Programski paketi u matematici

Polinomi, fitovanje krivih i interpolacija

Polinomi

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
- n je stepen polinoma, a_i su koeficijenti
- U Matlabu polinom se predstavlja u obliku vrsta vektora čiji su elementi koeficijenti polinoma

Command Window

```
>> p1 = [4 3 2 1]; % p1=4x^3+3x^2+2x+1
>> p2 = [1 0 -1 2]; % p2=x^3-x+2
>> p1+p2

ans =

     5     3     1     3

>> polyval(p1,1)

ans =

    10
```

Neke komande za rad sa polinomima

- polyval(p,x) – izračunava vrednost polinoma p u x. Napomena: x može biti i vektor ili matrica i tada kao rezultat dobijamo vektor ili matricu sa vrednostima polinoma u traženim tačkama:

Command Window

```
>> % izracunajmo vrednost polinoma p(x)=x^3+2x-1 za x=0,1,2,3,4
>> p=[1 0 2 -1]; x=0:4; polyval(p,x)

ans =

    -1     2    11    32    71

>>
```

Koreni polinoma:

- r = roots(p) – rezultat je kolona vektor sa vrednostima korena ili nula polinoma p
- p = poly(r) – za poznate vrednosti korena polinoma odredjuje koeficijente polinoma tako da vodeći koeficijent bude jednak 1

Command Window

```
>> % polinom p=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)
>> p=[1 -6 11 -6]; r=roots(p)

r =

    3.0000
    2.0000
    1.0000

fx >>
```

```
>> p=[2 3 4 5 6];r=roots(p)

r =

   0.3369 + 1.2587i
   0.3369 - 1.2587i
  -1.0869 + 0.7653i
  -1.0869 - 0.7653i

fx >>
```

Sabiranje polinoma:

- Polinome sabiramo tako što saberemo koeficijente uz iste stepene. Ukoliko sabiramo polinome različitih stepena, moramo dopuniti polinom nižeg stepena nulama, kao u primeru:

```
>> p1=[2 3 4 5 6];p2=[3 4 5];
>> p=p1+p2;
Error using  +
Matrix dimensions must agree.

>> p2 = [0 0 3 4 5]; p = p1 + p2

p =

     2     3     7     9    11

fx >>
```

Moženje polinoma:

- c = conv(a, b) – komanda koja kao rezultat daje koeficijente polinoma c koji predstavlja proizvod polinoma a i b proizvoljnog stepena.

```
>> a = [1 0 0 -1 2]; b = [2 1 0]; c = conv(a,b)

c =

     2     1     0    -2     3     2     0

>> % c=(x^4-x+2)(2x^2+x)=2x^6+x^5-2x^4+3x^3+2x
```

Deljenje polinoma:

- [q,r] = deconv(u, v) – u=qv+r, odnosno q je količnik, a r ostatak koji se dobija pri deljenju polinoma u polinomom v

```
>> [a b] = deconv([1 2 0 1],[1 -1 2])   % x^4+2x^3+1=(x^2-x+2)*a+b

a =

     1     3


b =

     0     0     1    -5
```

```
>> conv(a,[1 -1 2])+b

ans =

     1     2     0     1
```

provera

Izvodi polinoma

- k = polyder(p) – kao rezultat dobijamo vektor k čiji su elementi koeficijenti polinoma p’
- k = polyder (a, b) - kao rezultat dobijamo vektor k čiji su elementi koeficijenti polinoma a’b + ab’ (izvod proizvoda)
- [n d] = polyder(u,v) - kao rezultat dobijamo vektor k čiji su elementi koeficijenti polinoma (u’v - uv’)/v^2 (izvod količnika)

Primer:

Command Window

```
>> a =[ 1 0 0 -1]; b = [1 0 2]; % a=x^3-1, b=x^2+2
>> k1=polyder(a)   % k1=3*x^2

k1 =

     3     0     0

>> k2=polyder(b) % k2=2x

k2 =

     2     0

>> k3=polyder(a,b)   %k3=k1*b+a*k2

k3 =

     5     0     6    -2     0
```

```
>> [n d] = polyder(a,b)

n =

     1     0     6     2     0


d =

     1     0     4     0     4

>>
```

```
>> k3-conv(k1,b)-conv(a,k2)

ans =

     0     0     0     0     0
```

provera

Zadaci: Knjiga poglavlje 8.6.

1. Grafički predstaviti polinom $y = -0.4x^4 + 7x^2 - 20.5x - 28$ u domenu -5<=x<=4.
2. Koristeći Matlabove naredbe izračunati (x+1.4)(x-0.4)x(x+0.6)(x-1.4) i grafički predstaviti dati polinom za -1.5<=x<=1.5.
3. Podeliti polinom $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 48$ polinomom $x^3 - 3x^2 + 2$.
4. Proizvod tri uzastopna prirodna broja je 1716. Odrediti te brojeve.

Zadatak 5

- Aluminijumska cisterna za gorivo je oblika cilindra sa spoljašnjim dijametrom jednakim 30 inča i visinom 50 inča. Debljina zidova cisterne je t, a dno i vrh su 25% deblji. Odrediti t ako je težina cisterne 152lb, a specifična težina aluminijuma je 165 lb/ft^3.

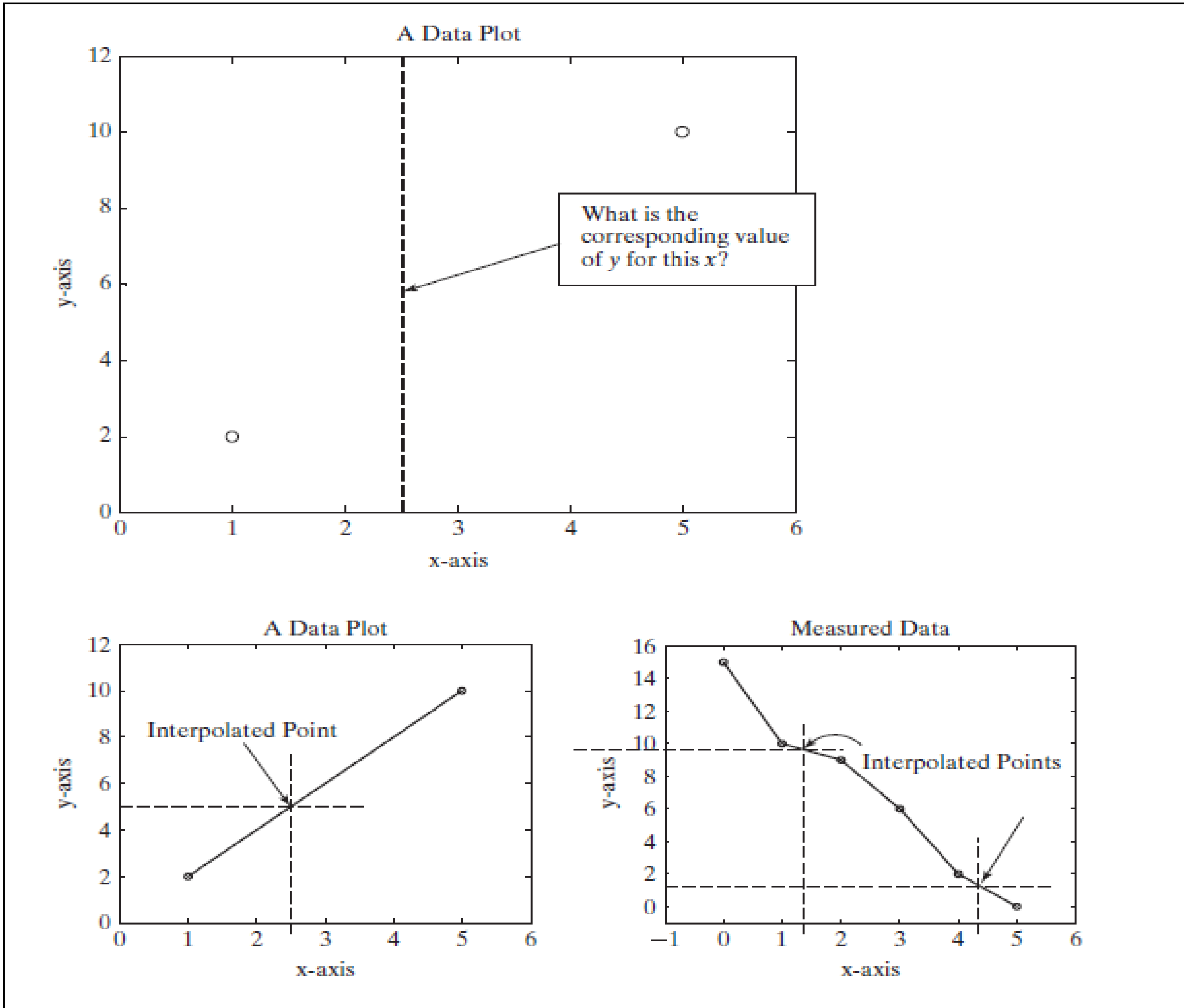
Zadatak 6

- Od kartona oblika pravougaonika dimenzija 40x22 cm napravljena je pravougaona kutija isecanjem kvadrata stranice x iz uglova pravougaonika i savijanjem tako dobijenih bočnih strana.

1. Izraziti zapreminu V tako dobijene kutije kao polinom od x
2. Nacrtati grafik V u zavisnosti od x
3. Odrediti x ako je zapremina 1000cm kubnih
4. Odrediti vrednost x-a za koju je zapremina kutije maksimalna.

Interpolacija

- Interpolacija predstavlja procenu ili umetanje vrednosti između dve poznate vrednosti
- Najčešće se koristi interpolacija polinomima
- yi = interp1(x, y, xi, ’method’) – linearna interpolacija, gde je x monoton vektor čiji elementi su vrednosti nezavisne promenljive, y je vektor čiji elementi su vrednosti zavisne promenljive, xi je koordinata nezavisne promenljive u kojoj procenjujemo vrednost i može biti skalar ili vektor.
- Napomena : u prethodnoj naredbi je BROJ 1
- ‘method’ – opciono - ‘nearest’, ‘linear’, ‘spline’, ‘pchip’



A Data Plot
What is the corresponding value of y for this x?
y-axis
x-axis
A Data Plot
Interpolated Point
y-axis
x-axis
Measured Data
Interpolated Points
y-axis
x-axis

Primer

- Za vrednosti x = [0,1,2,3,4,5] izračunati vrednosti funkcije y = exp(x)*sin(3x) i skicirati grafik funkcije za 0 <=x<=5.5. Zatim primenom metoda linear, spline i pchip izračunati vrednosti funkcije za x = 1.8, 3.5 i 5.2 i predstaviti ih na grafiku različitim simbolima. Obratiti pažnju na rezultat za x = 5.2.

Zadatak:

- Za podatke u tabeli oceniti vrednost un.energije u za T=215 C, kao i kolikoj temp. odgovara u= 2600 KJ/kg.

Temperature, °C	Internal Energy *u*, kJ/kg
100	2506.7
150	2582.8
200	2658.1
250	2733.7
300	2810.4
400	2967.9
500	3131.6

Source: Data from Joseph H. Keenan, Frederick G. Keyes, Philip G. Hill, and Joan G. Moore, *Steam Tables, SI units* (New York: John Wiley & Sons, 1978).

Zadatak:

- Proširiti tabelu tako da daje v, u i h na svakih 25 stepeni između 100 i 500 step.

Table 13.3 Properties of Superheated Steam at 0.1 MPa (Approximately 1 atm)

Temperature, °C	Specific Volume, v, m^3/kg	Internal Energy, u, kJ/kg	Enthalpy, h, kJ/kg
100	1.6958	2506.7	2676.2
150	1.9364	2582.8	2776.4
200	2.172	2658.1	2875.3
250	2.406	2733.7	2974.3
300	2.639	2810.4	3074.3
400	3.103	2967.9	3278.2
500	3.565	3131.6	3488.1

Source: Data from Joseph H. Keenan, Frederick G. Keyes, Philip G. Hill, and Joan G. Moore, *Steam Tables, SI units* (New York: John Wiley & Sons, 1978).

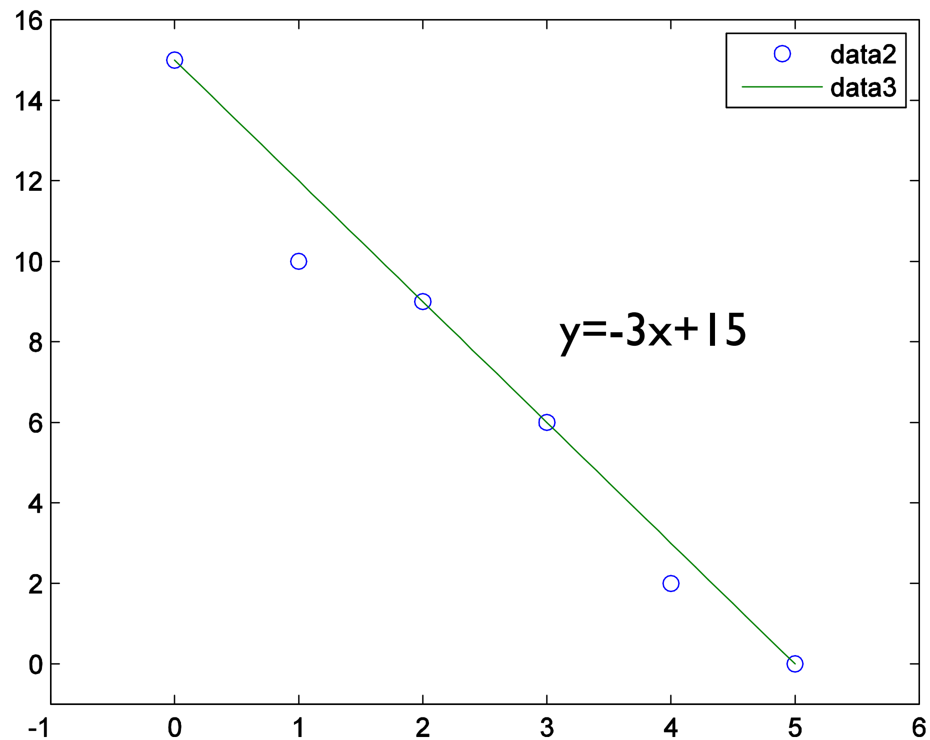
Fitovanje krivih polinomijalnim funkcijama

- Postupak formulisanja funkcije f(x) koja aproksimira nepoznatu zavisnost tako da odstupanja eksperimentalnih vrednosti od računskih procena budu relativno mala zove se fitovanje
- p = polyfit(x,y,n) – tačke čije su koordinate date vektorima x i y fituje se krivom koja predstavlja grafik polinoma stepena n sa koeficijentima datim vektorom p
- U slučaju kada se podaci fituju linearnom funkcijom, proces fitovanja nazivamo linearna regresija ili polinomom stepena n, n>1, polinomna regresija

Primer:

x = 0:5; y = [15, 10, 9, 6, 2, 0];

plot(x,y, 'o');



Korišćenje interaktivnih alata za fitovanje

- Posle grafičkog prikaza skupa podataka u Figure Window-u korisnik može izabrati opciju Tools→Basic Fitting i zatim na grafiku interaktivno odabrati željene opcije.
- Izborom opcije Plot residuals korisnik može da prati koliko daleko je svaka tačka od izračunate linije
- Opcija Data statistics

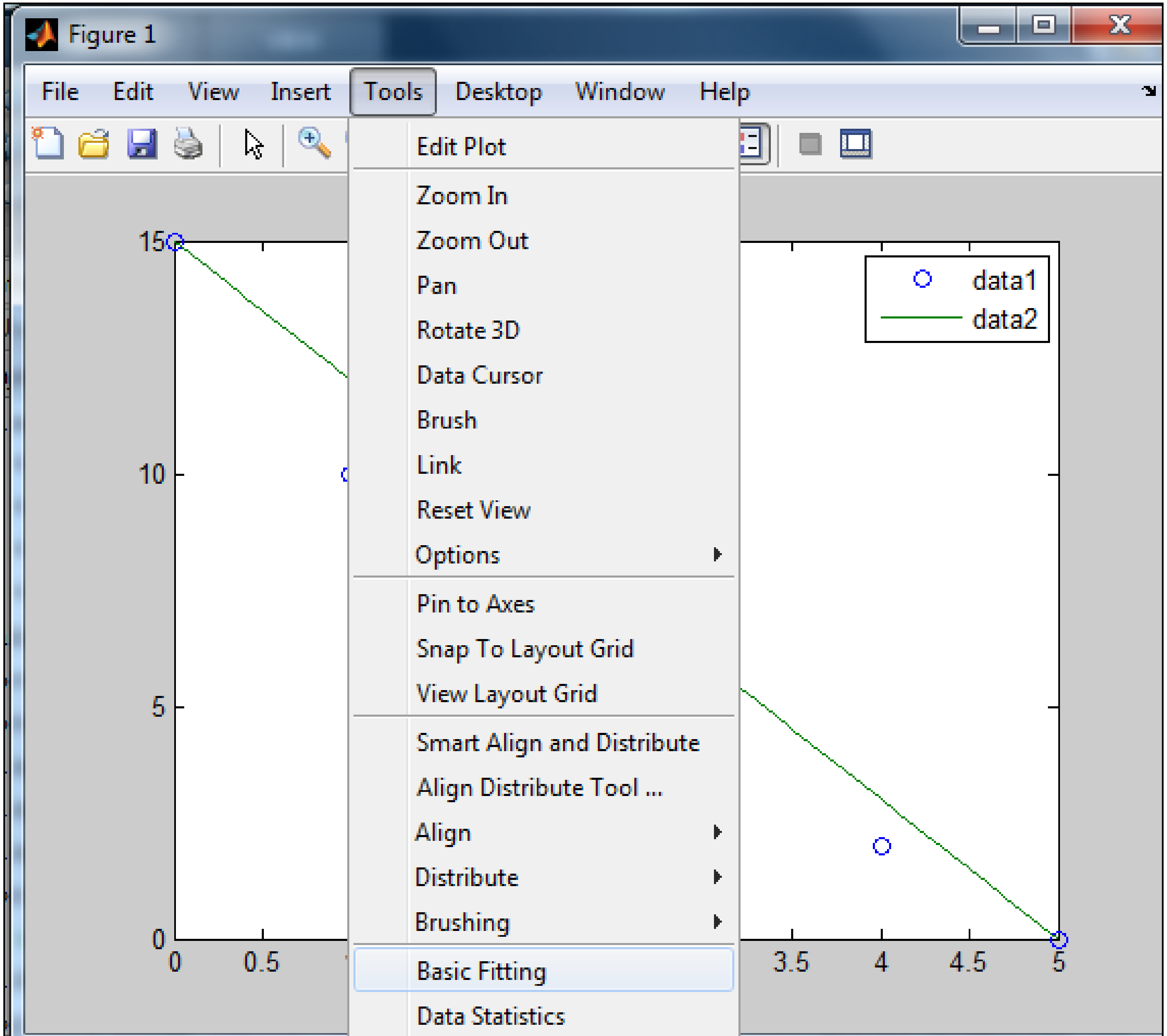
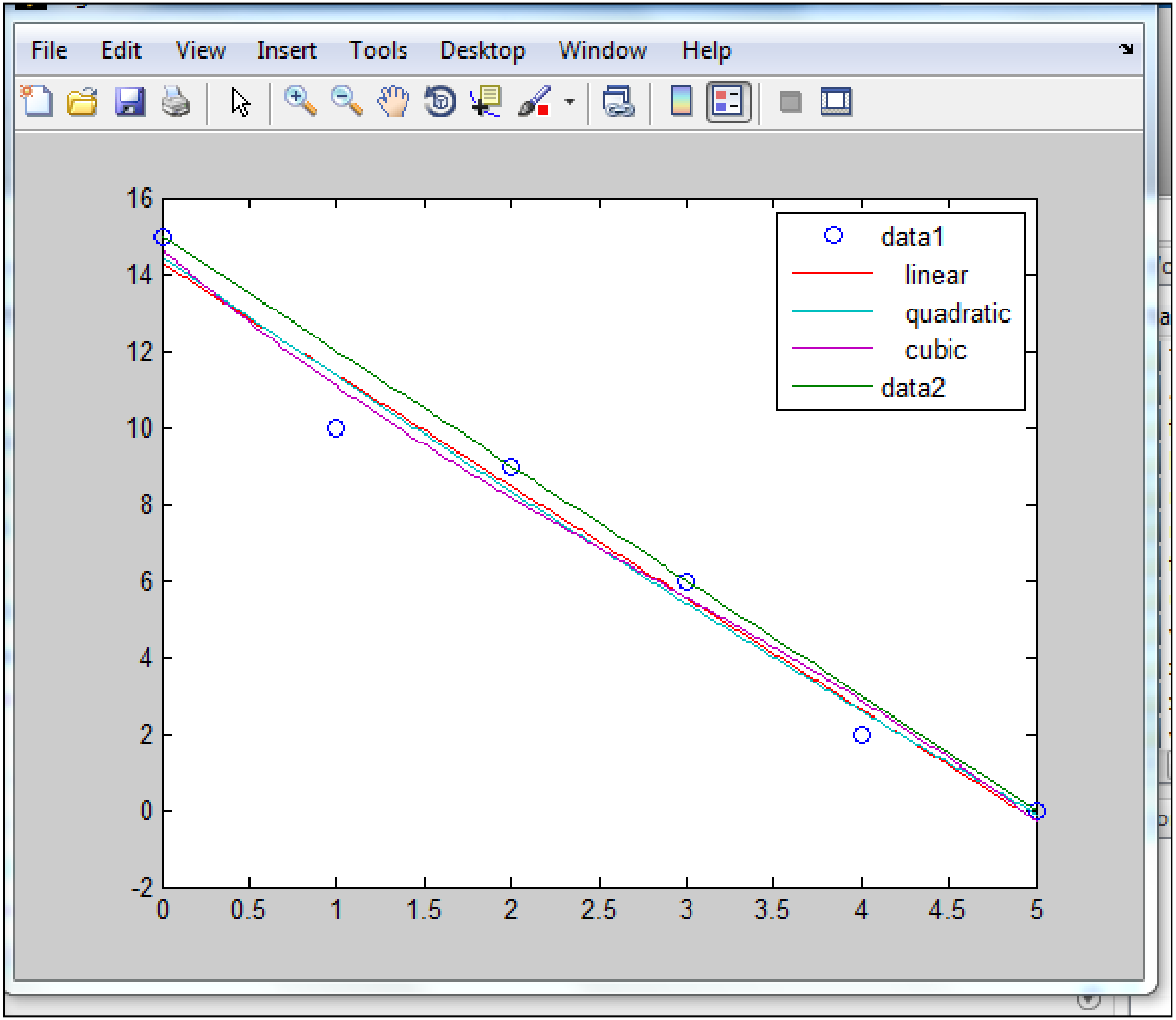
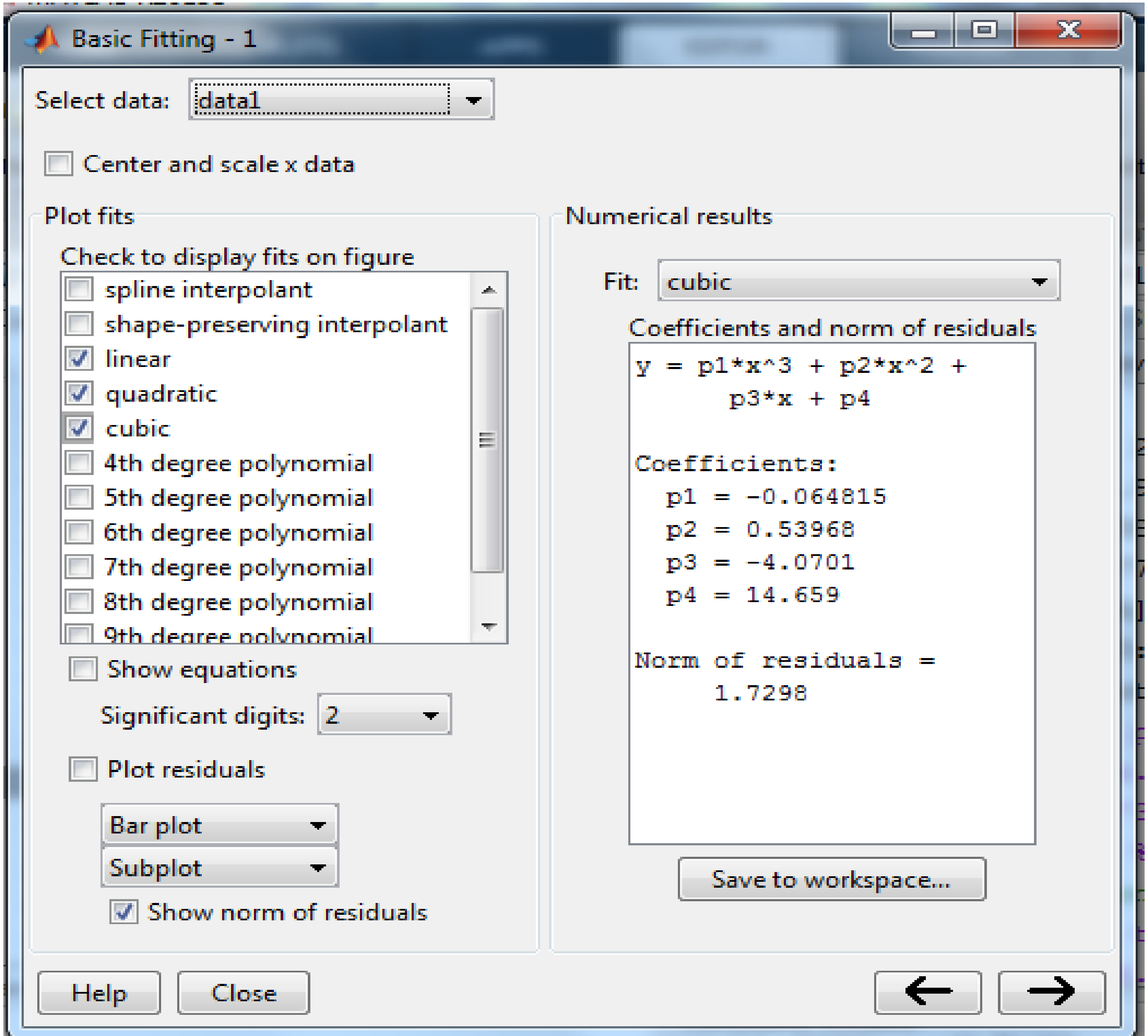


Figure 1
File
Edit
View
Insert
Tools
Desktop
Window
Help
Edit Plot
Zoom In
Zoom Out
Pan
Rotate 3D
Data Cursor
Brush
Link
Reset View
Options
Pin to Axes
Snap To Layout Grid
View Layout Grid
Smart Align and Distribute
Align Distribute Tool ...
Align
Distribute
Brushing
Basic Fitting
Data Statistics
data1
data2
15
10
5
0
0
0.5
3.5
4
4.5
5


File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
data1
linear
quadratic
cubic
data2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


Basic Fitting - 1
Select data:
data1
Center and scale x data
Plot fits
Check to display fits on figure
spline interpolant
shape-preserving interpolant
linear
quadratic
cubic
4th degree polynomial
5th degree polynomial
6th degree polynomial
7th degree polynomial
8th degree polynomial
9th degree polynomial
Show equations
Significant digits:
2
Plot residuals
Bar plot
Subplot
Show norm of residuals
Numerical results
Fit:
cubic
Coefficients and norm of residuals
y = p1*x^3 + p2*x^2 +
p3*x + p4
Coefficients:
p1 = -0.064815
p2 = 0.53968
p3 = -4.0701
p4 = 14.659
Norm of residuals =
1.7298
Save to workspace...
Help
Close

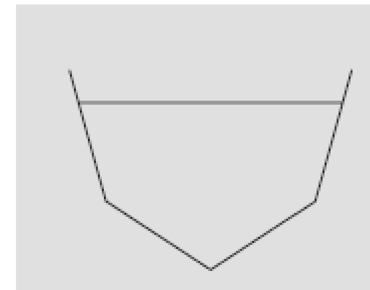
Fitovanje još nekim karakterističnim funkcijama:

- Stepena funkcija $y = bx^m$, p=polyfit(log(x), log(y),1)
- Eksponencijalna funkcija $y = be^{mx}$ komanda p=polyfit(x, log(y),1) ili $y = b10^{mx}$ komanda p=polyfit(x, log10(y),1)
- logaritamska funkcija $y = mln(x) + b$ komanda p=polyfit(log(x), y,1) ili $y = mlog(x) + b$ komanda p=polyfit(log10(x), y,1)
- Recipročna funkcija $y = \frac{1}{mx+b}$ komanda p=polyfit(x, 1./y,1)

Zadatak

- Odvod za vodu je oblika

kao na slici. Poznat je protok vode za određene visine:



visina = [1.7 1.95 2.6 2.92 4.04 5.24]

tok = [2.6 3.6 4.03 6.45 11.22 30.61]

Odrediti linearnu, kvadratnu i kubnu jednačinu za fitovanje podataka, i nacrtati sve tri funkcije za visine između 0 i 6 metara. Koja jednačina najbolje predstavlja podatke?

Zadatak

- Temperatura ključanja vode na različitim visinama data je u tabeli. Odrediti linearnu funkciju koja najbolje fituje date podatke. Koristeći dobijenu funkciju proceniti temperaturu ključanja vode na 16000 ft. Skicirati date podatke i dobijenu linearnu funkciju.

h (ft)	0	2000	5000	7500	10000	20000	26000
T (F)	212	210	203	198	194	178	168

Zadatak

- Broj bakterija Nb izmeren u različitim trenucima t dat je u tabeli. Odrediti eksponencijalnu funkciju koja najbolje fituje date podatke u obliku Nb=Nexp(at). Koristeći dobijenu funkciju proceniti broj bakterija posle 60 min. Skicirati grafik.

t (min)	10	20	30	40	50
Nb	15000	215000	335000	480000	770000

Ispitni zadatak

- Najpre izracunati vrednost tgx za

x = [0:1 : 0:05 : 1]. Zatim odrediti polinom četvrtog stepena koji najbolje aproksimira dobijene vrednosti tangensa. Nacrtajte grafik funkcije tgx i dobijenog polinoma u istom grackom prozoru i dati legendu.