

Jednosmerne struje – 3 čas

Naponi između čvorova

Superpozicija

Tevenenova teorema

Metoda napona između čvorova

- U kolu koje ima $n_{\check{c}}$ čvorova postoji $n_{\check{c}} - 1$ napona koje treba odrediti. Jedan čvor se bira za čvor nultog potencijala.
- Opšti sistem jednačina po metodi napona između čvorova, kada ima n nepoznatih čvorova je:

$$+ G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} + \dots - G_{1n}U_{n0} = \sum_1 I_g$$

$$- G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} + \dots - G_{2n}U_{n0} = \sum_2 I_g$$

...

$$- G_{n1}U_{10} - G_{n2}U_{20} + \dots + G_{nn}U_{n0} = \sum_n I_g$$

- G_{ii} predstavlja sopstvenu provodnost i -tog čvora.
- G_{ij} predstavlja međusobne provodnosti čvorova i i j , odnosno negativne provodnosti grane $i-j$.
- $\sum I_g$ predstavlja sumu struja koje ulaze u i -ti čvor. Struje koje su usmerene u čvor uzimaju se sa +, a koje izlaze sa -.

- **Zadatak 1.** U kolu na slici, odrediti struje u svim granama i napon U_{BD} metodom napona između čvorova. Poznato je:

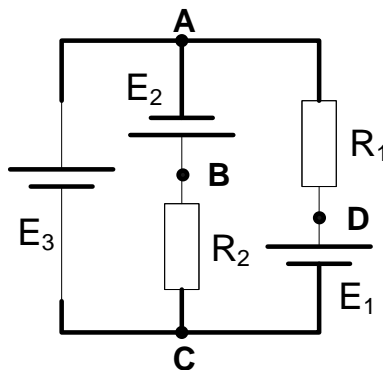
$$E_1 = 6 \text{ V}$$

$$E_2 = 2 \text{ V}$$

$$E_3 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \Omega$$

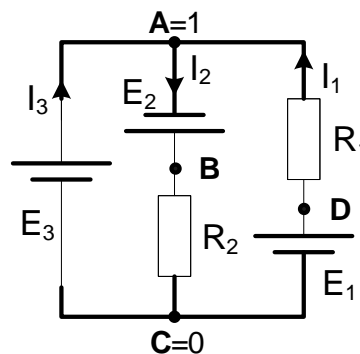
$$R_2 = 20 \Omega$$



- Broj napona po metodi napona između čvorova je broju jednačina po I KZ, dakle postoji $n_{\check{c}} - 1 = 2 - 1 = 1$ napon, U_{10} . Za čvor nultog potencijala uzet je čvor $C=0$. Opšti sistem jednačina po metodi napona između čvorova, u slučaju jednog napona je: $A=1: G_{11}U_{10} - \sum_1 I_g$

- Međutim, kada u kolu postoji idealni naponski generator, jednačina za napon za nenulti čvor tog generatora biće jednaka naponu naponskog generatora.

$$A \equiv 1: U_{AC} = U_{10} = E_3 = 10 \text{ V}$$



- Prema usvojenim smerovima struja na slici struje u granama su:

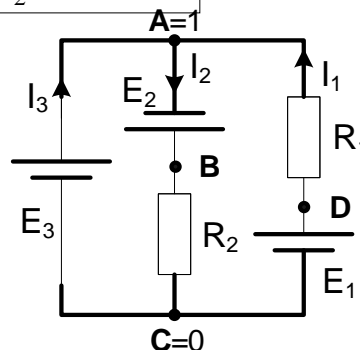
$$U_{AC} = U_{10} = E_1 - R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U_{10}}{R_1} = -0,4 \text{ A}$$

$$U_{AC} = U_{10} = R_2 I_2 - E_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_{10} + E_2}{R_2} = 0,6 \text{ A}$$

$$I_3 = I_2 - I_1 = 1 \text{ A}$$

- Napon U_{BD} :

$$U_{BD} = -E_1 + R_2 I_2 = 6 \text{ V}$$



- **Zadatak 2.** U kolu na slici, odrediti snagu strujnog generatora, P_{I_g} , snagu naponskog generatora P_{E_1} i snagu otpornika R_3 , P_{R_3} metodom napona između čvorova.

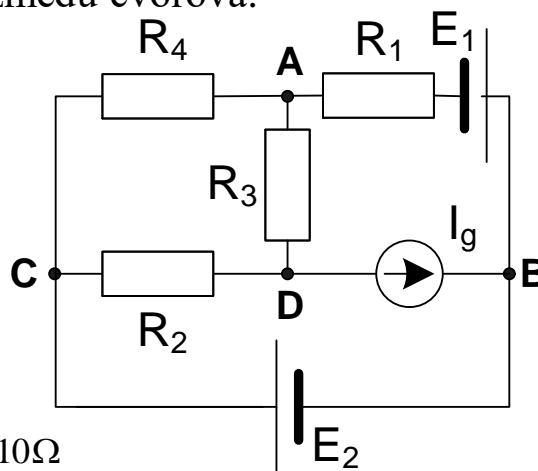
Poznato je:

$$I_g = 1 \text{ A}$$

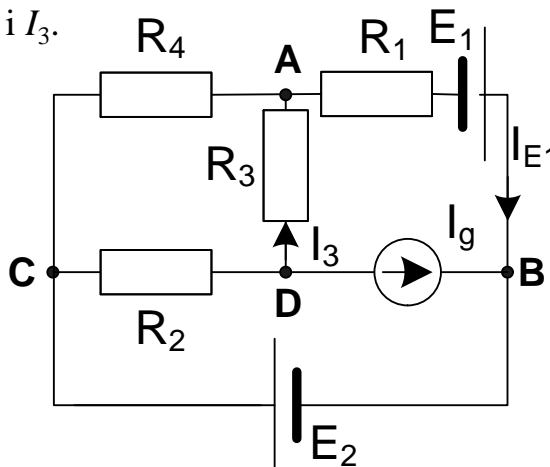
$$E_2 = 40 \text{ V}$$

$$E_1 = 60 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R = 10 \Omega$$



- Snaga strujnog generatora je: $P_g = I_g U_{I_g} = I_g U_{BD}$
- Snaga naponskog generatora E_1 je: $P_{E_1} = E_1 I_{E_1}$
- Snaga otpornika R_3 : $P_{R_3} = R_3 I_3^2$
- Dakle, da bi se našle tražene snage potrebno je naći napon U_{BD} i struje I_{E_1} i I_3 .



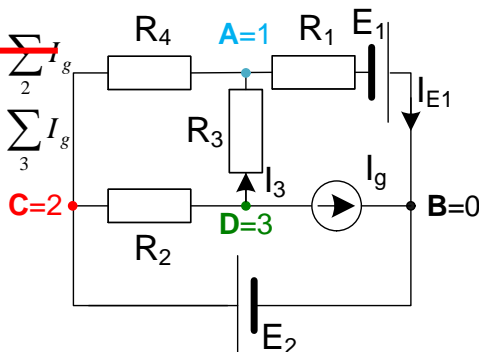
- Kolo na slici ima $n_C=4$ čvora. Broj napona po metodi napona između čvorova je broju jednačina po I KZ, dakle postoje $n_C - 1 = 4 - 1 = 3$ napona, U_{10} , U_{20} i U_{30} , slika.
- Za čvor nultog potencijala uzet je čvor $B=0$. Opšti sistem jednačina po napona između čvorova, u slučaju tri napona je:

$$A \equiv 1: G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} = \sum_1 I_g$$

~~$$C \equiv 2: -G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} - G_{23}U_{30} = \sum_2 I_g$$~~

$$D \equiv 3: -G_{31}U_{10} - G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} = \sum_3 I_g$$

$$U_{20} = E_2$$



$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{3}{R}$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{R}$$

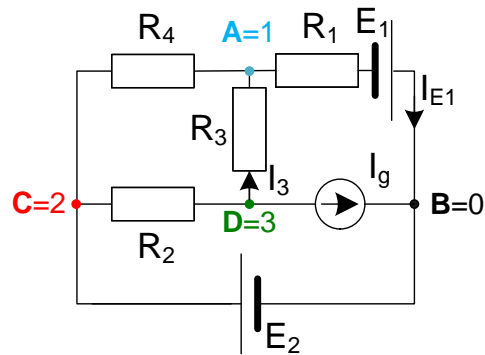
$$G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R}$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{2}{R}$$

$$\sum_1 I_g = -\frac{E_1}{R_1} = -\frac{E_1}{R}$$

$$\sum_3 I_g = -I_g$$



$$(1): \frac{3U_{10}}{R} - \frac{U_{20}}{R} - \frac{U_{30}}{R} = -\frac{E_1}{R}$$

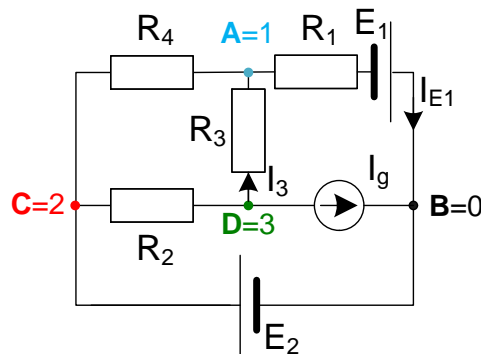
$$(2): U_{20} = E_2$$

$$(3): -\frac{U_{10}}{R} - \frac{U_{20}}{R} + \frac{2U_{30}}{R} = -I_g$$

$$U_{AB} = U_{10} = -2V$$

$$\Rightarrow U_{CB} = U_{20} = 40V$$

$$U_{DB} = U_{30} = 14V$$



- Napon U_{BD} : $U_{BD} = -U_{DB} = -14\text{ V}$
- Prema usvojenim smerovima struja na slici struje u granama su:

$$U_{AB} = R_1 I_{E_1} - E_1 \Rightarrow I_{E_1} = \frac{U_{AB} + E_1}{R_1} = 5,8\text{ A}$$

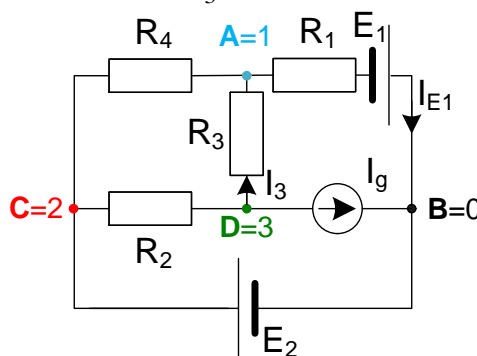
$$U_{DA} = U_{DB} - U_{DA} = R_3 I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{U_{DB} - U_{DA}}{R_3} = 1,6\text{ A}$$

- Tražene snage su:

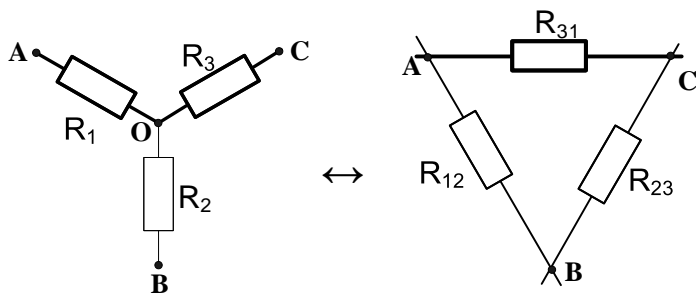
$$P_{I_g} = I_g U_{BD} = -14\text{ W}$$

$$P_{E_1} = E_1 I_{E_1} = 348\text{ W}$$

$$P_{R_3} = R_3 I_3^2 = 25,6\text{ W}$$



Transformacija zvezda - trougao



$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

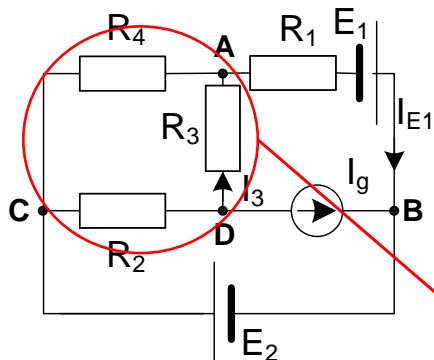
$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

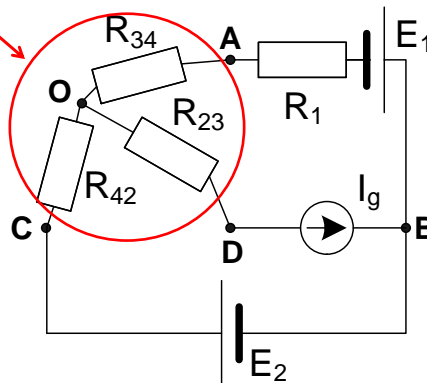


- II način:
- Ukoliko se trougao R_2 - R_3 - R_4 u zvezdu R_{23} - R_{34} - R_{42} :

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

$$R_{42} = \frac{R_4 R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$

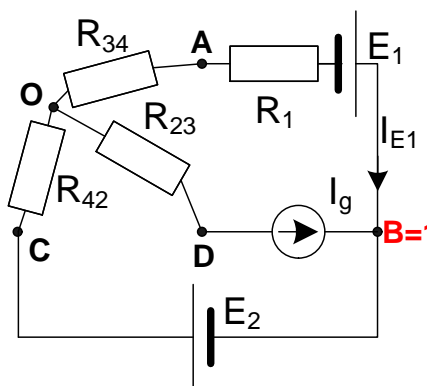


- Kolo na slici ima $n_{\check{c}}=2$ čvora (A, C i D su postale tačke) i $n_G=3$ grane. Broj napona po metodi napona između čvorova je $n_{\check{c}} - 1 = 2 - 1 = 1$ napon, U_{10} , U_{20} i U_{30} , slika.
- Za čvor nultog potencijala uzet je čvor $O=0$. Opšti sistem jednačina po naponu između čvorova je:

$$B \equiv 1: G_{11} U_{10} = \sum_1 I_g$$

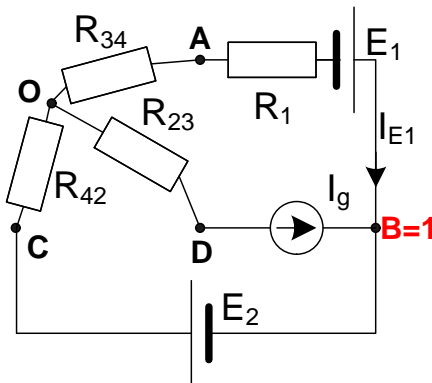
$$G_{11} = \frac{1}{R_1 + R_{34}} + \frac{1}{R_{42}} = \frac{3}{4R} + \frac{3}{R} = \frac{15}{4R}$$

$$\sum_1 I_g = \frac{E_1}{R_1 + R_{34}} + I_g - \frac{E_2}{R_{42}}$$



$$G_{11} = \frac{15}{4R} \quad \sum_1 I_g = \frac{3E_1}{4R} + I_g - \frac{3E_2}{R} = \frac{3(E_1 - 4E_2)}{4R} + I_g$$

$$U_{10} = \frac{\sum_1 I_g}{G_{11}} = \frac{\frac{3(E_1 - 4E_2)}{4R} + I_g}{\frac{15}{4R}} = \frac{E_1 - 4E_2}{5} + \frac{4RI_g}{15} = -\frac{52}{3} \text{ V}$$

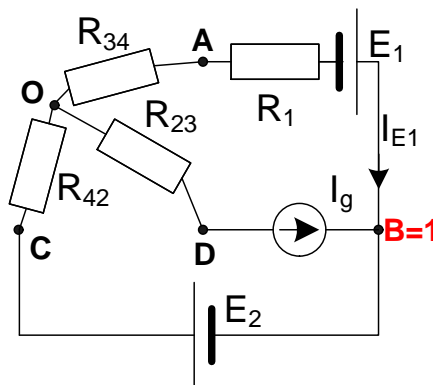


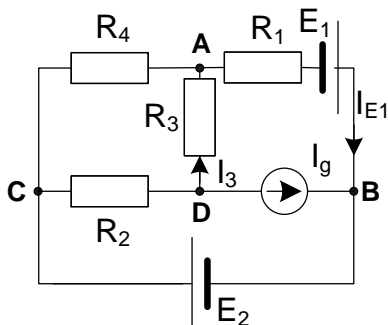
$$U_{10} = U_{B0} = -\frac{52}{3} \text{ V}$$

$$U_{B0} = -(R_{34} + R_1)I_{E1} + E_1 \Rightarrow I_{E1} = \frac{E_1 - U_{B0}}{R_{34} + R_1} = 5,8 \text{ A}$$

$$U_{B0} = -R_{23}I_g + U_{BD} \Rightarrow U_{BD} = U_{B0} + R_{23}I_g = -14 \text{ V}$$

- Međutim, struju I_3 ne možemo da nađemo direktno jer više nema otpornika R_3 već moramo preko napona U_{DA} !

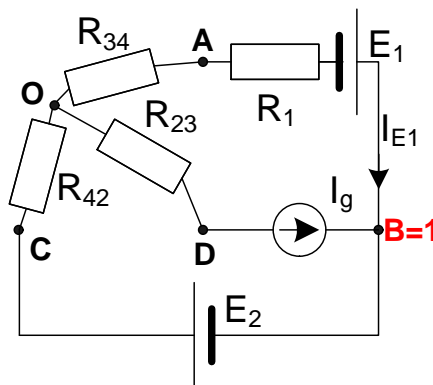




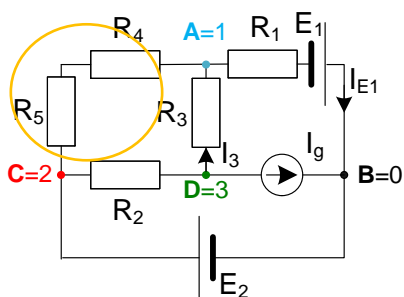
$$U_{DA} = R_3 I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{U_{DA}}{R_3}$$

$$U_{DA} = R_{34} I_{E1} - R_{23} I_g = 16V$$

$$I_3 = \frac{U_{DA}}{R_1} = 1,6A$$



Obratiti pažnju!!!



~~$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$~~

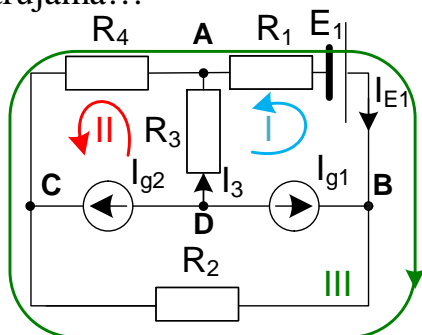
~~$$G_{11} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$~~

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}$$

$$G_{12} = \frac{1}{R_4 + R_5}$$

Primer koji je bolje raditi konturnim strujama

- $n_{\check{c}}=4, n_G=6$
- $n_G - n_{\check{c}} + 1 = 3$ Konturne struje,
- $n_{\check{c}} - 1 = 3$ Nepoznata napona, ali
- $n_{I_g} = 2, n_{E\text{-idealnih}} = 0!$ → Bolje raditi kontrurnim strujama!!!



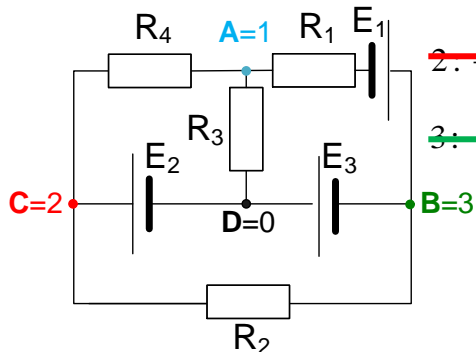
$$\begin{aligned} R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} &= E_I \\ R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + R_{23}I_{III} &= E_{II} \\ R_{31}I_I + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} &= E_{III} \end{aligned}$$

$$I_I = I_{g1}$$

$$I_{II} = -I_{g2}$$

Primer koji je bolje raditi naponima između čvorova

- $n_{\check{c}}=4, n_G=6$
- $n_G - n_{\check{c}} + 1 = 3$ Konturne struje,
- $n_{\check{c}} - 1 = 3$ Nepoznata napona, ali
- $n_{I_g} = 0, n_{E\text{-idealnih}} = 2!$ → Bolje raditi naponima između čvorova!!!



$$1: G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} = \sum_1 I_g$$

$$2: -G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} - G_{23}U_{30} = \sum_2 I_g$$

$$3: G_{31}U_{10} - G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} = \sum_3 I_g$$

$$U_{20} = E_2$$

$$U_{30} = -E_3$$

Teorema superpozicije

- Jačina struje u svakoj grani linearne mreže je jednaka algebarskom zbiru jačina struja koje bi u toj grani stvarali naponski i strujni generatori koji deluju u mreži kada bi delovali pojedinačno.
- Isključivanje naponskog generatora znači zamenjivanje njegovog mesta kratkim spojem. Ukoliko ima unutrašnju otpornost, ona ostaje na mestu gde je bio generator.
- Isključivanje strujnog generatora znači zamenjivanje njegovog mesta otvorenom vezom.
- Ukoliko ima n generatora u kolu rešava se n nezavisnih manjih mreža i njihovi rezultati se na kraju superponiraju.

- **Zadatak 3.** U kolu na slici, odrediti struje u svim granama i napon U_{BD} metrom superpozicije.

Poznato je:

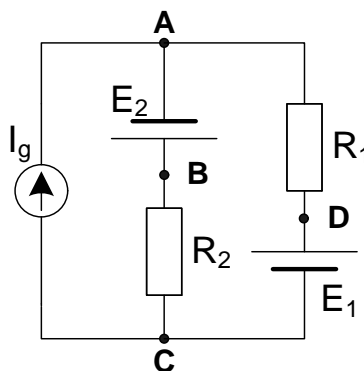
$$E_1 = 6\text{ V}$$

$$E_2 = 2\text{ V}$$

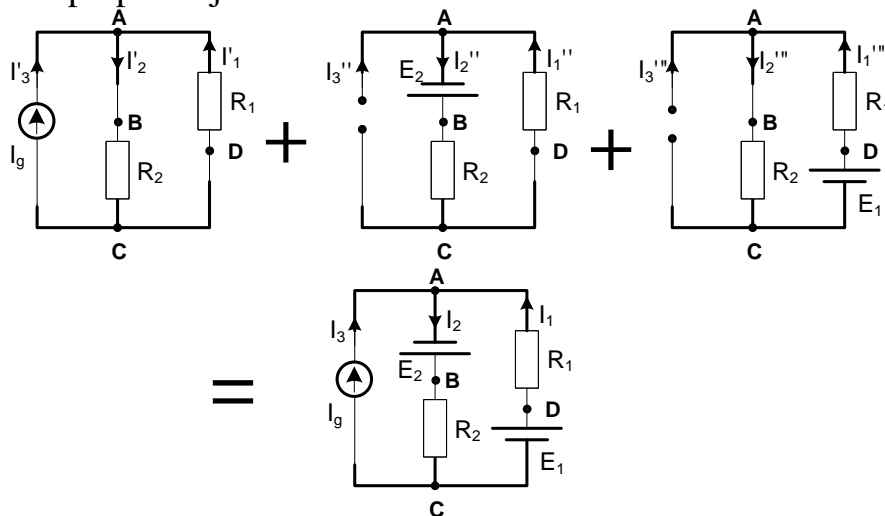
$$I_g = 1\text{ A}$$

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$



- U kolu na slici ima tri generatora, dva naponska i jedan strujni. Rešavanje zadatka se svodi na nezavisno rešavanje kola na slikama nakon čega se njihovi rezultati superponiraju.



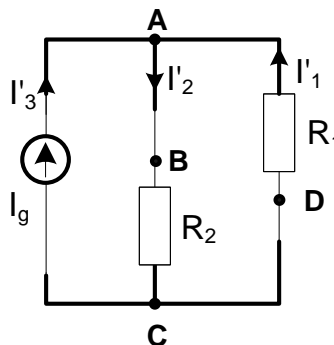
- Kada se isključe oba naponska generatora i ostane strujni:

$$I_1' = \frac{-R_2}{R_1 + R_2} I_g = -\frac{2}{3} \text{ A}$$

$$I_2' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_g = \frac{1}{3} \text{ A}$$

$$I_3' = I_g$$

$$U_{BD}' = R_2 I_2' = \frac{20}{3} \text{ V}$$

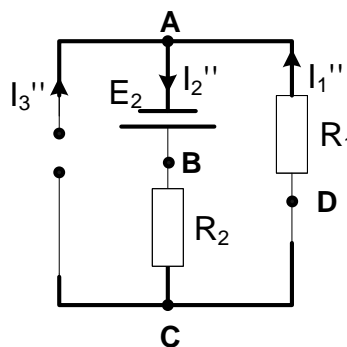


- Kada se isključe strujni generator i naposnki generator E_1 , a ostane uključen naposnki generator E_2 :

$$I_1'' = I_2'' = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{15} \text{ A}$$

$$I_3'' = 0$$

$$U_{BD}'' = R_2 I_2'' = \frac{4}{3} \text{ V}$$

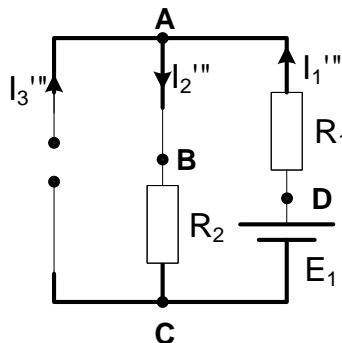


- Kada se isključe strujni generator i naposnki generator E_2 , a ostane uključen naposnki generator E_1 :

$$I_1''' = I_2''' = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{3}{15} \text{ A}$$

$$I_3''' = 0$$

$$U_{BD}''' = -R_1 I_1''' = -2 \text{ V}$$



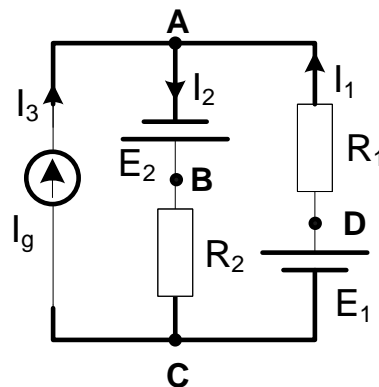
- Superpozicijom dobijenih rezultata dobijaju se konačne vrednosti struja u kolu i napona U_{BD} :

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = -0,4 \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = 0,6 \text{ A}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = 1 \text{ A},$$

$$U_{BD} = U_{BD}' + U_{BD}'' + U_{BD}''' = 6 \text{ V}$$



Tevenenova teorema

- Tevenenova teorema tvrdi da se bilo koji deo strujnog kola između neke dve tačke može zameniti ekvivalentnim naponskim generatorom, koji se naziva Tevenenov generator.
- Tevenenov generator određen je pomoću dva parametra, Tevenenove elektromotorne sile, E_T i Tevenenove otpornosti R_T .
- Tevenenova otpornost R_T određuje se kao ekvivalentna otpornost između tačaka između kojih se traži Tevenenov generator, kada bi se isključili svi generatori u kolu (stujni zamenili otvorenom vezom, naponski kratkim spojem).
- Elektromotorna sila Tevenenovog generatora E_T određuje se kada se nađe napon otvorene veze (OV) između tačaka između kojih je potrebno naći Tevenenov generator.

- **Zadatak 4.** Za kolo na slici između tačaka A i B odrediti i nacrtati ekvivalentni Tevenenov generator.

Poznato je:

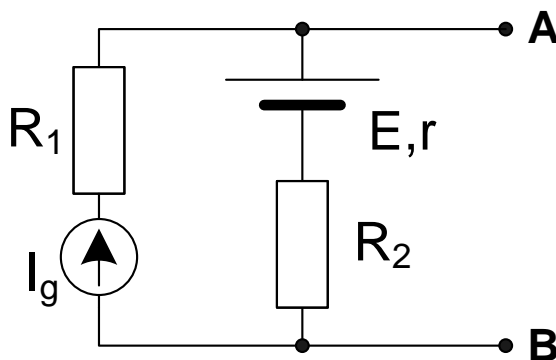
$$E = 3\text{ V}$$

$$I_g = 1\text{ A}$$

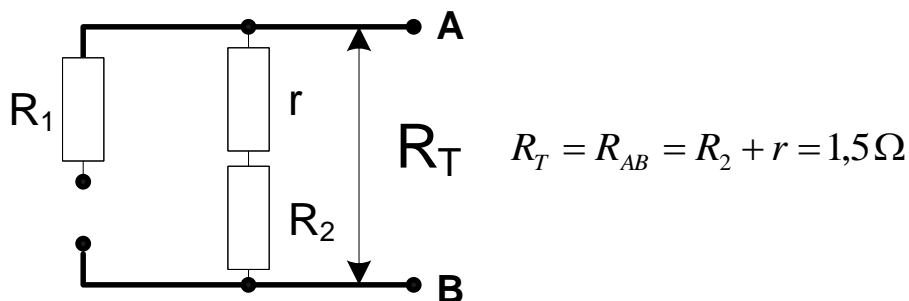
$$R_1 = 2\Omega$$

$$R_2 = 1\Omega$$

$$r = 0,5\Omega$$

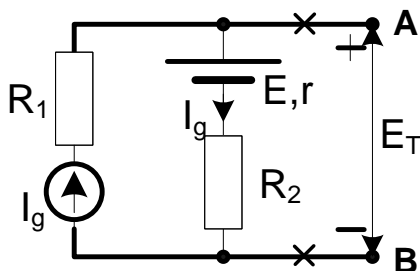


- Na slici je prikazana ekvivalentna šema za određivanje otpornosti Tevenenovog generatora između tačaka A i B.
- Naponski generator zamenjen je kratkim spojem.
- Strujni generator zamenjen je otvorenom vezom.



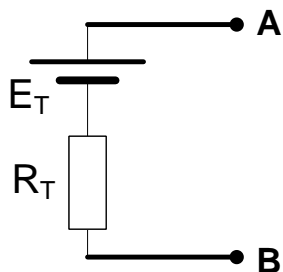
- Ukoliko je generator realni naponski ne zaboraviti unutrašnju otpornost!!!

- Na slici je prikazana je ekvivalentna šema za elektromotorne sile Tevenenovog generatora između tačaka A i B.
- Vidi se da kroz naponski generator teče struja I_g , pa je:



$$E_T = U_{AB}^{OV} = R_2 I_g + r I_g + E = 4,5 \text{ V}$$

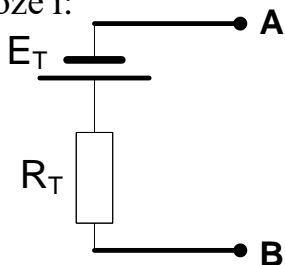
- Ekvivalentni Tevenenov generator:



$$E_T = U_{AB}^{OV} = 4,5 \text{ V}$$

$$R_T = 1,5 \Omega$$

- Može i:



Ali je onda:

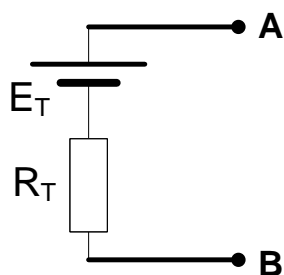
$$E_T = U_{BA}^{OV} = -4,5 \text{ V}$$

$$R_T = 1,5 \Omega$$

Nortonova teorema

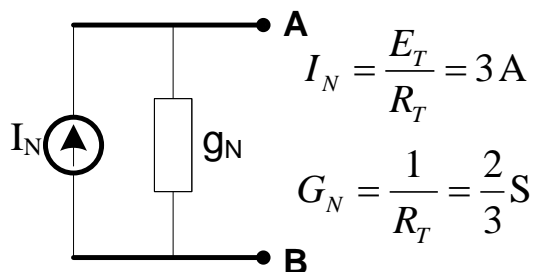
- Kao i svaki realni naponski generator, i Thevenenov generator može se transformisati u realni strujni generator koji je određen strujom generatora i provodnošću generatora. Takav strujni generator naziva se Nortonov generator.
- Struja Nortonovog generatora, I_N određuje se kao struja koja prolazi kroz kratak spoj tačaka između kojih se generator traži, dok se provodnost Nortonovog generatora, G_N određuje kao ekvivalentna provodnost između tačaka između kojih se traži generator.

Transformacija Thevenena u Nortona



$$E_T = \frac{I_N}{G_N} = 4,5 \text{ V}$$

$$R_T = \frac{1}{G_N} = 1,5 \Omega$$



$$I_N = \frac{E_T}{R_T} = 3 \text{ A}$$

$$G_N = \frac{1}{R_T} = \frac{2}{3} \text{ S}$$