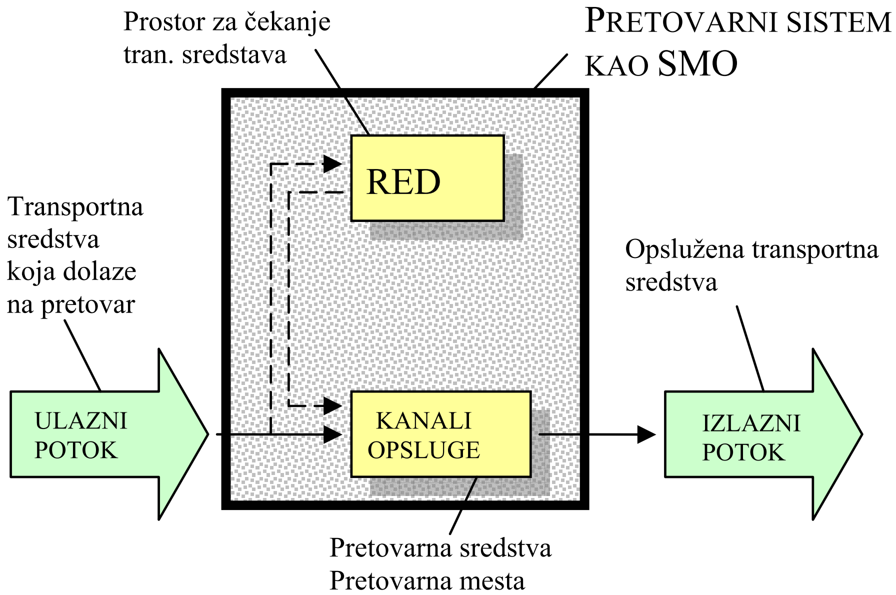
MODELI MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

- *Teorija redova, nagomilavanja, redova čekanja (Queueing theory*, a često queuing theory, odnosno waiting lines, congestion), ili kako se označava u ruskim izvorima (*Теория массового обслуживания*, Ivčenko i dr. 1982), ili u nekim od domaćih izvora (*Teorija masovnog opsluživanja,* Vukadinović 1988) predstavlja deo operacionih istraživanja koji se bavi istraživanjem veze zahteva za opslugom i karakteristika procesa opsluživanja, odnosno mogućnosti zadovoljenja tih zahteva.
- Ova teorija posmatra se i kao deo primenjene teorije verovatnoće čiji se početak vezuje za danskog inžinjera **Agner Krarup Erlanga** koji je 1909 publikovao prvi rad iz ove oblasti. Erlang je bio inžinjer zaposlen u telefonskoj centrali u Kopenhagenu, i primenom ove teorije rešavao je praktične zadatke koji su se odnosili na opslugu korisnika.
- Nakon pojave Erlangovog pionirskog rada, tokom jednog celog veka razvoja, napisan je zaista impozantan broj radova i knjiga iz ove oblasti (neke od najpoznatijih su Kleinrock 1975; Arnold, 1978; Nelson 1995, Gross, Harris, 1998...), a danas praktično da i ne postoji udžbenik operacionih istraživanja u kome ova teorija nije pomenuta (Hillier, Lieberman 1995; Taha 2003).
- Takodje, veliki broj knjiga iz ove oblasti postoji i na srpskom jeziku (napr. Petrić 1983; Vukadinović 1988).
- Isto tako, popularnost i široka mogućnost primene TMO uticala je i na pojavu specijalizovanih web stranica posvećenih ovoj oblasti (napr. Myron Hlynka's Queueing Theory Page: www2.uwindsor.ca/~hlynka/queue.html).

- Paralelno sa time, razvijen je i veliki broj softverskih paketa, dobrim delom i shareware, odnosno freeware softvera, kakav je **"QTSPlus1"**, koji se može besplatno naći na Internetu, a obuhvata veliki broj modela TMO, ili **RAQS**, takodje besplatan: bubba.acc.okstate.edu/cocim/raqs.html.
- Predmet TMO je određivanje funkcionalnih veza između pokazatelja efektivnosti funkcionisanja sistema masovnog opsluživanja (SMO) - verovatnoće opsluživanja zahteva (klijenata), verovatnoće stajanja kanala opsluživanja, dužine reda, vremena čekanja klijenata i dr., i karakteristika potoka zahteva za opsluživanjem, vremena opsluge zahteva, strategije opsluge itd.
- Kao cilj TMO često se navodi i nalaženje balansa izmedju investiranja u resurse i nivoa opsluge korisnika, što je, kako je to prikazano u nastavku, ideja na kojoj je zasnovano korišćene ove teorije u dimenzionisanju sistema rukovanja materijalom.
- U okviru sistema rukovanja materijalom brojni su primeri procesa koji se mogu predstaviti kao SMO, s obzirom da se većina procesa vezanih za tokove materijala može predstaviti kao sistem u kome "klijent" biva "opslužen" nekim "kanalom opsluge" - "serverom". Primena ove teorije bazira se na analogiji predstavljenoj na slici

[1] Ovaj Excelov paket obuhvata modele obradjene u knjizi (Gross, Harris, 1998)

Analogija pretovarnog sistema i SMO



❑ Pojmovi korišćeni u TMO, u slučaju pretovarnih sistema imaju sledeće značenje:

- ***kanali opsluge*** (sredstva - resursi koji realizuju zahtev: pretovarna mesta, viljuškari,...)
- ***opsluga*** (aktivnosti kojima se realizuje neki zahtev - istovar vozila viljuškarem, postavljanje vozila na front pretovara, uskladištenje jedinice u regalsku ćeliju,...)
- ***klijent*** (osoba, predmet, zahtev - vozilo, paleta,...)
- ***ulazni potok*** (zakon nailaska klijenata – broj paleta ili vozila u nekom vremenskom intervalu,...)
- ***izlazni potok*** (zakon po kome se vrši opsluga – broj paleta ili vozila u nekom vremenskom intervalu,...)
- ***red*** (klijenti koji čekaju na opslugu, vozila na parkingu, palete u pufernoj zoni,...)

- Posmatranje realnog sistema kao SMO, u skladu sa prikazanom analogijom i utvrdjivanje funkcionalnih veza, odnosno vrednosti odgovarajućih pokazatelja primenom TMO, pruža onda mogućnost za davanje odgovora na neka pitanja (Heragu, 1997):

  - Koliki je očekivani broj klijenata koji čekaju u redu?
  - Koliko je očekivano vreme koje klijent provodi u sistemu?
  - Kolika je verovatnoća da če klijent po dolasku u sistem zateći slobodan kanal opsluživanja?
  - Kolika je verovatnoća zauzetosti svih kanala opsluživanja?
  - i sl.

TMO – MOGUĆNOST PRAKTIČNE PRIMENE I OGRANIČENJA

- Primena TMO podrazumeva, prvo, analizu realnog sistema, potom njegovu simplifikaciju, obično apstrahovanjem manje važnih detalja i korišćenjem odgovarajućih aproksimacija, a potom, ali i tokom ovog procesa, raspoznaje se odgovarajući model TMO koji na najbolji način opisuje taj pojednostavljeni sistem.
- U većini slučajeva aproksimacije se koriste u procesu transformacije često nepotpunih ili neodredjenih podataka u matematički korektne veličine koje primenu modela čine mogućom.
- Shodno tome, i rezultate primene TMO na realnim sistemima, pa tako i na sistemima rukovanja materijalom, treba prihvatiti uslovno i tretirati kao približne ocene, odnosno indikatore ponašanja realnog sistema

- Kada se govori o dostignućima u razvoju TMO tokom gotovo jednog veka od uspostavljanja ove teorije, treba imati u vidu da se praktično svi postignuti rezultati odnose na stacionarni režim rada sistema
- Medjutim, ne retko, i u slučaju kada se radi o stacionarnim režimima, izrazi kojima se odredjuje neka od veličina mogu biti veoma su komplikovani za primenu, a da je, pri tome, sistem koji se posmatra već uprošćen do nivoa kada predstavlja samo grubu sliku realnosti.
- Najveći deo modela TMO, kod kojih postoje egzaktna rešenja, odnosi se na one sisteme kod kojih su potoci klijenata Puasonovski, a vreme opsluge podleže eksponencijalnoj raspodeli.
- Na sreću, veliki broj procesa u realnim sistemima ima ove karakteristike, pa tako na primer, dolazak vozila na utovar, odnosno istovar, u sistemima rukovanja materijalom najčešće i ima karakteristike Puasonovog potoka dogadjaja, odnosno karakteristike približne ovom.
- U principu, TMO se koristi za odredjivanje tačkastih ocena relevantnih karakteristika sistema kao što su na primer:
  - srednji broj klijenata u sistemu,
  - srednji broj klijenata u redu,
  - prosečno vreme opsluge klijenta,
  - prosečno vreme čekanja u redu i sl.

- Sa druge strane modeli TMO najčešće nisu pogodni za utvrdjivanje raspodela verovatnoća pojedinih veličina. U tu svrhu, mada odredjeni modeli TMO daju tu mogućnost, ipak je uputnije koristiti simulaciju.

Primena TMO u sistemima rukovanja materijalom

PROBLEM	KLIJENT	SERVER
Broj (kapacitet) sredstava za realizaciju zadatka	VoziLo, ili bilo koji drugi pretovarni zahtev	Viljuškar, konvejer, trakasti transporter, pret. mesto ...
Dužina akumulacionog konvejera, veličina pufera	jedinica tereta	Proces (operacija) koja izuzima jedinicu iz sistema

KONVENCIONALNA NOTACIJA U TMO

- Da bi se ukazalo na konkretan model uobičajeno se koristi Kendalova (Kendall, 1953), odnosno kako se u nekim izvorima navodi (Heragu, 1997), Kendal-Lijeva notacija, s obzirom da je Lee izvršio odredjene modifikacije u notaciji (Lee, 1966).
- Interesantno je pomenuti da je veliki engleski matematičar David G. Kendall, u radu koji je publikovao u časopisu Kraljevskog statističkog društva prvi upotrebio i termin "queueing system", još daleke 1951. godine (Kendall, 1951).
- Saglasno Kendalovoj notaciji za opis tipa modela SMO koristi se sledeća generalna forma: A/ B/ C/ D/ E/ F, pri čemu slovne oznake imaju sledeće značenje:

- A – *priroda ulaznog potoka (M-Puasonov, tj Markovski proces, D-konstantno vreme između klijenata, E_k-Erlangov reda k, H_k-Hiper eksponencijalna reda k, G-generalna (bilo koja) raspodela)*
- B – *karakter vremena opsluge (oznake kao i za prirodu ulaznog potoka)*
- C – *broj kanala opsluživanja S (S ≥ 1)*
- D – *disciplina opsluge (FCFS /First Come First Served/– prvi došao, prvi opslužen; LCFS /Last Come First Served/ – poslednji došao, prvi opslužen, SIRO /Service In Random Order/ – opsluga prema slučajnom redosledu,..., GD – generalna disciplina opsluge)*
- E – *kapacitet sistema C, koji obuhvata broj mesta u redu (C ≥ 1, S ≤ C)*
- F – *veličina populacije*

❑ Tako će, saglasno Kendalovoj notaciji, *SMO sa eksponcijalno rasporedjenim intervalima izmedju klijenata i eksponencijalnim vremenom opsluge, sa 2 kanala opsluživanja, kod koga se opsluga vrši po principu FCFS, bez ograničenja broja mesta u redu, sa neograničenom kapacitetom sistema i neograničenom veličinom populacije koja pristupa opsluzi*, imati oznaku

M / M / 2 / FCFS / ∞/ ∞

❑ U praktičnoj primeni, često se koriste modeli sa FCFS disciplinom opsluge, beskonačnim kapacitetom sistema i beskonačnom veličinom populacije, pa onda oznake D, E, F imaju fiksirane vrednosti. Otuda se često koristi skraćena notacija oblika A/ B/ C.

OSNOVNI MODELI TMO U ANALIZI SISTEMA RUKOVANJA MATERIJALOM

- U literaturi se može naći veliki broj modela TMO, ali su u principu analitička rešenja najčešće poznata samo za sisteme sa beskonačnom populacijom, kada su interval nailazaka klijenata, kao i vreme opsluge, nezavisno od discipline opsluge i kapaciteta sistema, eksponencijalno rasporedjeni. Pored ovih, tzv. osnovnih, ili eksponencijalnih modela, postoji niz rešenja za tzv. neeksponencijalne modele, ali samo za neke specijalne slučajeve kada su, neretko, poznate samo donja i gornja granica relevantih veličina čije se vrednosti utvrdjuju primenom TMO (od ovoga je izuzetak jedino **M / G / 1** model kod koga su izvedena analitička rešenja svih relevantnih veličina).
- Imajući to u vidu, shodno osnovnoj intenciji ove knjige, prezentirani su samo modeli koji podrazumevaju eksponencijalnu raspodelu intervala nailazaka klijenata i eksponencijalno vreme opsluge, za slučajeve koji se mogu smatrati tipičnim za sisteme rukovanja materijalom.
- Za slučajeve kada se ni intervali nailaska klijenata, niti vremena opsluge ne mogu aproksimirati eksponencijalnom raspodelom, u praktičnoj primeni za analizu sistema rukovanja materijalom preporučuje se korišćenje simulacije. Ipak, treba istaći da softverski alati iz oblasti TMO najčešće pružaju mogućnost utvrdjivanja relevantnih veličina i za slučaj neeksponencijalnih modela pa se oni mogu koristiti, ali veoma obazrivo, s obzirom na mogućnost pojave značajnijih greški.
- Primena modela TMO bazirana je na nekoliko osnovnih ulaznih veličina kojima se opisuju karakter ulaznog potoka klijenata, proces opsluge i resursi sistema opsluživanja,

tj. broj kanala opsluživanja i broj mesta u redu, odnosno kapacitet sistema. Dakle, kao ulazne veličine koriste se:

- S – *broj* kanala *opsluživanja (servera)*
- C – *broj mesta u redu*
- λ – *intenzitet ulaznog potoka [klijenata u jedinici vremena]*
- μ – *intenzitet opsluge (izlazni potok) [klijenata u jedinici vremena]*

❑ Primenom odgovarajućih relacija, u modelima TMO, utvrdjuju se sledeće osnovne izlazne veličine:

- $\rho = \dfrac{\lambda}{S \cdot \mu} \leq 1$ – iskorišćenje kanala opsluge (servera)
- P_0 – verovatnoća da u sistemu nema klijenata
- P_n – verovatnoća da se u sistemu nalazi n klijenata
- L – srednji broj klijenata u sistemu
- L_q – srednji broj klijenata u redu
- L_S – srednji broj klijenata na opsluzi
- W – srednje vreme boravka klijenta u sistemu [vremenskih jed.]
- W_q – srednje vreme boravka klijenta u redu [vremenskih jed.]
- W_S – srednje vreme boravka klijenta na opsluzi [vremenskih jed.]

EKSPONENCIJALNI MODELI TMO

- Na bazi rezultata TMO i korišćenjem Litlove formule dobijeni su izrazi za utvrdjivanje relevantnih veličina koje opisuju performanse SMO. U tabelama su prikazani su rezultati (Heragu, 1997), koji se odnose na četiri modela koji se mogu preporučiti kao najpogodniji za analizu performansi i dimenzionisanje sistema rukovanja materijalom.

Eksponencijalni modeli sa neograničenim kapacitetom sistema

VELIČINA KOJA SE UTVRDJUJE	TIP MODELA	
	M/M/1/GD/∝/∝	M/M/S/GD/∝/∝
P_0	$1-\rho$	$\dfrac{1}{\dfrac{(\rho S)^S}{S!(1-\rho)}+\sum_{n=0}^{S-1}\dfrac{(\rho S)^n}{n!}}$
c_n	ρ^n	$\begin{cases}\dfrac{1}{n!}\rho^n, \text{ za } 1\le n\le S\\ \dfrac{1}{S!S^{n-S}}\rho^n, \text{ za } n>S\end{cases}$
L	$\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$L_q+\dfrac{\lambda}{\mu}$
L_q	$L-\rho$	$\dfrac{(\rho S)^S P_0\rho}{S!(1-\rho)^2}$
W	$\dfrac{1}{\mu-\lambda}$	$W_q+\dfrac{1}{\mu}$
W_q	$\dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$	$\dfrac{L_q}{\lambda}$

Eksponencijalni modeli sa ograničenim kapacitetom sistema

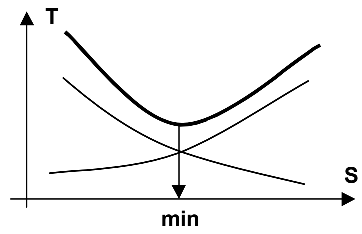
VELIČINA KOJA SE UTVRDJUJE	TIP MODELA M/M/1/GD/C/∞	TIP MODELA M/M/S/GD/C/∞
P_0	$\frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{C+1})}$	$\frac{1}{\sum_{n=1}^{S}\frac{(\rho S)^n}{n!}+\left(\frac{\rho^S}{S!}\right)\sum_{n=S+1}^{C}\rho^{n-S}}$
c_n	$\begin{cases}\rho^n, \text{za } 1\le n\le C\\ 0, \text{za } n>C\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{(\rho S)^n}{n!}, \text{za } 1\le n\le S\\ \frac{(\rho S)^n}{S!S^{n-S}}, \text{za } S<n\le C\\ 0, \text{za } n>C\end{cases}$
L	$\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(C+1)\rho^{C+1}}{1-\rho^{C+1}}$	$L_q+\frac{\lambda(1-P_C)}{\mu}$
L_q	$L+P_0-1$	$\frac{[(\rho S)^S P_0\rho][1-\rho^{C-S}-(C-S)(1-\rho)\rho^{C-S}]}{S!(1-\rho)^2}$
W	$\frac{L}{\lambda(1-P_C)}$	$\frac{L}{\lambda(1-P_C)}$
W_q	$\frac{L_q}{\lambda(1-P_C)}$	$\frac{L_q}{\lambda(1-P_C)}$

- Efektivni intenzitet ulaznog potoka klijenata λeff, u sistemima sa fiksnom dužinom reda može se odrediti na bazi:

$$\lambda_{eff}=\sum_{n=0}^{C-1}\lambda P_n=\lambda(1-P_C)$$

OKVIR ZA PRIMENU TMO U SISTEMIMA RUKOVANJA MATERIJALOM

- Primena TMO u pretovarnim, i uopšte u sistemima rukovanja materijalom najčešće se realizuje u dva osnovna pravca: analiza performansi sistema, optimalno dimenzionisanje sistema.
- Analiza performansi sistema može se opisati kao «direktna primena TMO», koja se odnosi na utvrdjivanje jedne ili više veličina prikazanih u tabelama, sa ciljem da se sagledaju neke od karakteristika sistema za definisanu strukturu i karakteristike elemenata sa jedne i parametara zahteva koji se realizuju sa druge strane
- Pored toga TMO se, ne retko, primenjuje i za optimalno dimenzionisanje elemenata pretovarnih sistema. Ova primena rezultat je postojanja funkcionalnih veza izmedju karakteristika zahteva za opslugom i resursa opsluživanja kao ulaznih veličina, i performansi sistema, kao izlaznih veličina primene modela TMO, koje opisuju ponašanje sistema u datim uslovima.
- Pristup dimenzionisanju resursa pretovarnog sistema, predstavljenog modelom SMO na bazi analogije sa slike, počiva najčešće na konceptu izbora optimalnog intenziteta opsluge μ, u osnovi zavisnog od broja i kapaciteta elemenata S, za poznati intenzitet ulaznog potoka λ, primenom troškovnog modela.



- U slučaju korišćenja troškovnog modela, definiše se odgovarajuća funkcija cilja koja obuhvata ukupne troškove sistema a optimalno rešenje podrazumeva nalaženje vrednosti μ^*, S^* i C^* koje minimiziraju ciljnu funkciju oblika:

$$T\ (\mu, \lambda, S, C) \rightarrow \min$$

- U suštini, proces nalaženja vrednosti μ^*, S^* i C^*, koje minimiziraju ciljnu funkciju, svodi se na sukcesivnu primenu modela odgovarajućeg modela TMO za različite vrednosti ulaznih veličina, i sračunavanjem vrednosti funkcije cilja u svakoj od iteracija.
- Funkcija ukupnih troškova $T\ (\mu, \lambda, S, C)$ utvrđuje se u zavisnosti od konkretnog problema, ali se po pravilu uzimaju u obzir troškovi povezani sa resursima SMO i radom, kao i oni povezani sa klijentima koji se opslužuju.
- Tako se, ***na primer***, pri opsluzi drumskih vozila viljuškarima može koristiti sledeća funkcija ukupnih troškova:

$$T(S) = (C_1 + C_2) \cdot S + L_q \cdot C_3 + L \cdot (W - IS) \cdot C_4$$

gde su:

- S – broj angažovanih viljuškara
- C_1 – troškovi pretovarnog mesta
- C_2 – troškovi viljuškara
- C_3 – troškovi jednog parking mesta
- C_4 – troškovi zadržavanja jednog vozila
- IS – interval strpljivosti vozila (period u kome se ne generišu troškovi zadržavanja vozila)

PRIMERI PRIMENE TMO U SISTEMIMA RUKOVANJA MATERIJALOM

Zadatak 1. Neka na front pretovara vozila dolaze po Puasonovom potuku intenzitetom λ=12 **[**vozila na čas] i neka je intenzitet opsluge koji se obezbedjuje jednim pretovarnim mestom, koga opslužuje jedan viljuškar, takodje Puasonov μ=2.5 **[**vozila na čas**].** Ukoliko je pretovarno mesto zauzeto vozila se upućuju na parking prostor za koji je predvidjen dovoljan prostor da se može smatrati neograničenim, pri čemu je gradnja i korišćenje parking mesta povezana sa odredjenim troškovima.

Primenom odgovarajućeg modela TMO potrebno je odrediti optimalni broj pretovarnih mesta, ukoliko je poznato da je period u kome se ne generišu troškovi čekanja vozila IS=30 minuta (interval strpljivosti vozila). Neka su poznati i sledeći troškovi rada sistema:

– troškovi pretovarnog mesta [novčanih jed./pret.mestu], C_1=50

– troškovi viljuškara [novčanih jed./viljuškaru], C_2=120

– troškovi parking mesta [novčanih jed./park.mestu], C_3=30

– troškovi zadržavanja vozila [novčanih jed./čas], C_4=250

Rešenje:

PRORAČUN OSNOVNIH PARAMETARA SISTEMA PRIMENOM TMO

Imajući u vidu da je potrebno odrediti broj pretovarnih mesta u sistemu kod koga su i dolazak vozila i opsluga Puasonovski procesi, gde se vozila, kada su sva mesta zauzeta upućuju na parking koji je praktično neograničenog kapaciteta, očigledno je da se ovaj sistem može opisati modelom M/M/S/GD/$\propto$/$\propto$.

Kako iskorišćenje kanala opsluge (servera) mora biti manje od 1, tj.

$$\rho = \frac{\lambda}{S \cdot \mu} \leq 1 \Rightarrow \quad S \geq \frac{\lambda}{\mu} = 4.8$$

očigledno je da ovaj pretovarni sistem mora imati više od četiri pretovarna mesta, tj. 5,6,7,...ili više.

Da bi se utvrdilo koji je optimalan broj pretovarnih mesta, primenom relacija koje važe za razmatrani model SMO potrebno je utvrditi one veličine čija je primena neophodna za proračun vrednosti funkcije cilja.

Ukoliko se za proračun koristi troškovna funkcija oblika

$$T(S) = (C_1 + C_2) \cdot S + L_q \cdot C_3 + L \cdot (W - IS) \cdot C_4$$

za svaki razmatrani broj pretovarnih mesta (servera), potrebno je odrediti samo tri veličine: srednji broj klijenata us sistemu (L), Srednji broj vozila u redu (Lq) i ukupno vreme boravka vozila u sistemu (W).
Primenom odgovarajućih relacija, odnosno nekog od softverskih alata za date ulazne veličine dobijaju se sledeće vrednosti posmatranih veličina. Kako se vidi iz tabele u nastavku, za svaku od varijanti, kao ilustracija, utvrdjivano je i iskorišćenje servera.
Performanse sistema utvrđene na bazi primene odgovarajućih relacija TMO prikazane su tabelom u nastavku

S=5		S=6		S=7		S=8		S=9	
ρ	96.00	ρ	80.00	ρ	68.57	ρ	60.00	ρ	53.33
L	26.44	L	6.87	L	5.41	L	5.01	L	4.87
Lq	21.64	Lq	2.07	Lq	0.61	Lq	0.21	Lq	0.07
W	2.20	W	0.57	W	0.45	W	0.42	W	0.41

PRORAČUN VREDNOSTI FUNKCIJE CILJA

Na bazi vrednosti prikazanih u tabeli i poznatih jediničnih troškova, moguće je utvrditi vrednosti definisane funkcije cilja za različit broj pretovarnih mesta.
Tako vrednost funkcije cilja za sistem sa 5 pretovarnih mesta T(5) ima sledeću vrednost:

$$T(5) = (50 + 120) \cdot 5 + 21.64 \cdot 30 + 26.44 \cdot (2.20 - 0.5) \cdot 250 = 12736.2$$

T(5)	12,736.2
T(6)	1202.3
T(7)	1208.3
T(8)	1366.3
T(9)	1532.1

Na ovaj način dobijaju se i ostale vrednosti funkcije cilja, prikazane u tabeli i na slici. Očigledno je da se najniži ukupni troškovi rada sistema mogu očekivati za slučaj kada se u sistemu nalazi šest pretovarnih mesta, što predstavlja optimalno rešenje za ovaj primer.