Писмени испит из Математике 3 24.9.2021.

1. [15 + 8] а) Испитати апсолутну и условну конвергенцију степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^p x^n,$$

у зависности од параметра $p \in \mathbb{R}$;

б) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left|q+\frac{1}{n}\right|^n}$$

у зависности од параметра $q \in \mathbb{R}$.

2. [2 + 15] а) Одредити реалне константе A и B тако да важи:

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2};$$

б) Функцију $f(x) = x^2 \ln(x^2-3x+2)$ развити у Маклоренов ред и одредити где важи развој. На основу добијеног развоја израчунати суму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{6^{n+1}}\right)\frac{1}{n+1}.$$

3. [20] Израчунати

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

где је скуп D одређен условима:

$$x^2+y^2 \leqslant 2x+2y,\ y \leqslant \sqrt{3}x,\ x \geqslant 0.$$

4. [15] Израчунати запремину тела T које је ограничено површима:

$$z = x^2+y^2,\ \ z = 2x+2y.$$

5. [25] Нека је

$$L(y) = x^2y'' + (4x-2x^2)y' + (x^2-4x+2)y.$$

Показати да диференцијална једначина $L(y) = 0$ има два линеарно независна партикуларна решења облика $y_p = \dfrac{e^x}{x^a}$ па је на основу тога решити. Затим решити и диференцијалну једначину $L(y) = e^x$.