити диференцијалну једначину $L(y) = x^2(x+1)$.