

Први колоквијум из Математике 1, Б 23.11.2012.

1. Одредити комплексан број z за који важи $|z| = |z + 2|$ и $z = -i\bar{z}$ па затим наћи $\sqrt[4]{z}$.

2. Решити матричну једначину $XA - B = X$ ако је $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$ax + y + z = 1$$

3. Користећи Крамерову теорему дискутовати и решити систем једначина $x + y + az = 1$.

$$x + ay + z = 1$$

$$2x + ky + (k+1)z = 1$$

$$-x + 2y + 2z = 0$$

4. Користећи Кронекер-Капелијеву теорему дискутовати и решити систем једначина

$$4x + (k-4)y + 2kz = 1$$

$$kx + (k+12)y + (5k+27)z = -k$$

5. Наћи граничну вредност низа $a_n = \frac{\cos(2n-1)}{\sqrt{n^2+2}}$

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1, Б 19.1.2013.

1. Испитати функцију $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$ и нацртати њен график.

2. Функцију $y = \cos 4x$ апроксимирати Тејлоровим полиномом седмог степена у околини тачке $\pi/4$, па за $|x - \pi/4| \leq 0.1$ проценити грешку.

3. Написати једначину равни којој припада тачка $B(4,5,6)$, а која је нормална на праву $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

Наћи растојање тачке B од праве p .

4. Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos 5x} - \sqrt[7]{\cos 7x}}{\ln(1 + \sin x^2)}$, па резултат проверити применом Лопиталовог правила.

Писмени испит из математике 1, 7.2.2013.

1. Решити једначину $(2i-1)z^4 + 18i + 6 = 0$ и решења представити у комплексној равни.

2. Решити матричну једначину $ABX + 2X = C$ ако су дате матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \\ 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$(5a+2)x + (a^2+2)y + 3az = 0$$

3. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ дискутовати и решити систем

$$4x + ay + 2z = 1$$

$$(a+2)x + 2y + 2z = 0.$$

4. Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+4n+2} \right)^{2n+3}$.

5. Одредити граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} x} - e^{\cos x}}{x^2}$.

6. а) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \ln \left(\frac{2x-3}{x-1} \right)$. б) Одредити Маклоренов полином другог степена и за $x \in \left(-\frac{1}{10}, 0 \right)$ проценити грешку апроксимације.

Писмени испит из Математике 1, 21.2.2013.

1. Решити једначину $z^4 = \begin{vmatrix} 1+2i & 1 & i & -i \\ 1 & i & -i & 1+2i \\ 2i & i-1 & i & 1-i \\ 1+2i & -1 & i & 1 \end{vmatrix}$ и решења представити у комплексној равни.
2. У зависности од реалног параметра b дискутовати систем једначина
- $$\begin{cases} -x - by + 2z = b - 3 \\ x + y + z = 1 \\ bx + y + 3z = b + 1 \end{cases}$$
- У случају када $2x + (b+1)y + bz = 3$ има јединствено решење, решити систем матричном методом.
3. Дат је низ реалних бројева $a_n = \frac{n+2}{n!}$. Испитати монотоност и ограниченост датог низа. Да ли је низ конвергентан? Одговор образложити.
4. Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg} x - \sin 2x}{e^{2x^2} - \cos 3x}$.
5. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x}$.
6. Одредити Маклоренов полином другог степена функције $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ и за $x \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ проценити грешку апроксимације.
7. Дате су тачка $A(-2, 0, -2)$, права $p: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}$ и раван $\alpha: 3x + 6y + z + 1 = 0$. (а) Показати да се права p и раван α секу и одредити пресечну тачку S . (б) Одредити једначину равни β која садржи праву p и нормална је на раван α . (в) Одредити једначину равни γ која садржи тачку A и нормална је на праву p .

Писмени испит из Математике 1, 6.4.2013.

1. Израчунати $\sqrt[3]{(\frac{3}{1-i} - i + \frac{2}{i+1})^2}$.
2. Применом Кронекер-Капелијеве теореме дискутовати систем
- $$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ (a-1)x - y + z = 1 \\ ax + 2y + z = -a \\ -ax - 2ay - az = a^2 \end{cases}$$
- у зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$.
3. Решити матричну једначину $E + BX = (X^{-1}A)^{-1}$ за дате $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.
4. Израчунати граничне вредности $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3})$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x$.
5. (а) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. (б) Одредити Тејлоров полином другог степена дате функције у околини тачке $x_0 = -1$ и за $x \in (-\frac{4}{3}, -1)$ проценити грешку апроксимације.
6. Дате су тачке $A(-2, 0, -2)$, $B(1, 1, 0)$, $C(2, 1, 4)$ и $D(1, 2, 3)$. Одредити запремину тетраедра $ABCD$ и једначину праве којој припада висина из темена D .

Писмени испит из Математике 1, 12. јун 2013.

1. Дате су праве $a: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}$ и $b: \frac{x-5}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}$. Применом мешовитог производа доказати да су дате праве мимоилазне, а затим одредити њихову заједничку нормалу.
2. Испитати функцију $f(x) = 3x - 3 - \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^2$ и скицирати њен график.
3. У зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем
- $$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ (a^2 - 1)x + y + (1 - a)z = -1 \\ (a + 2)x - 2y - (a^2 + 2)z = -4 \end{cases}$$
4. Функцију $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$ апроксимирати Маклореновим полиномом другог степена и за $0 \leq x \leq 10^{-1}$ проценити грешку апроксимације.
5. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 3x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{e^{x^2} + \ln(x^2 + e^{-1})}$.

- Решити једначину $\frac{iz^3 - 3}{2z^3 + i} = -1$ и решења представити у комплексној равни.
- У зависности од реалног параметра m решити систем једначина

$$\begin{aligned} (5m + 2)x + (m^2 + 2)y + 3mz &= 0 \\ 4x + my + 2z &= m \\ (m + 2)x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
- Дата је функција $g(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
 - Одредити домен дате функције.
 - Дату функцију апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $x_0 = 4$ и за $|x - 4| < \frac{1}{10}$ оценити грешку апроксимације.
- Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x + \frac{1 + 2e^x}{1 - e^x}$.
- Израчунати граничне вредности:
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - \sin 2x}{e^{3x^2} - \cos 4x}$
- Дате су тачка $M(1, 1, 0)$, права $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{3}$ и равни $\alpha: ax + 2y - z = 0, a \in \mathbb{R}$.
 - Одредити једначину равни која садржи тачку M и праву p .
 - Одредити узајамни положај праве p и равни α у зависности од реалног параметра a .
 - За $a = 1$ одредити растојање тачке M од равни α .

Писмени испит из Математике 1

11. 9. 2013.

- Израчунати све вредности израза $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{1-i} - i - \frac{1}{i+1}\right)^2}$.
- У зависности од реалног параметра m дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ (m + 6)x + 2y + 3z &= 1 \\ x - y + 2z &= m - 1 \\ 2x + (m - 1)y + 4z &= m \end{aligned}$$
- Дате су матрице $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ и $D = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -3 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
 - Испитати за које вредности реалног параметра a матрица BD има инверзну.
 - За $a = 0$ решити матричну једначину $BDX = C$.
- Функцију $f(x) = (x^2 - 3x + 4)e^{-2x}$ апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $x_0 = 1$ и за $\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{11}{10}$ проценити грешку апроксимације.
- Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x \cdot \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$.
- Израчунати граничне вредности:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{\cos 3x} - \sqrt[3]{\cos 4x}}{\ln(\cos^2 2x)}$
- Дате су права $q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{3}$ и раван $\alpha: 3x + 2y - z = 0$.
 - Испитати узајамни положај праве q и равни α .
 - Одредити једначину праве p која је симетрична правој q у односу на раван α .

Писмени испит из Математике 1

25. 9. 2013.

- Решити једначину $\frac{z^3 - 1}{z^3 + 1} = -i$. Решења представити у алгебарском облику и у комплексној равни.
- У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{aligned} ax + (5a + 27)y + (a + 12)z &= -a \\ -x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x + (a + 1)y + az &= 1 \\ 4x + 2ay + (a - 4)z &= 1 \end{aligned}$$
- Решити матричну једначину $2XC + 3B = X$ за матрице $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Одредити граничну вредност низа $a_n = \frac{\sin(2n^2 + 1) + \cos(n^3)}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$.
- Дата је функција $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$.
 - Испитати ток и нацртати график функције.
 - Дату функцију апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $x_0 = 1$ и за $|x - 1| < \frac{1}{5}$ проценити грешку апроксимације.
- Израчунати граничне вредности:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - \sqrt[3]{\cos 2x}}{\ln^2(1 + 2x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{\ln x + 3}{\ln x + 2}} \right)^{3 \ln x}$
- Показати да су праве $p: \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ и $q: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-1}$ мимоилазне и одредити једначину њихове заједничке нормале.

- 10 1. Решити једначину $z^6 + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{10}$.
- 7+7 2. Дискутовати и решити систем једначина
 $(a-1)x + y - z - t = 0$
 $x + 3y + z + t = 0$
 $x + y + z + t = 0$
 $(a+1)x + y + z + (a^3 - a + 1)t = 0$
у зависности од
реалног параметра a .
- 10 3. Решити $AX^T - 2B = (3X + A)^T$ за дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.
- 20 4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2}}$.
- 10 5. Функцију $g(x) = e^{-2x} \cos 4x$ апроксимирати Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ и за $|x - \frac{\pi}{4}| < \frac{1}{10}$ проценити грешку апроксимације.
- 10+10 6. Израчунати граничне вредности: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos^5 x} - \sqrt[3]{\cos^7 x}}{e^{2x^2} + \ln(x^2 + e^{-1})}$ б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 9x^2} - \sqrt{4x^2 - 8x} \right)$.
- 8+8 7. Дата су тачка $M(-1, b, 1)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, права $q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{a}$, $a \in \mathbb{R}$ и раван $\alpha : 2x + 2y - z + 2 = 0$. а) За $b = 1$ одредити тачку N симетричну тачки M у односу на раван α . б) Одредити реалне параметре a и b тако да тачка M буде на растојању $\sqrt{2}$ од праве q и на растојању $\frac{1}{3}$ од равни α .