

Jednosmerne struje – 2 čas

Metoda konturnih struja
Metoda napona između čvorova

Metoda kontrunih struja

- U kolu koje ima $n_{\check{c}}$ čvorova i n_G grana postoji $n_G - n_{\check{c}} + 1$ konturnih struja.
- Opšti sistem jednačina po metodi konturnih struja, kada ima n konturnih struja je:

$$R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + \dots + R_{1n}I_n = E_I$$

$$R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + \dots + R_{2n}I_n = E_{II}$$

...

$$R_{n1}I_I + R_{n2}I_{II} + \dots + R_{nn}I_n = E_n$$

- R_{ii} predstavlja sopstvenu otpornost i -te konture.
- R_{ij} predstavlja zajedničku otpornost konture i i j .
- E_i predstavlja sumu EMS i -te konture, uzetih u smeru struje i -te konture.

- **Zadatak 1.** U kolu na slici, odrediti struje u svim granama i napon U_{BD} metodom Konturnih struja. Poznato je:

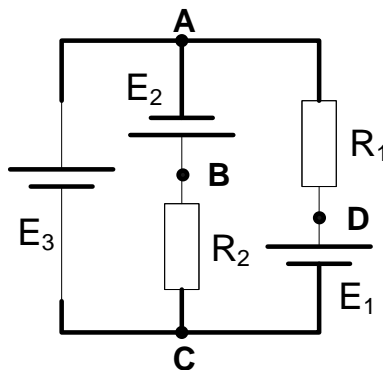
$$E_1 = 6 \text{ V}$$

$$E_2 = 2 \text{ V}$$

$$E_3 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \Omega$$

$$R_2 = 20 \Omega$$



- Broj konturnih struja jednak je broju jednačina po II KZ, dakle postoje $n_G - n_C + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ konturne struje, I_I i I_{II} . Opšti sistem jednačina po metodi konturnih struja, u slučaju dve konturne struje je:

$$R_{11}I_I + R_{12}I_{II} = E_I$$

$$R_{21}I_I + R_{22}I_{II} = E_{II}$$

- Gde R_{11} i R_{22} predstavljaju sopstvene otpornosti I i II konture, $R_{12}=R_{21}$ prestavlja zajedničku otpornost I i II konture. E_I i E_{II} predstavljaju sume elektromotornih sila I i II konture, uzetih u smeru struja I i II konture.

- Za uzete smerove konturnih struja na slici važi:

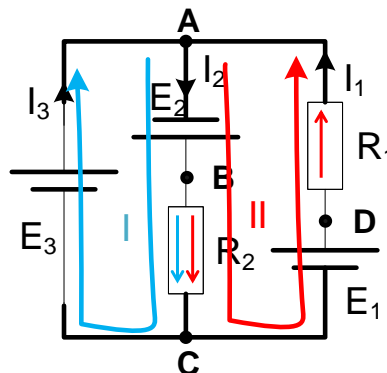
$$R_{11} = R_2 \quad E_I = E_3 + E_2$$

$$R_{22} = R_1 + R_2 \quad E_{II} = E_1 + E_2$$

$$R_{12} = R_{21} = R_2$$

$$R_2 I_I + R_2 I_{II} = E_3 + E_2$$

$$R_2 I_I + (R_1 + R_2) I_{II} = E_1 + E_2$$



$$20I_I + 20I_{II} = 12$$

$$20I_I + 30I_{II} = 8$$

 \Rightarrow

$$I_I = 1\text{ A}$$

$$I_{II} = -0,4\text{ A}$$

- Prema usvojenim smerovima struja na slici struje u granama su:

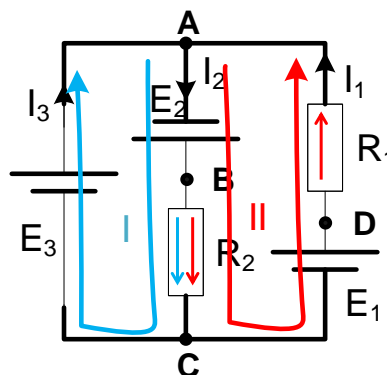
$$I_1 = I_{II} = -0,4\text{ A}$$

$$I_2 = I_I + I_{II} = 0,6\text{ A}$$

$$I_3 = I_I = 1\text{ A},$$

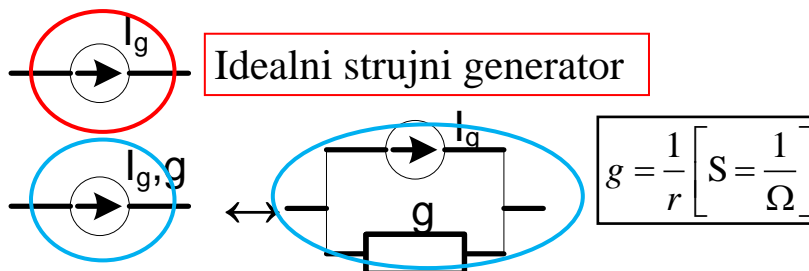
- Napon U_{BD} :

$$U_{BD} = -E_1 + R_2 I_2 = -6 + 20 \cdot 0,6 = 6\text{ V}$$



Idealni i realni strujni generator

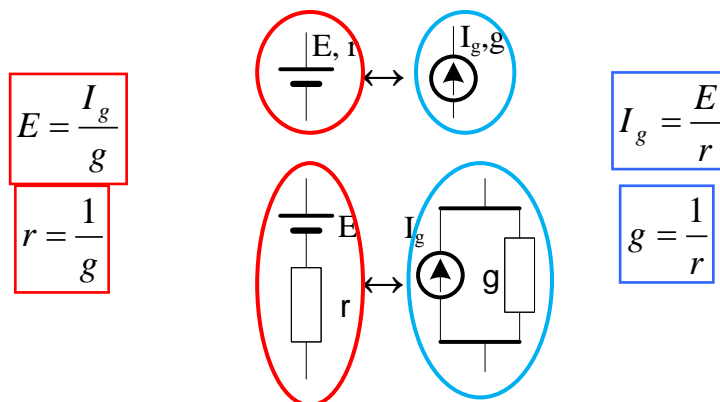
Idealni strujni generator je realni strujni generator kome je unutrašnja provodnost jednaka $g=1/r=0$, odnosno unutrašnja otpornost beskonačna, $r=+\infty$.



Realni strujni generator može se predstaviti kao idealni strujni generator za koji je paralelno vezana provodnost jednaka unutrašnjoj provodnosti g .

Veza između realnog naposnkog i strujnog generatora

Realni strujni generator može se transformisati u realni naponski generator, i obrnuto!

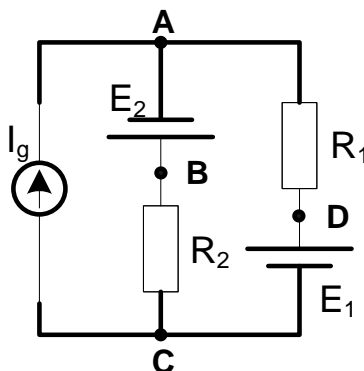


Više o tome kod Tevenenove i Nortonove teoreme!

- **Zadatak 2.** U kolu na slici, odrediti struje u svim granama i napon U_{BD} metodom Konturnih struja.

Poznato je:

$$\begin{aligned} E_1 &= 6\text{ V} \\ E_2 &= 2\text{ V} \\ I_g &= 1\text{ A} \\ R_1 &= 10\Omega \\ R_2 &= 20\Omega \end{aligned}$$

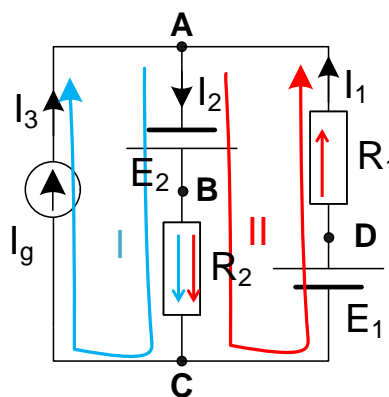


- Po metodi Konturnih struja broj konturnih struja je $n_G - n_C + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$, kao što je i označeno na slici. Opšte jednačine za 2 konturne struje su: $R_{11}I_I + R_{12}I_{II} = E_I$

- Međutim, kada u kolu postoji idealni strujni generator, jednačina za tu konturnu struju biće jednaka struji strujnog generatora, u slučaju na slici: $I_I = I_g = 1\text{ A}$

$$R_{22} = R_1 + R_2 \quad E_{II} = E_1 + E_2$$

$$R_{12} = R_{21} = R_2$$



- Sada je sistem jednačina:

$$I_I = I_g = 1\text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_I = 1\text{ A} \quad I_{II} = -0,4\text{ A}$$

$$R_2 I_I + (R_1 + R_2) I_{II} = E_1 + E_2$$

- Prema usvojenim smerovima struja na slici struje u granama su:

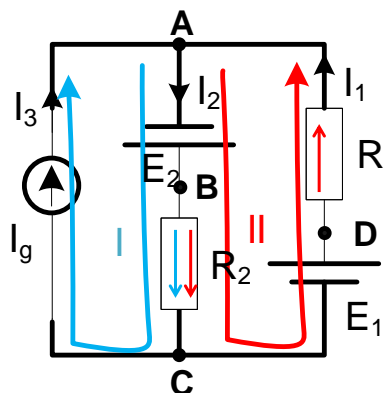
$$I_1 = I_{II} = -0,4\text{ A}$$

$$I_2 = I_I + I_{II} = 0,6\text{ A}$$

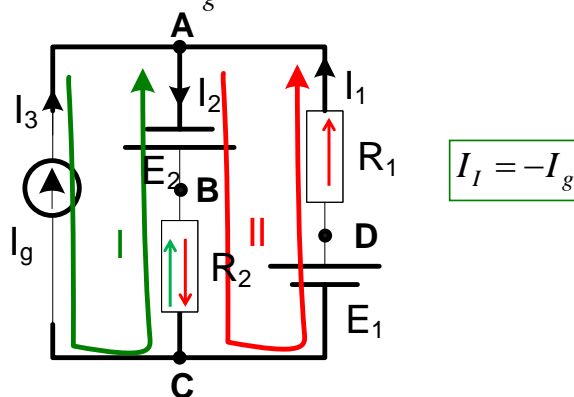
$$I_3 = I_I = 1\text{ A},$$

- Napon U_{BD} :

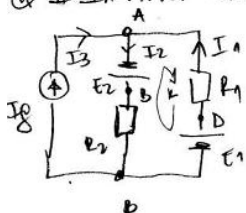
$$U_{BD} = -E_1 + R_2 I_2 = 6\text{ V}$$



- Samo jedna konturna struja sme da se provuče kroz granu sa idealnim strujnim generatorom!
- Ukoliko bi smer konturne struje I_I bio suprotan ona bi uzela vrednost $-I_g$!



⊕ ДОДАТАК: Кирхофови ЗАКОНИМА РЕШИТИ ПРЕТХОДНИ ЗАДАТАК!



$I_3 = I_g$ — НАСТАРОМ СТРУЈНИМ ГЕНЕРАТОР

Б' ГРАТЕ, 2 ПЕД. СРПУЈЕ! $\Rightarrow 2 \times 2$

ⓂⓀⓀⓀ $U_2 - 1 = 1$

ⓂⓀⓀⓀ $I_g + I_1 - I_2 = 0 \quad (1)$

ⓂⓀⓀⓀ $U_1 - U_2 + 1 - U_{I_g} = 1$

ⓂⓀⓀⓀ $R_2 I_2 - E_2 + R_1 I_1 - E_1 = 0 \quad (2)$

$$R_2 (I_g + I_1) - E_2 + R_1 I_1 - E_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 + E_2 - R_2 I_g}{R_1 + R_2} = -\frac{16}{15} \text{ A}$$

$$I_2 = I_1 + I_g = \frac{14}{15} \text{ A}$$

$$U_{BD} = \dots$$

- **Zadatak 3.** U kolu na slici, odrediti snagu strujnog generatora, P_{I_g} , snagu naponskog generatora P_{E_1} i snagu otpornika R_3 , P_{R_3} metodom Konturnih struja.

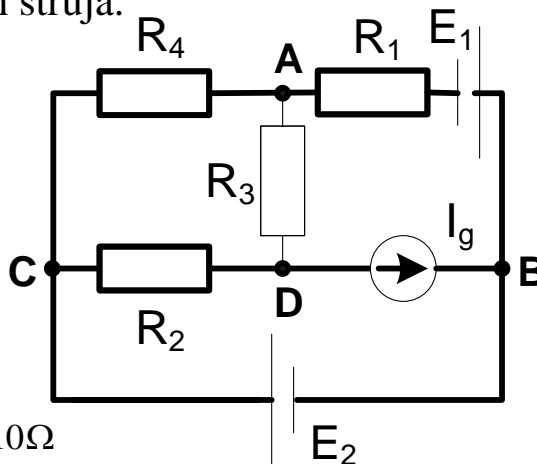
Poznato je:

$$I_g = 1 \text{ A}$$

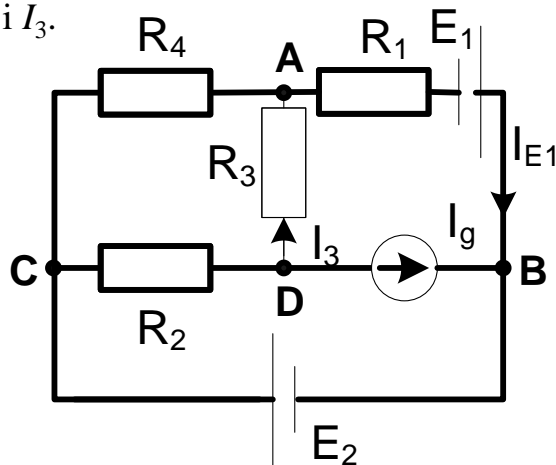
$$E_2 = 40 \text{ V}$$

$$E_1 = 60 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R = 10 \Omega$$



- Snaga strujnog generatora je: $P_g = I_g U_{I_g} = I_g U_{BD}$
- Snaga naponskog generatora E_1 je: $P_{E_1} = E_1 I_{E_1}$
- Snaga otpornika R_3 : $P_{R_3} = R_3 I_3^2$
- Dakle, da bi se našle tražene snage potrebno je naći napon U_{BD} i struje I_{E_1} i I_3 .



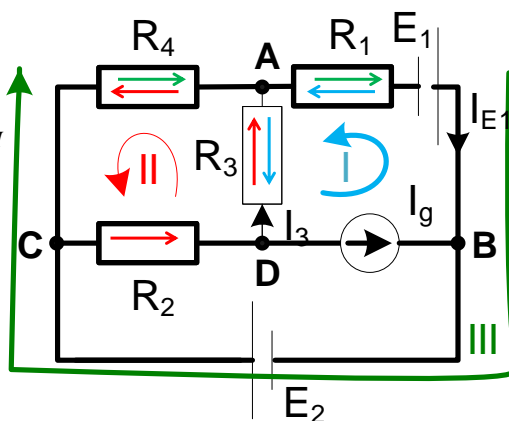
- Kolo na slici ima $n_C=4$ čvora i $n_G=6$ grana. Broj konturnih struja jednak je broju jednačina po II KZ, dakle postoje $n_G - n_C + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ konturne struje, I_I , I_{II} i I_{III} . Opšti sistem jednačina po metodi konturnih struja, u slučaju tri konturne struje je:

~~$$R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} = E_I$$~~

$$R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + R_{23}I_{III} = E_{II}$$

$$R_{31}I_I + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} = E_{III}$$

$$I_I = I_g = 1A$$



$$I_I = I_g$$

$$R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + R_{23}I_{III} = E_{II} \Rightarrow$$

$$R_{31}I_I + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} = E_{III}$$

$$I_I = 1\text{A}$$

$$I_{II} = 2,6\text{A}$$

$$I_{III} = 6,8\text{A}$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -R$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 = 3R$$

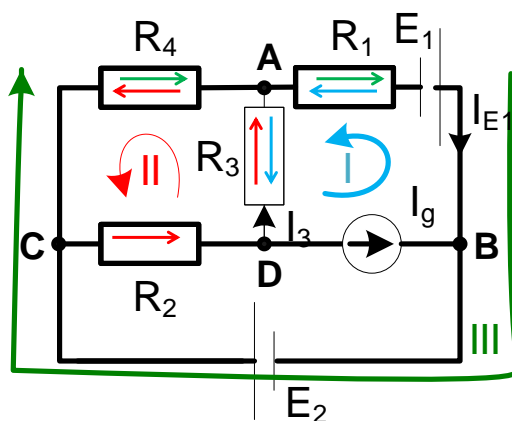
$$R_{13} = R_{31} = -R_1 = -R$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_4 = -R$$

$$R_{33} = R_1 + R_4 = 2R$$

$$E_{II} = 0$$

$$E_{III} = E_2 + E_1$$



- Prema usvojenim smerovima struja na slici struje u granama su:

$$I_{E_1} = I_{III} - I_I = 5,8\text{A} \quad I_3 = I_{II} - I_I = 1,6\text{A}$$

- Napon U_{BD} dobija se iz:

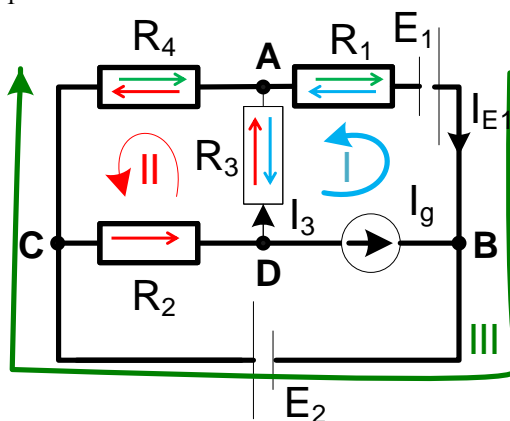
$$U_{BD} = -R_3 I_3 - R_1 I_{E_1} + E_1 = -14\text{V}$$

- Tražene snage su:

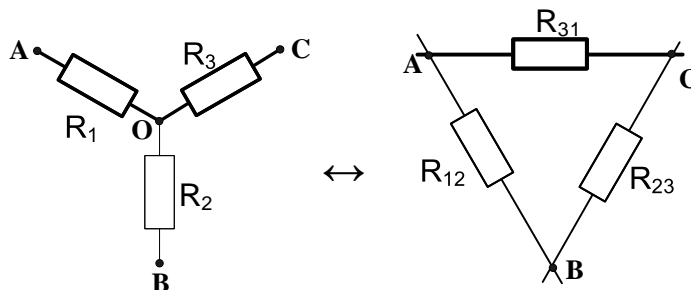
$$P_{I_g} = I_g U_{BD} = -14\text{W}$$

$$P_{E_1} = E_1 I_{E_1} = 348\text{W}$$

$$P_{R_3} = R_3 I_3^2 = 25,6\text{W}$$



Transformacija zvezda - trougao



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

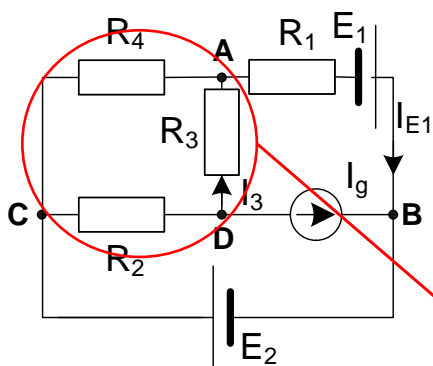
$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}$$

19

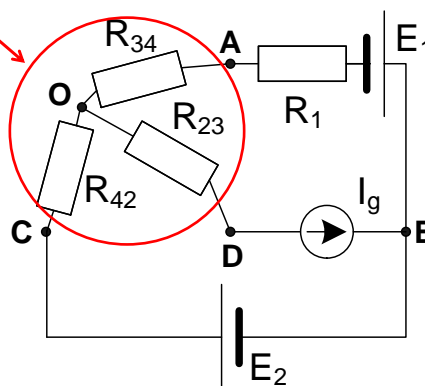


- II način:
- Ukoliko se trougao R_2 - R_3 - R_4 u zvezdu R_{23} - R_{34} - R_{42} :

$$R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

$$R_{34} = \frac{R_3R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

$$R_{42} = \frac{R_4R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$



- Kolo na slici ima $n_{\check{c}}=2$ čvora (A, C i D su postale tačke) i $n_G=3$ grane. Dakle postoje $n_G - n_{\check{c}} + 1 = 3-2+1=2$ konturne struje, I_I i I_{II} . Opšti sistem jednačina po metodi konturnih struja je:

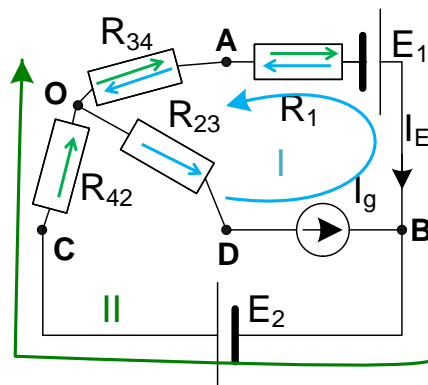
$$\begin{cases} R_{11}I_I + R_{12}I_{II} = E_I \\ R_{21}I_I + R_{22}I_{II} = E_{II} \end{cases} \quad I_I = I_g = 1\text{A}$$

$$R_{21} = -R_{34} - R_1 = -4R/3$$

$$R_{22} = R_{42} + R_{34} + R_1 = 5R/3$$

$$E_{II} = E_1 + E_2$$

$$\begin{aligned} I_{II} &= \frac{E_{II} - R_{21}I_I}{R_{22}} \\ &= \frac{E_1 + E_2 + 4RI_g/3}{5R/3} \end{aligned}$$



$$I_I = I_g = 1\text{A}$$

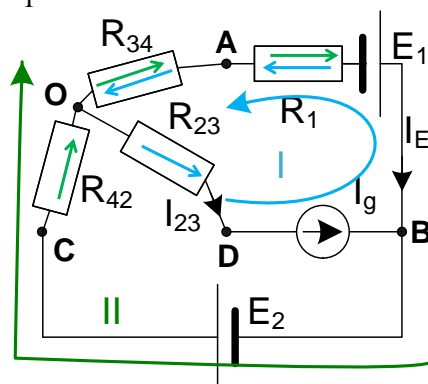
$$I_{II} = \frac{3(E_1 + E_2) + 4RI_g}{5R} = 6,8\text{A}$$

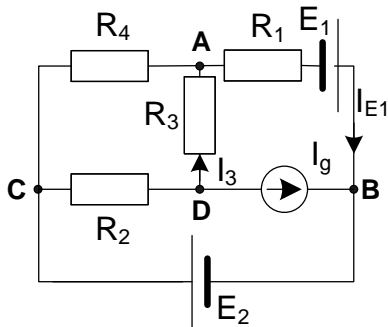
$$I_{E_1} = I_{II} - I_I = 5,8\text{A}$$

$$I_{23} = I_I = 1\text{A}$$

$$U_{BD} = R_{23}I_{23} - (R_1 + R_{34})I_{E_1} + E_1 = -14\text{V}$$

- Međutim, struju I_3 ne možemo da nađemo direktno jer više nema otpornika R_3 već moramo preko napona U_{DA} !

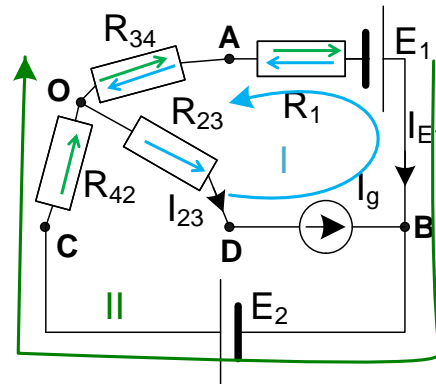




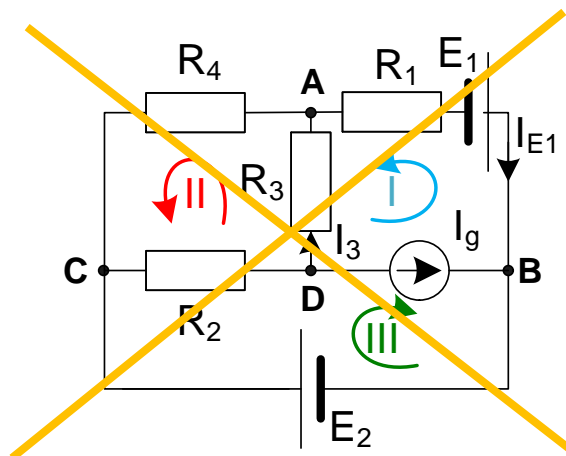
$$U_{DA} = R_3 I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{U_{DA}}{R_3}$$

$$U_{DA} = R_{34} I_{E1} - R_{23} I_{23} = 16 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_{DA}}{R_1} = 1,6 \text{ A}$$



- Pazi!!!
- Samo jedna konturna struja kroz strujni generator!!!



Metoda napona između čvorova

- U kolu koje ima $n_{\check{c}}$ čvorova postoji $n_{\check{c}} - 1$ napona koje treba odrediti. Jedan čvor se bira za čvor nultog potencijala.
- Opšti sistem jednačina po metodi napona između čvorova, kada ima n nepoznatih čvorova je:

$$+G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} + \dots - G_{1n}U_{n0} = \sum_1 I_g$$

$$-G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} + \dots - G_{2n}U_{n0} = \sum_2 I_g$$

...

$$-G_{n1}U_{10} - G_{n2}U_{20} + \dots + G_{nn}U_{n0} = \sum_n I_g$$

- G_{ii} predstavlja sopstvenu provodnost i -tog čvora.
- G_{ij} predstavlja međusobne provodnosti čvorova i i j , odnosno negativne provodnosti grane $i-j$.
- $\sum I_g$ predstavlja sumu struja koje ulaze u i -ti čvor. Struje koje su usmerene u čvor uzimaju se sa +, a koje izlaze sa -.

- **Zadatak 4.** U kolu na slici, odrediti struje u svim granama i napon U_{BD} metrom napona između čvorova.

Poznato je:

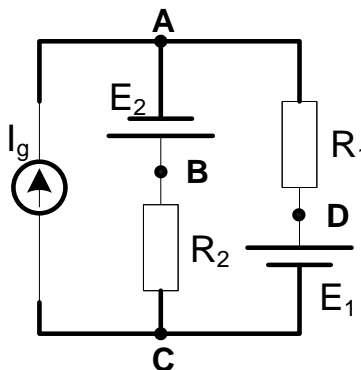
$$E_1 = 6 \text{ V}$$

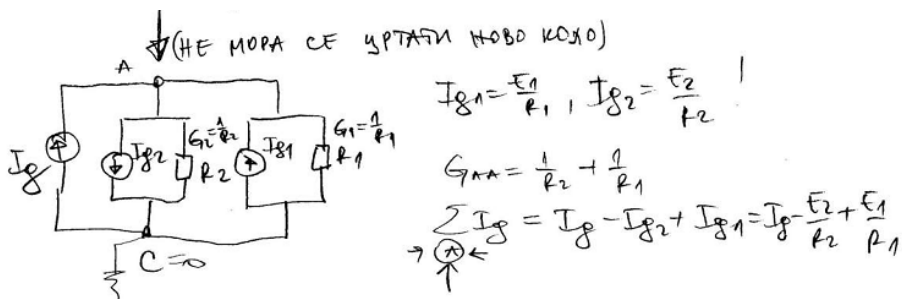
$$E_2 = 2 \text{ V}$$

$$I_g = 1 \text{ A}$$

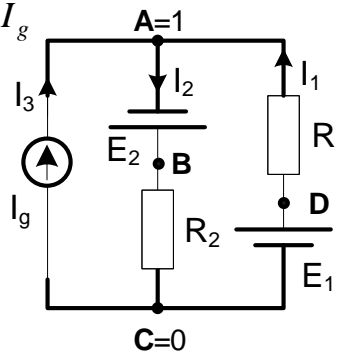
$$R_1 = 10 \Omega$$

$$R_2 = 20 \Omega$$





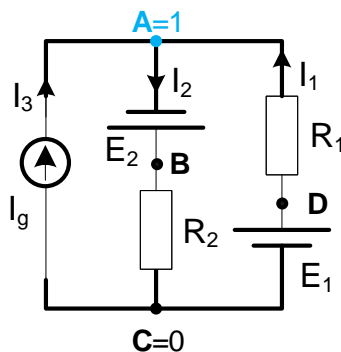
- Broj napona po metodi napona između čvorova je broju jednačina po I KZ, dakle postoji $n_c - 1 = 2 - 1 = 1$ napon, U_{10} . Za čvor nultog potencijala uzet je čvor $C=0$. Opšti sistem jednačina po metodi napona između čvorova, u slučaju jednog napona je: $A \equiv 1: G_{11}U_{10} = \sum I_g$
- G_{11} predstavlja sopstvenu¹ provodnost čvora 1, $\sum I_g$ predstavlja sumu struja koje ulaze u čvor 1.
- Struje koje su usmerene u čvor uzimaju se sa +, a koje izlaze sa -.



$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{3}{20} \text{ S} \quad \sum_1 I_g = I_g - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_1}{R_1} = 1,5 \text{ A}$$

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{3}{20} \text{ S}$$

$$\sum_1 I_g = I_g - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_1}{R_1} = 1,5 \text{ A}$$



$$A \equiv 1: \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_{10} = I_g - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_1}{R_1} \Rightarrow U_{10} = 10 \text{ V}$$

- Prema usvojenim smerovima struja na slici struje u granama su:

$$U_{AC} = U_{10} = E_1 - R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U_{10}}{R_1} = -0,4 \text{ A}$$

$$U_{AC} = U_{10} = R_2 I_2 - E_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_{10} + E_2}{R_2} = 0,6 \text{ A}$$

$$I_3 = I_2 - I_1 = 1 \text{ A}$$

- Napon U_{BD} :

$$U_{BD} = -E_1 + R_2 I_2 = 6 \text{ V}$$

