ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

Диференцијелне једначине које раздвајају променљиве

Уколико је $y' = f(x)g(y)$ онда је опште решење облика
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c, \;\; g(y) \neq 0.$$

1. $(1+e^x)yy' = e^x$
2. $y' = e^{x+y}$
3. $y' = xye^x \;\; y(0) = 1$
4. $y' = \sin^2(x+y) - 1$
5. $(2x-1)y' = a^2, \;\; a \in R$
6. (дом) $y' - x^2 = y(x^2y + x^2 - 2y')$
7. (јун05) $y' = \dfrac{4x(1+\sqrt{1-2y-y^2})ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^3}$
8. (јул07) $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$
9. (апр07) $y' = \dfrac{\sqrt[3]{1+y^3}}{(1+x^2)^2}$
10. (исп.) $(1+\sqrt{1-2y-y^2})dy - x(1+x^2)^{-3}ln(x+\sqrt{1+x^2}) = 0$
11. (исп.) $(3\sin x\,\sin y - 4\cos x\,\sin y)y' = \sqrt[4]{\cos^4 y - \sin^2 y + 1}$
12. (исп.) $x^2y' - \dfrac{(y^3-1)x^2}{y^3+1}[\dfrac{1}{3\sin x - 2\cos x} + \sqrt{1+x^2}]$
13. (септ 07) $y' = y\sin^2 x\,\cos^4 x\,\ln y$

Хомогена диференцијална једначина

Једначина облика $y' = f(\frac{y}{x})$ је *хомогена* и сменом $z = \frac{y}{x}$ се своди на једначину која раздваја променљиве.

1. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$
2. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$
3. $y' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-2xy}$
4. (дом) $2x^3y' = y(2x^2-y^2)$
5. (дом) $y'x + y\ln x = y + y\ln y$
6. (дом) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$
7. (дом) $xy' = y + \sqrt{xy}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+3y+1}{3x+4y+1}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$

10. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y + x, \quad y(\dfrac{1}{2}) = 0$

11. $(y^2 - 3x^2)dy = -xydx$

12. $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$

13. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

14. (окт07) $y' = 2 + \sqrt{\dfrac{2x-y+4}{2y-4x}}$

15. (апр05) $x^3y' - x^2y - x(x+y)^2\sqrt{\dfrac{y}{2x+y}} = 0$

16. (јул07) $y' = \dfrac{x+y+1}{x+y+2}$

17. (септ02) $y' = \dfrac{x^3\cos^5 y \cdot \arccos x \cdot \sin^3 y}{\sqrt{1-x^2}}$

18. (окт06) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{x + \sqrt[3]{x^3+y^3} \cdot \sin^2(\frac{y}{x}) cos^4(\frac{y}{x})}$

Линеарна једначина

Једначина облика $y' + p(x)y = q(x)$ је *линеарна.*
Опште решење је $y = e^{-\int p(x)dx}(c + \displaystyle\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx)$.

1. $xy' = y + x\ln x$

2. $y'(x\cos y + \sin 2y) = 1$

3. Сменом $y = \ln z$ решити једначину $xy' = x^2e^{-y} + 2$.

4. (дом) $(xy + e^x) = xy'$

5. (дом) $(xy' - 1)\ln x = 2y$

6. (дом) $xy' + xy = 3x^2e^{-x} - y$

7. (окт03) $x(x+1)^2(y' - \sqrt{x}) = (3x^2 + 4x + 1)y$

8. (окт06) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{e^x \sin x}{x} + \dfrac{\cos x}{x(2+\cos x)}$

9. (септ06) $y' + yctg\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{\sin x(2\cos x + \sin x + 3)} = 1$

10. (окт07) $x^2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}y' = x^3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}y + 2x^2 + 3$

11. (окт04) $(y' - y)(x^2 + 2x + 5)^2 = x^2(2x+3)e^x$

12. (феб08) $y + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{4x-8}{(x^2+1)^2}$

Бернулијева једначина

Бернулијева једначина $y' + p(x)y = q(x)y^n,\ n \neq 0, 1$
се сменом $z = y^{1-n}$ своди на линеарну једначину.

1. $xy' + y - y^2 \ln x = 0$
2. $y' = -2ax^3y^3 - 2xy$
3. $xy' + xy^2 - y = 0$
4. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 + xy = 0$
5. $x^3y' - y^2 - x^2y = 0$
6. (дом) $(x + 1)(y' + y^2) + y = 0$
7. (дом) $y' = y^4 \cos x + ytgx$
8. (дом) $xy' = 2x^2\sqrt{y} + 4y$
9. (дом) $2y' + y^3x = y$
10. (јан08) $y' + \dfrac{2(1 + \sin x)y}{\cos x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$
11. (септ05) $xy' = y(xtgx - y\sqrt[3]{x^6 + 8}\cos x)$
12. (јул07) $y'\sqrt{y} - 2y^{\frac{3}{2}}ctgx = (\dfrac{2x^2 \sin x}{(1 + x^2)^2} + \dfrac{1}{\sin^2 x})$
13. (јун06) $xy' + \dfrac{2(3 - x^2)}{x^2 + 3}y - 2(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x^2 + x^4}} + \dfrac{1}{\sin^2 x - 5\sin x + 6})\sqrt{y}(x^2 + 3) = 0$
14. (јун02) $y' - (\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{x}{x^2 + 1})y - (xy^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}y^2) \cdot \dfrac{1}{|tg\frac{x}{2}|} = 0$
15. (окт05) $8xy' - y + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{y^3\sqrt[4]{x^4 + 1}} = 0$
16. $y' = \dfrac{1 + e^x}{e^x(\cos x + \sin x + 2)^2 y} - \dfrac{y}{2(1 + e^x)}$
17. (јун03) $xy' + 2y + x^2(\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}} + \sqrt{1 - x^2})y^{\frac{3}{2}} = 0$

Једначина тоталног диференцијала

Једначина облика $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ је *једначина тоталног диференцијала* ако задовољава услов $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Опште решење се може записати у једном од облика

$$\int Pdx + \int (Q - \frac{\partial}{\partial y}\int Pdx)dy = c \text{ или } \int Qdy + \int (P - \frac{\partial}{\partial x}\int Qdy)dx = c.$$

1. $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3) = 0$
2. $(\sin(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy = 0$
3. $(\dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} + 2xy - \dfrac{y}{x})dx + (\sqrt{1 + x^2} + x^2 - \ln x)dy = 0$

Интеграциони фактор

Ако је једначина облика $P(x,y)\lambda(x,y)\,dx + P(x,y)\lambda(x,y)\,dy = 0$ једначина тоталног диференцијала, онда је $\lambda = \lambda(x,y)$ њен *интеграциони фактор*. Одређује се из једначине

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{Q\frac{\partial \omega}{\partial y} - P\frac{\partial \omega}{\partial x}}\,d\omega.$$

1. (јул06) Доказати да једначина $(y\ln y + \dfrac{xy(2x+1)}{1-x^3})dx + x\ln x dy = 0$ има интеграциони фактор $z = z(v),\ \ v = xy$, па затим решити дату једначину.
2. (окт03) Доказати да једначина $\cos x dx + (\dfrac{1}{e^{2y} - e^y + 1} + y + \sin y + \sin x)dy = 0$ има интеграциони фактор $z = z(y)$, па затим решити дату једначину.
3. (јун02) Показати да једначина $(\dfrac{x^3}{(2-\cos x)^2} + \dfrac{x^3}{1+\sqrt{x^2+x+1}} + 2y^3)dx - x(x^2+3y^2)dy = 0$ има интеграциони фактор $z = z(x)$, па затим решити дату једначину.
4. (септ04) Доказати да једначина $2xy^2dx + (2x^2y + xy(y+3)(e^y+4) + x\sqrt{y(1-y)})dy = 0$ има интеграциони фактор $z = z(v),\ \ v = xy$, па затим решити дату једначину.
5. (јан05) Доказати да једначина $y(1+xye^x)dx + x(ye^x + \sqrt{1-y^2})dy = 0$ има интеграциони фактор $z = z(v),\ \ v = xy$, па затим решити дату једначину.
6. (окт07) Показати да једначина $(2x^2 + (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2))dx + 2xydy = 0$ има интеграциони фактор облика $z = z(v),\ \ v = x^2+y^2$ и затим је решити.
7. Решити $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$ знајући да је њен интеграциони фактор облика $z = z(x+y^2)$.
8. Испитати да ли је $z = z(x+y)$ интеграциони фактор једначине $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^3 - x^2)dy = 0$ па је затим решити.
9. Доказати да једначина $(x^2+y^2+1)dx - 2xydy = 0$ има интеграциони фактор $z = z(y^2-x^2)$, па затим решити дату једначину.
10. Доказати да једначина $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$ има интеграциони фактор $z = z(y^2+x^2)$, па затим решити дату једначину.

Једначине које нису решене преко првог извода

1. $y = y'^2 + e^{y'}$
2. $y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1$
3. $ay' + by'^2 = x,\ \ a, b \in R$
4. $y - yy'^2 - 2y'x = 0$
5. $y = y'(1 + y'\cos y')$
6. $x = y' + \sin y'$
7. (септ07) $y - xy' - y'^2 = 0$
8. (јул07) $y = 2xy' + y'^2$
9. (окт07) $y = 2xy' + ln^2 y'$
10. (апр02) $y - 3xy' = 1 + 3xy'^3 - yy'^2$
11. (нов99) $xy' = y - (x+1)tgy'$