ФУНКЦИЈЕ ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ

1. Одредити и графички представити домен функције:
a) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$ *b)* $z=\ln(1-x^2-y^2)$ *c)* $z=\arcsin(x^2+y^2-2)$
d) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ *e)* $z=\sqrt{\ln x+\ln y}$ *f)* $z=ln(2x-x^2-y^2)$ *g)* $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

2. Одредити домен и прве парцијалне изводе функције $z=\ln(\tan\dfrac{x}{y})$.

Домен: $\frac{x}{y}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y\neq 0$. Изводи: $z'_x=\dfrac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$ и $z'_y=\dfrac{2x}{\sin\frac{2x}{y}}$.

3. (дом.) Наћи парцијалне изводе првог реда следећих функција:
a) $z=\dfrac{x^2}{y^3}$ *b)* $z=\arccos(\dfrac{1}{x}+y)$ *c)* $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *d)* $z=e^{\frac{x}{y}}$ *e)* $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

4. Одредити домен, прве и друге парцијалне изводе функције:

а) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.
Домен: $x\neq -y$, $z'_x=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $z'_y=\frac{-2x}{(x+y)^2}$, $z''_{xx}=\frac{-4y}{(x+y)^3}$, $z''_{xy}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$, $z''_{yy}=\frac{4x}{(x+y)^3}$.

б) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.
Домен: $(x,y)\neq(0,0)$, $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$, $z''_{xx}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}^{\frac{3}{2}}}$, $z''_{xy}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^{\frac{3}{2}}}$.

5. $z=x^y, x>0$. $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$, $z''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $z''_{yx}=z''_{xy}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}$.

6. Одредити домен, прве и друге парцијалне изводе функције:
a) $z=arctg\dfrac{y}{x}$ *b)* $z=\ln\sqrt{1-x^2+y^2}$ *c)* $z=x^2e^{2x^2+3y}$.

7. Показати да је $xz'_x+yz'_y=2$ за $z=\ln(x^2+y^2+xy)$.

8. а) Да ли функција $z=x\ln\dfrac{y}{x}$ задовољава релацију $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$?

б) Да ли функција $z=\ln(e^x+e^y)$ задовољава релацију $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$?

9. Одредити и графички представити домен дате функције и наћи њене екстремне вредности:

а) $z=(x-1)^2+2y^2$.
Једина стационарна тачка је $M(1,0)$.
$\Delta=8$, $z_{xx}(M)>0$ па је реч о локалном минимуму и $z_{min}=z(M)=0$.

б) $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.
$z'_x=\frac{y^2+xy-x+1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $z'_y=\frac{-x^2-xy-y-1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ и за стационарну тачку $M(1,-1)$ су $r=-\frac{2}{3\sqrt{3}}<0$, $s=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $t=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ и $\triangle=\frac{1}{9}>0$, па је M тачка локалног максимума и $z_{\max}=\sqrt{3}$.

в) $z=x^3+6xy+y^2$.
$D=R^2$, $z_x=3x^2+6y$, $z_{xx}=6x$, $z_{xy}=6$, $z_y=6x+2y$, $z_{yy}=2$ и кандидати за екстремуме су $M_1(0,0)$ и $M_2(6,-18)$. $\Delta_{M_1}=-36$, а у M_2 је $\Delta>0$ и $z_{xx}(M)>0$ па је реч о локалном минимуму.

г) $z=x^2+xy+y^2-10\ln x-4\ln y$.
$D: x,y>0$. $z_x=2x+y-\dfrac{10}{x}$ и $z_y=2y+x-\dfrac{4}{y}$, па добијамо систем $\begin{array}{rl}2x^2+xy-10= & 0\\ 2y^2+xy-4= & 0\end{array}$, чија су

решења тачке $M_1(2,1), M_2(-2,-1), M_3(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}), M_4(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}})$. Како само M_1 припада домену добијамо $z''_{xx}(M_1) = \frac{9}{2}$, $z''_{xy}(M_1) = 1$, $z''_{yy}(M_1) = 6$ па је $\Delta > 0$ и $z_{min} = z(M_1) = 7 - 10\ln 2$.

Одредити и графички представити домен дате функције и наћи њене екстремне вредности:

10. (дом.) $z = x^3 + xy^2 - 6xy$.
11. (дом.) $z = xy(6 - x - y)$.
12. (дом.) $z = x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{4}{y}$.
13. (дом.) $z = x^2 - y + 4\ln(3 - x) + \ln(y + 2)$.
14. (дом.) $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$.
15. (дом.) $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$.

Одредити и графички представити домен функције, наћи екстремне вредности функције:
16. (септ 07) $z = x^3 + y^2 - xy - y$.
17. (окт 07)$z = 2x + 2y + \ln(2y - x^2 - y^2)$.
18. (окт2 07) $z = y + \ln(4 - x^2 - y^2)$.
19. (јан 08) $z = (y - 8x)^2 - x^4 - y^4$.
20. (феб 08) $z = x\dfrac{4 - x^2 - y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.
21. (колок 08) $z = x + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Одредити екстремне вредности и проверити да ли за дату функцију важи једнакост $(z - x)(1 - z'_x - z'_y) = x + y$.
22. (јан 09) $z = e^{-x^2-y^2}$. Одредити екстремне вредности и проверити да ли важи $z''_{xx}z''_{yy} + 2(z'_x)^2 + 2(z'_y)^2 = 4z$.
23. (феб 09) $z = arctg(x^2 + y^2)$.
24. (јун 06) $z = \ln(-2y - x^2 - y^2) - 2(x + y)$.