

## ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

1. Да ли се на  $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$  може применити Њутн-Лајбницева формула?
2. Да ли се у  $\int_0^3 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$  може увести смена  $x = \sin t$  ?
3. Да ли се у  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$  може увести смена  $x = \frac{1}{t}$  ?
4. а)  $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{x} dx$       б)  $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy$
5. а)  $\int_0^\pi \sin x dx$       б)  $\int_{-\pi}^\pi \cos 2x \sin x dx$
6.  $\int_1^3 (x^2 - x - 1) dx$
7. а)  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$       б)  $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$
8. а)  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$       б)  $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}$
9. а)  $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$
10. а)  $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2}$       б)  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$
11.  $\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$
12. а)  $\int_0^\pi x^3 \sin x dx$       б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x dx$
13. а)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^\pi \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$       б)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$
14.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x}$
15.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} = \frac{80}{9\sqrt{3}}$       смена:  $x = \operatorname{tg} x$
16. а)  $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$       б)  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$
17.  $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
18. а)  $\int_0^2 |1-x| dx$       б)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = 4\sqrt{2}$
19.  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$
20. (ДОМ)  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$
21. а)  $\int_1^e \ln x dx$       б)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$

22.  $\int \arcsin x \, dx$
23.  $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = 1 - \cos 1$
24.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \, dx$
25.  $\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \, dx = 0$  (непарна функција на симетричном интервалу)
26.  $\int_{-1}^1 x^2 \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) \, dx = 0$
27. (испит)  $\int_0^1 f(x)f''(x) \, dx$  за  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$
28. (испит)  $\int_0^{\frac{3}{4}} \left( \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) \, dx$
29. (дом)  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$
30. (испит)  $\int_{-1}^0 x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} \, dx$  смена:  $t^3 = \frac{x}{1-x}$
31. (испит)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x}}{\sin^4(\frac{3\pi}{4} - x) + 2(1 - \sin 2x)} \, dx$  смена:  $t = \frac{3\pi}{4} - x$
32. Наћи лимес  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 \, dt}{x}$  применом Лопиталовог правила.
33. (дом) Наћи лимес  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t \, dt}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\pi^2}{4}$ .

Погодно изабраном сменом решити:

34.  $I_1 = \int \frac{x \sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx$
35.  $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + e^x)(1 + x^2)}$
36.  $I_3 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x} \, dx$

## ПРИМЕНА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

### Површина равног лика

1. Наћи површину равног лика ограниченог кривом  $y = e^x \sin x$  за  $x \in [0, 2\pi]$  и  $Ox$  осом.
2. Наћи површину равне фигуре ограничена графиком функције  $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}$ , правом  $x = 1$  и  $Ox$ -осом.  
$$P = \int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1+t} dt = \frac{2}{3}$$
3. Наћи површину равне фигуре ограничена графиком функције  $f(x) = x - 2 \arctg \frac{x-1}{x+1}$ , њеном косом асимптотом,  $Oy$  осом и правом  $x = 1$ .  
$$P = \ln 2 + \frac{\pi}{2}$$
4. У каквом односу парабола  $y^2 = 2x$  дели круг  $x^2 + y^2 = 8$  ?
5. Наћи површину равне фигуре ограничена луком криве  $y = x\sqrt{1-x^2}$  и  $Ox$  осом.
6. (дом) Израчунати површину равног лика одређеног правама  $x = e$ ,  $x = e^2$ ,  $y = 0$  и графиком функције  $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x^2}$ .
7. (дом) Израчунати површину области ограничена кривом  $y = x^2 - 5x + 4$  и правама  $y = 0$ ,  $x = 1$  и  $x = 6$ .
8. (дом) Израчунати површину области ограничена кривом  $y = (x+2)^2$  и правама  $y = 0$  и  $y = 4 - x$ .
9. (дом) Израчунати површину области ограничена кривом  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$  и  $Ox$  осом.
10. (дом) Израчунати површину троугла са теменима  $A(1, 3)$ ,  $B(4, 1)$  и  $C(6, 5)$ .
11. (дом) Израчунати површину области ограничена кривама  $y = e^x$  и  $y = 3^x$  и правама  $y = 3$  и  $y = 9$ .

### Дужина лука криве

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1. Наћи дужину лука криве  $y = \arcsin e^{-x}$  за  $x \in [0, 1]$ .
2. Наћи дужину лука криве  $y = \ln(\cos x)$  за  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .  
$$s = \ln(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8})$$
3. Израчунати дужину лука криве  $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$  за  $x \in [-1, 1]$ .  
$$s = 4$$
4. (дом) Израчунати дужину лука криве  $y = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$  између  $x = 1$  и  $x = 2$ .
5. (дом) Израчунати дужину лука криве  $y = x^2$  на интервалу  $[0, 1]$ .
6. (дом) Израчунати дужину лука криве  $y = \ln x$  на интервалу  $[1, 3]$ .
7. (дом) Израчунати дужину лука криве  $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$  на интервалу  $x \in [-1, 1]$ .
8. (дом) Израчунати дужину лука криве  $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$  између њених нула.
9. (дом) Израчунати дужину лука криве  $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln x$  на интервалу  $x \in [1, e]$ .

### Запремина ротационог тела

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$$

1. Наћи запремину тела насталог ротацијом  $y = 2x - x^2$ ,  $x \in [0, 2]$  око  $x$  и око  $y$  осе.  
 $V_x = \frac{16\pi}{15}$ ,  $V_y = \frac{8\pi}{3}$
2. Наћи запремину тела насталог ротацијом круга  $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ,  $0 < a < b$  око  $x$  осе.  
 $V = 2a^2b\pi^2$
3. Одредити запремину тела насталог ротацијом криве  $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 2x + 2}$  око  $x$  осе за  $x \in [0, 1]$ .  
 $V = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{2} \arctg \frac{1}{3}$
4. (дом) Фигура  $F$  у  $xOy$  равни ограничена је делом лука криве  $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $x$  осом и правом  $x = 1$ . Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре  $F$  око  $x$  осе.
5. (дом) Одредити запремину тела насталог обртањем  $y = \ln x$ ,  $x \in [1, 5]$  око  $Ox$  осе.
6. (дом) Одредити запремину тела које настаје ротацијом затворене области ограничене функцијама  $y = x^2 - 2x + 2$  и  $y = x + 2$ , око осе  $Ox$ .

### Површина омотача ротационог тела

$$P_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1. Наћи површину и запремину тела насталог ротацијом  $y = tgx$  за  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  око  $x$  осе.
2. Наћи површину тела насталог ротацијом круга  $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ,  $0 < a < b$  око  $x$  осе.
3. (дом) Дата је крива  $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ . Израчунати дужину лука криве и површину ротационог тела насталог ротацијом дате функције око  $Ox$  осе.
4. (дом) Парабола  $y = x^2$  ротира око  $Ox$  осе на интервалу  $[1, 3]$ . Израчунати површину обртног тела.
5. (дом) Одредити површину тела које настаје ротацијом криве  $y = \cos x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  око  $Ox$  осе.
6. (дом) Израчунати површину површи која настаје ротацијом  $4x^2 + y^2 = 4$  око  $Oy$  осе.
7. (дом) Парабола  $y^2 = 8x$  ротира се око  $Ox$  осе, од темена до тачке са апсисом  $x = 6$ . Наћи површину тако насталог тела.

## Несвојствени интеграли

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{16}$
2.  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 3x dx$
3. а)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$       б)  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}$
4. а)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$       б)  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$
5.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$
6. а)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$       б)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$
7. а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$       б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$
8.  $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\ln 2}{4}$
9. (дом) а)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$       б)  $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x+1}{x} dx$
10. а)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$       б)  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$
11. а)  $\int_0^1 \ln x dx = -1$       б) (дом)  $\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{\pi^2}{4}$
12. а)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$       б) (дом)  $\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$
13.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$
14.  $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}-1}}{(x-1)^2} dx$
15.  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$
16. У зависности од реалног параметра  $\alpha$  испитати конвергенцију интеграла  
 а)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$       б)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$
17. (дом) Израчунати површину равног лика коју образује график функције  $y = xe^{-x}$  са својом асимптомом.
18. (дом) Израчунати површину између криве  $y = (x^2+1)e^{-x}$ , њене хоризонталне асимптоте и праве  $x = 0$ .
19. (дом) Наћи површину фигуре ограничене графицима функција  $y = x^2 - 12x + 36$  и  $y = x^2$  и правама  $y = 4$  и  $y = 0$ .

## Бета и Гама функција

Користећи особине Бета и Гама функције израчунати:

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$     смена:  $\frac{1}{1+x^3} = t$
2.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^n}}$     смена:  $x^n = t$
3.  $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^2} dx$
4.  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$
5.  $\int_0^1 x \sqrt{|\ln x|} dx$
6. (испит) а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{11}{2}} x dx$     б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^{10} x dx$
7. (дом) а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{7}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x dx$     б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{\frac{11}{2}} x dx$
8.  $\int_0^{+\infty} (x+1)e^{\sqrt{x}} \sqrt[4]{x} dx$
9.  $\int_1^{+\infty} (x-1)^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx$
10.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m}$     смена:  $x = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$
11.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^6 x dx$     смена:  $\sin^2 x = t$
12.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^3} dx$     смена:  $1+x^4 = \frac{1}{t}$
13.  $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx = \frac{\pi}{8}$