Особина 1:

Ако је функција f интеграбилна (а тиме и дефинисана) на интерлаву $[-a, a]$, онда је

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(t)dt. \qquad .$$

Другим речима, вредност интеграла не зависи од тога како именујемо променљиву већ само од тога како подинтегрална функција зависи од те променљиве и које су границе интеграла који рачунамо.□

Особина 2:

Нека је $a > 0$.

Ако је функција f парна и интеграбилна (а тиме и дефинисана) на интерлаву $[-a, a]$, онда је

$$(*) \qquad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Ако је функција f непарна и интеграбилна (а тиме и дефинисана) на интерлаву $[-a, a]$, онда је

$$(**) \qquad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Доказ:

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \ldots$. У првом интегралу уведемо смену $x = -t$ а онда (на осову особине 1) преозначимо t са x. □

Задатак 1: Израчунати $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx$.

Решење:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx \overset{(*)}{=} 2\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx = 2I, \text{ за } I = \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx.$$

Први начин: Бирамо смену која ће интервал интеграције довести на симетричан.

$$\left[\begin{array}{c} \text{смена:} \quad x = t + \frac{\pi}{2} \\ dx = dt \\ x = \pi \Longleftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \Longleftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ \sin x = \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t \\ \cos x = \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t \end{array}\right] \quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(t + \frac{\pi}{2}) \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} dx + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} dx \overset{(*),(**)}{=}$$

$$= 0 + \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} dx = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin t)}{\sqrt{\sin^2 t + 1}} = \pi \ln|\sin t + \sqrt{\sin^2 t + 1}|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Други начин: Бирамо смену која неће да промени интервал интеграције а подинтегрална функција да „погодно” трансформише.

$$\left[\begin{array}{c} \text{смена:} \quad x = \pi - t \\ dx = -dt \\ x = \pi \Longleftrightarrow t = 0 \\ x = 0 \Longleftrightarrow t = \pi \\ \sin x = \sin(\pi - t) = \sin t \\ \cos x = \cos(\pi - t) = -\cos t \end{array}\right] \quad I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t) \sin t (-1) dt}{\sqrt{\cos^2 t + 1}} = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{\sqrt{\cos^2 t + 1}} dt = \pi \int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{\cos^2 t + 1}} dt -$$

$$\int_{0}^{\pi} \frac{t \sin t}{\sqrt{\cos^2 t + 1}} dt = \pi \int_{0}^{\pi} \frac{-d(\cos t)}{\sqrt{\cos^2 t + 1}} - I = -\pi \ln(\cos t + \sqrt{\cos^2 t + 1})|_{0}^{\pi} - I = 2\pi \ln(1 + \sqrt{2}) - I.$$

$I = 2\pi \ln(1 + \sqrt{2}) - I$, па $I = \pi \ln(1 + \sqrt{2})$.

Дакле, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx = 2\pi \ln(1 + \sqrt{2})$. □

Задатак 2: Израчунати $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} dx$.

Решење: Означимо са I тражени интеграл. $\begin{bmatrix} \text{смена:} \quad x=-t \\ dx=-dt \\ x=1 \Longleftrightarrow t=-1 \\ x=-1 \Longleftrightarrow t=1 \end{bmatrix}$ $I=\int_1^{-1}\frac{1}{(e^{-t}+1)(-t^2+1)}(-1)dt=$

$=\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{(e^t+1)(t^2+1)}dt \overset{\text{Особина1}}{=} \int_{-1}^{1}\frac{e^x}{(e^x+1)(x^2+1)}dx.$

Дакле,

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$$
$$I=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$$
$$+\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{1+e^x}{(e^x+1)(x^2+1)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+1)}dx=\operatorname{arctg}x|_{-1}^{1}\Longrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

□

У овом задатку смо користили две чињенице. Једна је везана за израз $\frac{1}{1+e^x}$, а друга за $\frac{1}{1+x^2}$.

(†) Ако x замени са $-x$ у $\frac{1}{1+e^x}$ добије се $\frac{e^x}{1+e^x}$, а збир почетног и крајњег израза је 1.

(‡) Ако x замени са $-x$ у $\frac{1}{1+x^2}$, ништа се не мења.

Задатак 2 се, имајући у виду (‡), може уопштити на следећи начин: За парну функцију f, дефинисану и интеграбилну на $[-a,a]$ посматрајмо интеграл $I=\int_{-b}^{b}\frac{1}{1+e^x}f(x)dx$ и уведимо у њега смену као у задатку 2 $\begin{bmatrix} \text{смена:} \quad x=-t \\ dx=-dt \\ x=b \Longleftrightarrow t=-b \\ x=-b \Longleftrightarrow t=b \end{bmatrix}$ $I=\int_{b}^{-b}\frac{1}{1+e^{-t}}f(-t)(-1)dt \overset{(\dagger)(\ddagger)}{=} \int_{-b}^{b}\frac{e^t}{1+e^t}f(t)dt \overset{\text{Особина2}}{=}$ $\int_{-b}^{b}\frac{e^x}{1+e^x}f(x)dx.$

$$2I=I+T=\int_{-b}^{b}\frac{1}{1+e^x}f(x)dx+\int_{-b}^{b}\frac{e^x}{1+e^x}f(x)dx=\int_{-b}^{b}f(x)dx.$$

Задатак 3: Израчунати $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{(e^x+1)}dx.$

Задатак 4: Израчунати $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{|\ln x|}{x(x+1)}dx$ сменом $x=\frac{1}{t}$, при чему је a произвољан позитиван реалан број.

Задатак 5: Израчунати $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$ сменом $x=-t$.

Задатак 6: Израчунати $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{arctg^2x}{(e^x+1)(x^2+1)}dx.$

Задатак 7: Израчунати $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x\cos x}{(e^x+1)}dx.$

Задатак 8: Израчунати $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{(e^x+1)\sqrt{\cos^2 x+1}}dx.$

Задатак 9: Израчунати $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(3^x+1)(x^2+1)}dx.$

- Ако се уместо $\frac{1}{1+e^x}$ посматра $\frac{1}{1+a^x}$ за неки (било који) попзитиван реалан број a, примећује се да особина која је важила у (†) важи и даље:

(†′) Ако се x замени са $-x$ у $\frac{1}{1+a^x}$ добије се $\frac{a^x}{1+a^x}$ а збир почетног и крајњег израза је 1.

Задатак 10: Израчунати $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{(4^x+1)}dx$.

Задатак 11: Израчунати $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{|\ln x|}{x(x+1)}dx$ сменом $x = \frac{1}{t}$, при чему је a произвољан позитиван реалан број .

Задатак 12: Израчунати $\int_{-1}^{1} \frac{(\frac{1}{4})^x}{((\frac{1}{4})^x+1)(x^2+1)}dx$ сменом $x = -t$.

Задатак 13: Израчунати $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{arctg^2 x}{(\pi^x+1)(x^2+1)}dx$.

Задатак 14: Израчунати $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x \cos x}{(\sqrt{2}^x+1)}dx$.

Задатак 15: Израчунати $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{((\frac{1}{e})^x+1)\sqrt{\cos^2 x+1}}dx$.

(‡) смо уопштили тако што смо приметили да од особина израза $\frac{1}{1+x^2}$ у задатку 2 користимо само то да он представља парну функцију.

(†) можемо да уопштимо тако што приметимо да $\frac{1}{1+e^x}$ представља функцију $g(x)$ чија је једина особина коју смо користили у задатку 2: $g(x)+g(-x)=1$. Ово може да се уопшти.

Особина 3: Нека је $a > 0$ и нека је функција f парна и интеграбилна (а тиме и дефинисана) на интерлаву $[-a, a]$ и нека је g интеграбилна функција на $[-a, a]$ таква да је $g(x)+g(-x) = k(= const)$. Тада је $\int_{-a}^{a} g(x)f(x)dx = \frac{k}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

Доказ: Означимо са $I = \int_{-a}^{a} g(x)f(x)dx$ и уведимо у њега смену као у задатку 2.

$$\begin{bmatrix} \text{смена:} \quad x = -t \\ dx = -dt \\ x = a \Longleftrightarrow t = -a \\ x = -a \Longleftrightarrow t = a \end{bmatrix} I = \int_{a}^{-a} g(-t)f(-t)(-1)dt = \int_{-a}^{a} (k-g(t))f(t)dt = \int_{-a}^{a} (k-g(x))f(x)dx.$$

$$2I = I + I = \int_{-a}^{a} g(x)f(x)dx + \int_{-a}^{a} (k-g(x))f(x)dx = k\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

$\square$