Први колоквијум из Математике 1 10.12.2011. Група А

1. Решити једначину $z^3 = \sqrt{3} - i$. 10
2. Решити матричну једначину $AXB^{-1} + 3B^{-1} = B^T$ за $A, B \in \mathcal{M}_3$. 10
3. Крамеровим правилом испитати за коју вредност $\beta \in \mathbb{R}$ систем има тривијално решење

$$\begin{aligned} x - y - (1-\beta)z &= 0 \\ (1-\beta)x + y + (1-\beta)z &= 0 \\ (1-\beta)x + 3y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

15

4. У зависности од $b \in \mathbb{R}$ дискутовати и решити систем

$$\begin{aligned} x + 3y + (b+4)z &= 8 \\ 2x - y - 3z &= -2 \\ 3x + 2y + z &= 2(b+3) \\ (b+3)x - 5y - 10z &= -12. \end{aligned}$$

25

5. Одредити граничну вредност низа $a_n = \dfrac{\sin(n^3 - n + 1)}{\sqrt{n+2}}$. 10
6. Одредити граничне вредности $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3 + 4x^2} - \sqrt{9x^2 + 2x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+9x^2)^{\frac{7}{3}} - 1}{e^{\cos 5x} - e}$.

15 15

Други колоквијум из Математике 1 21.01.2012.

1. Дате су тачке $A(1,1,2)$, $B(2,2,3)$, $C(1,2,3)$ и $D(4,5,1)$. Нека је права p одређена тачкама A и B, а права q одређена тачкама C и D.

   а) Испитати међусобни положај правих p и q.

   б) Одредити једначину равни која садржи тачку A и праву q.

   в) На правој p одредити тачку S тако да важи $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{DS} = 0$.

2. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.
3. Дата је функција $f(x) = 1 + \sqrt[3]{1-x}$. Одредити Маклоренов полином другог степена дате функције и за $|x| \le \frac{1}{2}$ проценити грешку апроксимације.
4. Користећи Лопиталово правило израчунати граничне вредности: а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{\ln(1+4x^2)}$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx)^{\cos x}$.

Писмени испит из Математике 1 21.02.2012.

1. У скупу комплексних бројева решити једначину $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{vmatrix} = -\sqrt{3} + i.$

2. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & a-1 \\ 2 & 3a+3 & 3a-3 \\ 3 & 4a+2 & 5a-2 \end{bmatrix}$.

   а) Израчунати $A + A^T$.
   б) Израчунати $\det(A)$. За коју вредност параметра a не постоји A^{-1}?
   в) За $a = 1$ одредити A^{-1}.
   г) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a.

3. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ дискутовати систем $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & ay & + & 4z & = & a \\ 7x & & & + & 5z & = & 1\,. \end{array} \right.$

4. а) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x^2} - \cos^7 3x}{\ln(1 + tg^2 x)}$ без употребе извода.

   б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x}{x^6}$ применом Лопиталовог правила.

5. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{1 + \ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$.

6. Одредити праву q која је симетрична правој $p: \left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 3 = 0 \\ x - 7y - z - 9 = 0 \end{array} \right.$ у односу на раван $\alpha: x + 2y - 4z + 3 = 0$.

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 — 01. 03. 2012.

12

1. У скупу комплексних бројева решити једначину $\begin{vmatrix} z+3 & 3 & 5 & 3 \\ z+2 & z+3 & 3 & 2 \\ 0 & z+2 & z+3 & 1 \\ 0 & 0 & z+2 & z+2 \end{vmatrix} = -1 - i\sqrt{3}.$

15

2. Применом Крамеровог правила у зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем

$$\begin{cases} ax+y+2z = 1 \\ (a+2)x+(a+2)y+(a+4)z = 0 \\ (a+3)x+(a+3)y+(a+6)z = 0 \end{cases}.$$

12

3. Применом Кронекер-Капелијеве теореме у зависности од реалног параметра a дискутовати систем $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ ax-y+3z = 3 \\ 3x+2az = 4 \\ x-2y+2z = 2 \end{cases}$.

11 10

4. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+x\operatorname{tg}x} - e^{\cos x}}{x^2}$ без употребе извода; израчунати $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ применом Лопиталовог правила.

30

5. Дата је функција $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$. Прво је детаљно испитати и скицирати график, потом апроксимирати Маклореновим полиномом трећег степена и показати да је за $0 \leqslant x \leqslant 10^{-1}$ грешка мања од $\frac{1}{4}\cdot 10^{-5}$.

6. Дате су праве $p: \frac{x-2}{\cos a} = \frac{y-3}{\sin a} = \frac{z-2}{0}$ и $q: \frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{0}$. Прво одредити за које вредности параметра a су праве p и q паралелне, а потом за $a = \frac{\pi}{4}$ одредити заједничку нормалу правих p и q.

Писмени испит из Математике 1 — 28.04.2012.

1. Наћи комплексан број z који задовољава услове $|z| = |z+1|$ и $z = i\bar{z}$. За такво z одредити $\sqrt[4]{z}$ и представити у комплексној равни.

2. Решити матричну једначину $AX^{-1}B - A^2 = AX^{-1}$ за дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Решити систем $\begin{matrix} x+y+z+at = 1 \\ x+y+az+t = -1 \\ x+ay+z+t = 0 \\ ax+y+z+t = 0 \end{matrix}$ у зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$.

4. Одредити праву q која је симетрична правој $p: \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-7y-z-9=0 \end{cases}$ у односу на раван $\alpha: x+y+z+5=0$.

5. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. Дату функцију апроксимирати Тејлоровим полиномом првог степена у околини тачке $x_0 = 2$ и за $|x-2| \leq \frac{1}{4}$ проценити грешку апроксимације.

6. Израчунати а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}\right)$ без употребе извода и б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ применом Лопиталовог правила.

Писмени испит из Математике 1 — 13. 6. 2012.

1. Решити једначину $(3+2i)z^4 - 3i + 2 = 0$ и представити решења у комплексној равни.

2. Применом Кронекер Капелијеве теореме дискутовати систем једначина $\begin{matrix} 2x+y+z = -1 \\ -x+(a-1)y+z = 1 \\ 2x+ay+z = -a \\ -2ax-ay-az = a^2 \end{matrix}$ у зависности од параметра a. У случају када је систем одређен решити га матричном методом.

3. Дате су праве $p: \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x-3y-z+5=0 \end{cases}$, $q: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{3}$ и тачка $A(4,1,2)$. Доказати да се праве секу, а затим наћи тачку симетричну тачки A у односу на раван одређену правама p и q.

4. Показати да је низ $a_n = \dfrac{\sin(n!)}{\sqrt[3]{n}}$ конвергентан.

5. Израчунати без примене Лопиталовог правила $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{x(\sqrt{3+x}-1)}$, а затим резултат проверити користећи Лопиталово правило.

6. Дата је функција $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

а) Испитати дату функцију и скицирати њен график.

б) Апроксимирати дату функцију Тејлоровим полиномом првог степена у околини тачке $x_0 = 4$ и за $|x-4| < \frac{1}{2}$ одредити грешку апроксимације.

Писмени испит из Математике 1 30. 8. 2012.

1. Одредити домен и локалне екстремуме функције $z = arctg\frac{y}{x} - y$.

2. Израчунати: а) $\int x\,tg^2 4x\,dx$, б) $\int \frac{e^{2x}+1}{2e^{3x}+e^{2x}+1}dx$, в) $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$.

3. Решити интеграл $\int_0^{+\infty} (x+1)\,e^{-\sqrt{x}}\,\sqrt[4]{x}\,dx$.

4. Израчунати површину тела насталог ротацијом дела криве $y = \sqrt[3]{x}$, за $\frac{1}{8} \le x \le \frac{8}{27}$ око Ox-осе.

5. Решити диференцијалну једначину $(xy' + y)(x + \sqrt{x^2+x-1})^2 + x^2y^2 = 0$.

6. Показати да диференцијална једначина $(y^2 + \sqrt{x^2+x})\,dx + (xy^2\sqrt{1-y^2} + 2xy\ln x)\,dy = 0$ има интеграциони фактор $\lambda = \lambda(x)$ и на основу тога је решити.

Писмени испит из Математике 1 5. 9. 2012.

1. Израчунати $\left(\frac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^6$.

2. Дате су праве $p: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-1}$, $q: \frac{x-6}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+3}{-2}$ и тачка $M(-1,4,3)$.
   (а) Написати једначину равни α која садржи тачку M и паралелна је правама p и q.
   (б) Написати једначину праве r која пролази кроз тачку M и сече праве p и q.

3. Решити систем једначина $\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + (m^2-1)y + (1-m)z &= -1 \\ 2x - (m+2)y + (m^2+2)z &= 4 \end{aligned}$ у зависности од параметра m.

4. Формално решити матричну једначину $A^{-1}XB + 5B = B^T$.

5. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^x}{x-3}$.

6. Израчунати лимес $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x)$.

7. (а)Функцију $g(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{lnx}{3}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $a = 1$ и за $\frac{9}{10} \leqslant x \leqslant \frac{11}{10}$ проценити грешку.
   (б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 1}(4g(x))^{\frac{1}{x-1}}$.

Писмени испит из Математике 1 20.10.2012.

1. Решити једначину $z^4 + \begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 2i & i+1 \\ 1-i & 1+i & -2i \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ и представити решења у комплексној равни.

2. Дате су праве $p: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$, $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ и тачка $A(4,1,2)$. Испитати међусобни положај правих p и q и наћи једначину праве r, која сече обе дате праве и садржи тачку A.

3. Применом Кронекер Капелијеве теореме дискутовати систем једначина $\begin{aligned} x + 2y + z &= -1 \\ (a-1)x + y + z &= 1 \\ ax + 2y + z &= -a \\ -ax - 2ay - az &= a^2 \end{aligned}$ у зависности од параметра a. У случају када је систем одређен решити га матричном методом.

4. Израчунати без примене Лопиталовог правила $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{\cos 2x} - \sqrt[5]{\cos 3x}}{\ln(1-\sin 4x^2)}$, а затим резултат проверити користећи Лопиталово правило.

5. Дата је функција $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. а)Испитати дату функцију и скицирати њен график. б) Апроксимирати дату функцију Тејлоровим полиномом првог степена у околини тачке $x_0 = \sqrt{3}$ и за $|x - \sqrt{3}| < \frac{1}{2}$ одредити грешку апроксимације.