

1. Pločasti kondenzator površine ploča $S = 100 \text{ cm}^2$ i rastojanja između njih $d = 1 \text{ mm}$, sa dielektrikom relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 4$, priključen je na napon napajanja $U = 10 \text{ V}$. Odrediti:

- Kapacitivnost kondenzatora;
- Količinu naelektrisanja na pločama kondenzatora;
- Površinsku gustinu naelektrisanja na pločama kondenzatora;
- Intenzitet vektora električnog polja u dielektriku;
- Energiju elektrostatičkog polja između ploča kondenzatora;
- Silu kojom se privlače ploče.

Rešenje:

$$C = \epsilon \frac{S}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 353,68 \text{ pF}$$

$$Q = CU = 3,54 \text{ nC}$$

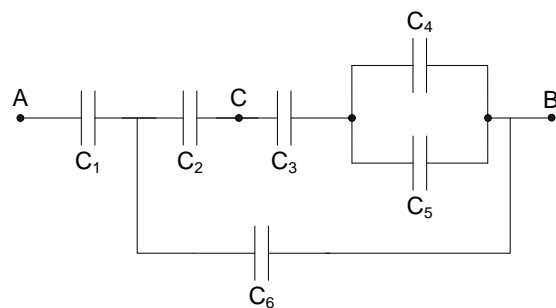
$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{3,54 \text{ nC}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 354 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2} = 0,354 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$K = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{U}{d} = 10 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 17,7 \text{ nJ}$$

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{KQ}{2} = 17,7 \mu\text{N}$$

2. Na Slici 2 je prikazana grupa od šest kondenzatora. Odrediti ekvivalentnu kapacitivnost između tačaka A-B, A-C i B-C. Poznato je: $C_1 = C_2 = C_5 = C = 10 \text{ nF}$, $C_3 = 3C/2 = 15 \text{ nF}$, $C_4 = 2C = 20 \text{ nF}$, $C_6 = 3C = 30 \text{ nF}$.

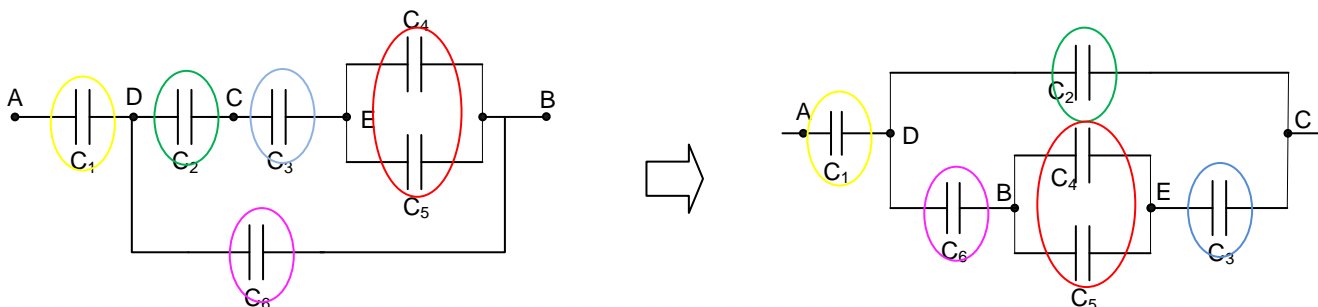


Slika 2

Ekvivalentna kapacitivnost između tačaka A i B predstavlja mešovitu vezu kondenzatora. Kondenzatori C_4 i C_5 vezani su paralelno, pa redno sa kondenzatorima C_2 i C_3 . Novonastala kapacitivnost vezana je paralelno sa kondenzatorom C_6 . Konačno, postoji redna veza sa kondenzatorom C_1 .

$$C_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_6 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4 + C_5}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{3C + \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{2}{3C} + \frac{1}{2C + C}}}} = \frac{7C}{9} = 7,77 \text{ nF}$$

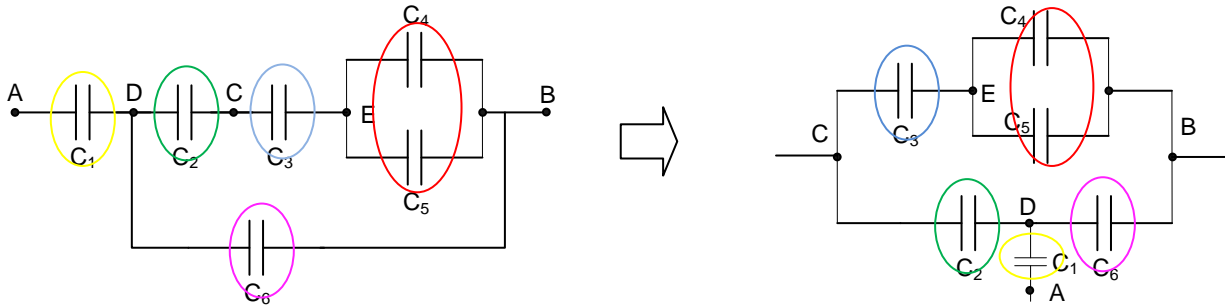
Da bi se odredila kapacitivnost između tačaka A i C potrebno je nacrtati "lepšu" sliku:



Ekvivalentna kapacitivnost između tačaka A i C predstavlja mešovitu vezu kondenzatora. Kondenzatori C_4 i C_5 vezani su paralelno, pa redno sa kondenzatorima C_6 i C_3 . Novonastala kapacitivnost vezana je paralelno sa kondenzatorom C_2 . Konačno, postoji redna veza sa kondenzatorom C_1 .

$$C_{AC} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + \frac{1}{\frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_4 + C_5} + \frac{1}{C_3}}}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + \frac{1}{\frac{1}{3C} + \frac{1}{2C + C} + \frac{2}{3C}}}} = \frac{7C}{11} = 6,36 \text{ nF}$$

Da bi se odredila kapacitivnost između tačaka B i C potrebno je nacrtati "lepšu" sliku:

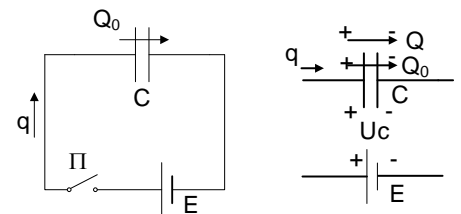


Ekvivalentna kapacitivnost između tačaka B i C predstavlja mešovitu vezu kondenzatora. Kondenzator C_1 ne učestvuje u vezi između kondenzatora B i C. Može se reći da on "visi". Kondenzatori C_4 i C_5 vezani su paralelno, pa redno sa kondenzatorom C_3 . Novonastala kapacitivnost vezana je paralelno sa rednom vezom kondenzatora C_2 i C_6 .

$$C_{BC} = \frac{1}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4 + C_5}} + \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_6}} = \frac{1}{\frac{2}{3C} + \frac{1}{2C + C}} + \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{3C}} = \frac{7C}{4} = 17,5 \text{ nF}.$$

3. Kondenzator kapacitivnosti $C = 5 \text{ nF}$ u kolu na Slici 3 opterećen je količinom naelektrisanja Q_0 u smeru koji je naznačen na slici. Odrediti količinu naelektrisanja q koja će proteći kroz granu sa naponskim izvorom elektromotorne sile $E = 15 \text{ V}$ po zatvaranju prekidača Π ako je:

- $Q_0 = 0$;
- $Q_0 = -5 \text{ nC}$;
- $Q_0 = 100 \text{ nC}$;
- $Q_0 = 75 \text{ nC}$.



Slika 3

Rešenje:



Kada je prekidač otvoren napon na kondenzatoru je $U_0 = Q_0/C$.

Kada se prekidač zatvori napon na kondenzatoru iznosi $U_1 = E$ jer je kondenzator direktno vezan na generator jednosmerne struje E . To znači da je naelektrisanje kondenzatora nakon zatvaranja prekidača $Q_1 = U_1 C = EC$. Do promene naelektrisanja dolazi zbog promene napona na kondenzatoru, odnosno nakon zatvaranja prekidača količina naelektrisanja q protokne kroz kolo i promeni naelektrisanje kondenzatora. Za refentne smerove kao na slici 3 važi:

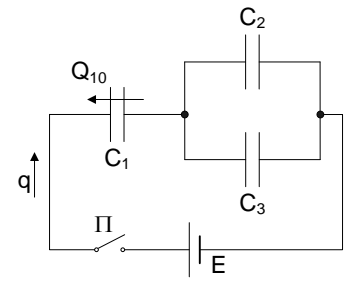
$$Q_1 = Q_0 + q \Rightarrow q = Q_1 - Q_0 = EC - Q_0$$

- $q = EC - Q_0 = 75 \text{ nC} - 0 = 75 \text{ nC}$
- $q = EC - Q_0 = 75 \text{ nC} - (-5 \text{ nC}) = 80 \text{ nC}$
- $q = EC - Q_0 = 75 \text{ nC} - 100 \text{ nC} = -25 \text{ nC}$
- $q = EC - Q_0 = 75 \text{ nC} - 75 \text{ nC} = 0 \text{ nC}$

Kada je $q > 0$ (slučajevi a i b) kondenzator se puni na račun energije iz generatora tj. kondenzator se ponaša kao potrošač. U situaciji kada je $q < 0$ (slučaj c) kondenzator se prazni i elektromotorna sila E se ponaša kao potrošač.

4. U kolu na Slici 4 poznate su kapacitivnosti kondenzatora $C_1 = 3C = 30\mu\text{F}$, $C_2 = 2C = 20\mu\text{F}$, $C_3 = C = 10\mu\text{F}$ kao i elektromotorna sila $E = 6\text{V}$. Odrediti količinu naelektrisanja q koja će proteći kroz granu sa naponskim izvorom, nakon zatvaranja prekidača Π . Odrediti napon, količinu naelektrisanja i elektrostatičku energiju svakog od kondenzatora po uspostavljanju stacionarnog stanja, ako su:

- kondenzatori C_1 , C_2 i C_3 neopterećeni;
- kondenzatori C_2 i C_3 neopterećeni, dok je kondenzator C_1 opterećen količinom naelektrisanja $Q_{10} = 40\mu\text{C}$ u smeru naznačenom na slici.

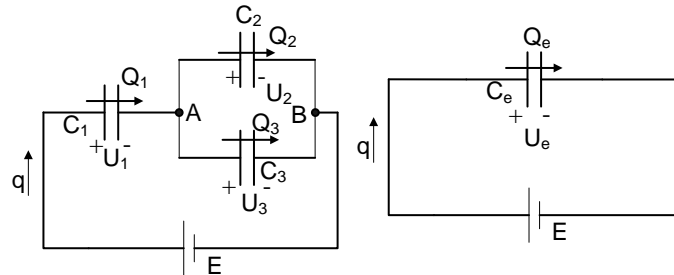


Slika 4

Rešenje:

a) Nakon zatvaranja prekidača Π doći će do procesa opterećivanja grupe kondenzatora. Protekla količina naelektrisanja kroz granu sa naponskim izvorom jednaka je količini naelektrisanja koja bi opteretila kondenzator čija je kapacitivnost ekvivalentna redno - paralelnoj vezi na slici. Ekvivalentna kapacitivnost je:

$$C_e = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{3C \cdot 3C}{6C} = \frac{2}{3}C = 15\mu\text{F}.$$



Protekla količina naelektrisanja q lako se nalazi iz izraza

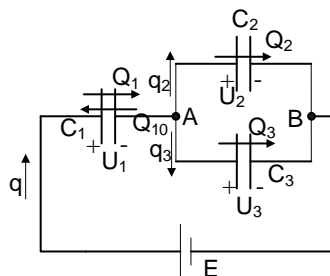
$$q = Q_e = C_e U_e = C_e E = \frac{2C}{3} E = 90\mu\text{C}.$$

Kako kroz kondenzator C_1 protiče komplementno naelektrisanje q , a pre zatvaranja prekidača kondenzatori su bili nenalektrisni važiće: $Q_1 = q = 90\mu\text{C}$, $U_1 = Q_1 / C_1 = 3\text{V}$. Ukupan napon elektomotorne sile E prema II KZ predstavlja zbir napona na kondenzatoru C_1 i napona na paralelnoj vezi kondenzatora C_2 i C_3 . To znači:

$U_1 + U_{23} = E \Rightarrow U_{23} = E - U_1 = 3\text{V}$. Kako su kondenzatori C_2 i C_3 vezani paralelno na njima se formira isti napon pa je $U_2 = U_3 = U_{23} = 3\text{V}$. Sada je moguće naći naelektrisanja kondenzatora C_2 i C_3 : $Q_2 = U_2 C_2 = 60\mu\text{C}$ i $Q_3 = U_3 C_3 = 30\mu\text{C}$. Obratiti pažnju da je zbir količina naelektrisanja na kondenzatorima C_2 i C_3 jednaka proteklom naelektrisanju q : $Q_2 + Q_3 = q$.

Elektrostatičke energije kondenzatora su: $W_1 = \frac{Q_1^2}{2C_1} = 135\mu\text{J}$, $W_2 = \frac{Q_2^2}{2C_2} = 90\mu\text{J}$ i $W_3 = \frac{Q_3^2}{2C_3} = 45\mu\text{J}$.

b) U slučaju kada postoji početno naelektrisanje na nekom kondenzatoru ne može se primeniti princip opisan u slučaju pod a).



Naponi i naelektrisanja na svim kondenzatorima su usaglašeni pa važi: $U_1 = \frac{Q_1}{C_1}, U_2 = \frac{Q_2}{C_2}, U_3 = \frac{Q_3}{C_3}$.

Kada se prekidač zatvori proteklo naelektrisanje q protiče kroz kondenzator C_1 , pa u skladu sa referentnim smerovima na slici važi: $Q_1 = -Q_{10} + q$.

Kada prođe kroz kondenzator C_1 naelektrisanje q dolazi do čvora A gde se račva na dva naelektrisanja q_2 i q_3 , slika . U skladu sa referentnim smerovima na slici važi: $Q_2 = q_2, Q_3 = q_3$.

Za čvor A važi I KZ: $q = q_2 + q_3$.

Neophodno pisati jednačine prema I i II KZ za naelektrisanja. Da bi jednačine mogle da se napišu neophodno je uvesti smerove početnih i krajnjih naelektrisanja na kondenzatorima kao i napona na svakom kondenzatoru, slika xxx. Kako postoji $n_C = 2$ čvora, a $n_G = 3$ grane u kolu imamo $n_G - n_C + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ jednačine po II KZ: $E - U_1 - U_2 = 0$ i $U_2 - U_3 = 0 \Rightarrow U_{23} = U_2 = U_3$.

Proteklo naelektrisanje moguće je odrediti na dva načina:

1) način: Ovaj način je uopšteniji i može se primenjivati i kada bi kondenzatori u paralelnoj vezi imali početna naelektrisanja. Kada se zamene izrazi u ove dve jednačine dobija se:

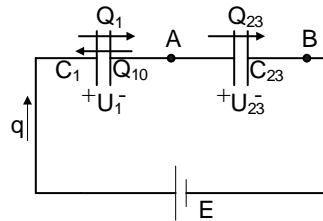
$$E - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0 \Rightarrow E - \frac{-Q_{10} + q}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = 0 \text{ i } \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} \Rightarrow \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3} \Rightarrow q_3 = \frac{C_3}{C_2} q_2$$

Daljim sređivanjem: $q_2 = q - q_3 = q - \frac{C_3}{C_2} q_2 \Rightarrow \left(1 + \frac{C_3}{C_2}\right) q_2 = q \Rightarrow q_2 = \frac{C_2 q}{C_2 + C_3}$. Kada se to vrati u prvu jednačinu:

$$E - \frac{-Q_{10} + q}{C_1} - \frac{\frac{C_2 q}{C_2 + C_3}}{C_2} = 0 \Rightarrow E + \frac{Q_{10}}{C_1} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2 + C_3}$$

$$q = \frac{E + \frac{Q_{10}}{C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}} = \frac{E + \frac{Q_{10}}{3C}}{\frac{1}{3C} + \frac{1}{2C + C}} = \frac{3CE + Q_{10}}{2} = 110 \mu\text{C}$$

2) način: Kako su kondenzatori C_2 i C_3 bez početnog naelektrisanja, mogu se vezati paralelno u kondenzator $C_{23} = C_2 + C_3 = 3C = 30 \mu\text{C}$, slika.



U skladu sa referentnim smerovima na slici važi: $Q_{23} = q = U_{23} C_{23}$. Zamenom u jednačinu $E - U_1 - U_2 = 0$ dobija se:

$$E - \frac{Q_{10} - q}{C_1} - \frac{q}{C_{23}} = 0 \Rightarrow q = \frac{C_{23}(EC_1 + Q_{10})}{C_1 + C_{23}} = 110 \mu\text{C}$$

Bez obzira na primenjeni način, sada se lako određuju naelektrisanja, naponi i energije kondenzatora:

$$Q_1 = -Q_{10} + q = -40 + 110 = 70 \mu\text{C}, U_1 = Q_1 / C_1 = 2,33 \text{V}, W_1 = \frac{Q_1^2}{2C_1} = 81,67 \mu\text{J}$$

$$U_2 = E - U_1 = 3,67 \text{V}, Q_2 = C_2 U_2 = 73,33 \mu\text{C}, W_2 = \frac{Q_2^2}{2C_2} = 134,44 \mu\text{J}$$

$$U_3 = E - U_1 = 3,67 \text{V}, Q_3 = C_3 U_3 = 36,67 \mu\text{C}, W_3 = \frac{Q_3^2}{2C_3} = 67,23 \mu\text{J}.$$