



Matematički programski paketi
u saobraćaju i transportu

Matematičke operacije
sa vektorima i
matricama

Sabiranje i oduzimanje

- Operacije sabiranja (+) i oduzimanja (-) moguće je primeniti **SAMO** na vektorima iste dužine, ili za sabiranje i oduzimanje vektora i skalara
- Podsetimo se da matrice istog formata sabiramo (oduzimamo) tako što sabiramo (oduzimamo) elemente na istim pozicijama u matricama i rezultat je matrica istog formata.

Primeri u matlabu:

```
>> format compact; nizA=[1 2 3]; nizB=[-1 2 -2];nizA+nizB,nizA-nizB
```

```
ans =
```

```
0    4    1
```

```
ans =
```

```
2    0    5
```

```
>> matricaA=[1 2;3 4];matricaB=[4 5;0 1]; matricaA+matricaB
```

```
ans =
```

```
5    7
```

```
3    5
```

```
>> matricaA+nizA %ne mozemo sabirati matrice razlicitih formata
```

```
Error using +
```

```
Matrix dimensions must agree.
```

```
>> % OBRATITE PAZNJU - kada sabiramo matricu i broj, matlab svakom elementu matrice dodaje taj broj
```

```
>> matricaA=5, matricaB=7
```

```
matricaA =
```

```
5
```

```
ans =
```

```
-3    -2
```

```
-7    -6
```

```
>> ones(3)+4
```

```
ans =
```

```
5    5    5
```

```
5    5    5
```

```
5    5    5
```

Množenje matrica-podsećanje

- Matrice A i B možemo množiti samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B, tj. kada je matrica A formata $m \times k$ B mora biti formata $k \times n$, i rezultat će biti matrica C formata $m \times n$
- Množenje matrica nije komutativno
- Kvadratne matrice možemo stepenovati
 $A^n = AA \dots A$
- Matricu množimo brojem tako što svaki njen element pomnožimo tim brojem

Primeri u matlabu:

```
>> A=[1 2 3;2 4 2; 5 6 1; 4 7 2]
A =
     1     2     3
     2     4     2
     5     6     1
     4     7     2

>> % da AB bilo definisano matrica B mora biti formata 3xk
>> B=[2 3; 3 4; 1 1]
B =
     2     3
     3     4
     1     1

>> % mnozenje matrica oznacava se sa *
>> A*B
ans =
    11    14
    18    24
    29    40
    31    42

>> B*A
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.
```

fx >>

```

>> C=[2 4; 5 6]
C =
     2     4
     5     6
>> D=[1 3;7 2]
D =
     1     3
     7     2
>> C*D
ans =
    30    14
    47    27
>> D*C
ans =
    17    22
    24    40
>> 2*C
ans =
     4     8
    10    12
>> 4*C-3*D'
ans =
     5    -5
    11    18

```

```

A =
     1     2     3
>> B=[3;5;7]
B =
     3
     5
     7
>> A*B
ans =
    34
>> B*A
ans =
     3     6     9
     5    10    15
     7    14    21
>> % postoji i operacija dot
>> C=[4 5 6]
C =
     4     5     6
>> A*C
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.
>> dot(A,C)
ans =
    32
fx >>

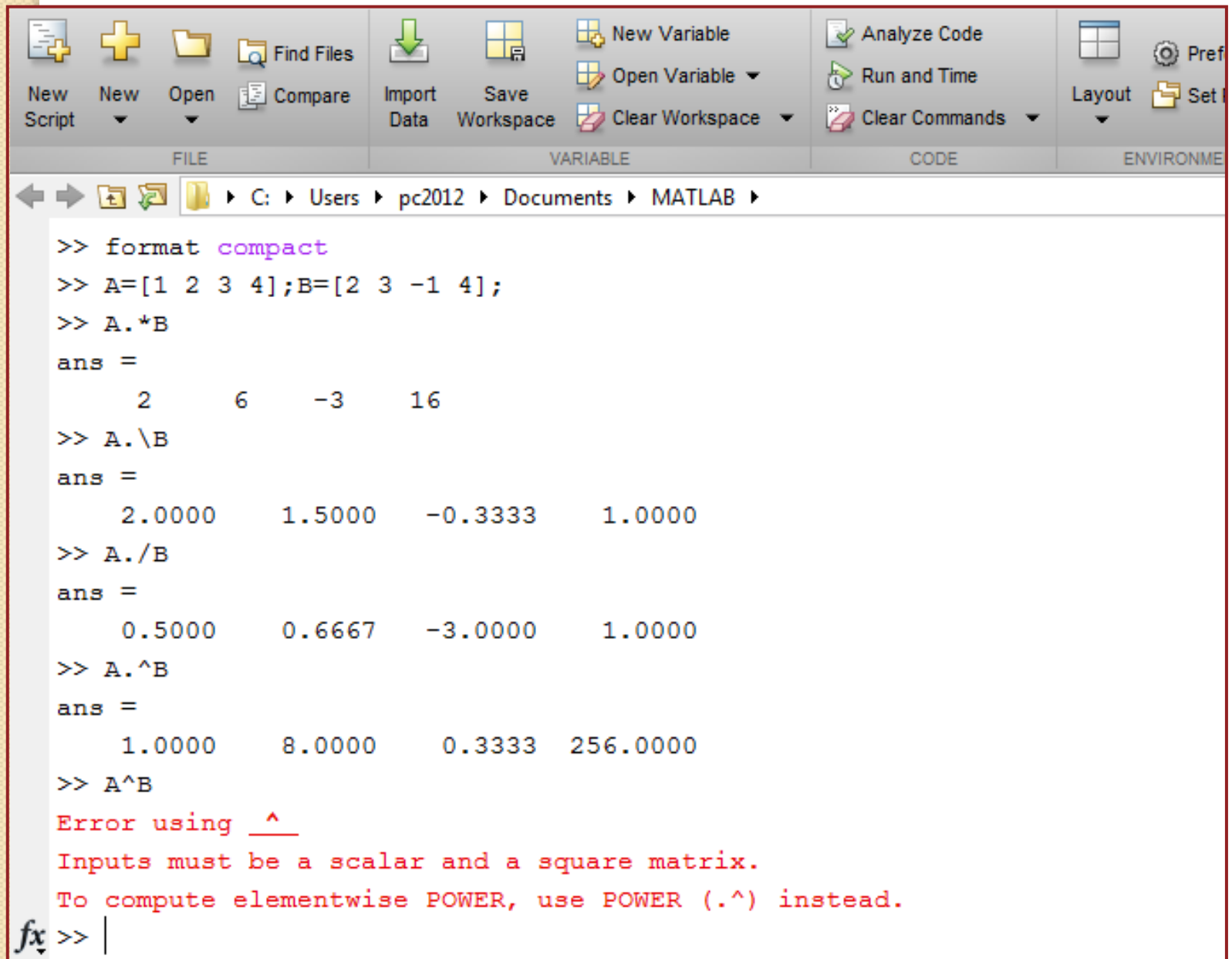
```

Operacije tipa “element po element”

- Sabiranje i oduzimanje su po definiciji operacije “element po element”
- Množenje matrica nije, zato uvodimo \cdot^* operaciju na sledeći način

$$\begin{aligned} [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \cdot^* [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] \\ = [a_1 b_1 \ a_2 b_2 \ \dots \ a_n b_n] \end{aligned}$$

- Slično uvodimo deljenje element po element $\cdot /$, stepenovanje element po element $\cdot ^\wedge$



The image shows the MATLAB software interface. The top toolbar includes icons for New Script, New, Open, Compare, Import Data, Save Workspace, New Variable, Open Variable, Clear Workspace, Analyze Code, Run and Time, Clear Commands, Layout, and Set. The command window shows the following code and output:

```
>> format compact
>> A=[1 2 3 4];B=[2 3 -1 4];
>> A.*B
ans =
     2     6    -3    16
>> A.\B
ans =
     2.0000     1.5000    -0.3333     1.0000
>> A./B
ans =
     0.5000     0.6667    -3.0000     1.0000
>> A.^B
ans =
     1.0000     8.0000     0.3333    256.0000
>> A^B
Error using ^
Inputs must be a scalar and a square matrix.
To compute elementwise POWER, use POWER (.^) instead.
fx >> |
```



```

HOME PLOTS APPS
New Variable Analyze Code
Open Variable Run and Time
Clear Workspace Clear Commands
Import Data Save Workspace
Find Files Compare
New Variable Open Variable Clear Workspace
New Open Compare Import Data Save Workspace Clear Workspace
FILE VARIABLE CODE
C:\Users\pc2012\Documents\MATLAB
>> A=[1 2 3;4 5 6];
>> B=[2 2 2; 2 2 2];
>> A.*B
ans =
     2     4     6
     8    10    12
>> A./B
ans =
    0.5000    1.0000    1.5000
    2.0000    2.5000    3.0000
>> A.\B
ans =
    2.0000    1.0000    0.6667
    0.5000    0.4000    0.3333
>> A.^B
ans =
     1     4     9
    16    25    36
>> A^2
Error using ^
Inputs must be a scalar and a square matrix.
To compute elementwise POWER, use POWER (.^) instead.
>> |

```

```

>> [2 3;4 5]^2
ans =
    16    21
    28    37
>> [2 3;4 5].^2
ans =
     4     9
    16    25
fx >> |

```

```

>> x=[1:5]'
x =
     1
     2
     3
     4
     5
>> y=[10:5:30]'
y =
    10
    15
    20
    25
    30
>> x.*y
ans =
    10
    30
    60
   100
   150
>> x*y
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.

```

Zadaci za vežbu:

- Gilat : sample problems 3-1 do 3-3 – pročitati kod kuće
- Gilat : 3.9 problems – uraditi zadatke 1-5, 9-14, 19, 21, 23, 25, 26
- Izračunati sumu $\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n^2}$.
- Izračunati sumu $\sum_{n=1}^{10000} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Inverzna matrica - podsećanje

- Inverzna matrica kvadratne matrice A je matrica B istog formata takva da je $AB=E$
- Kvadratna matrica A ima inverznu matricu ukoliko je njena determinanta različita od nule
- Obično je označavamo sa A^{-1}
- Matlab izračunava inverznu matricu matrice A ili kucanjem A^{-1} ili naredbom **inv(A)**

```

>> M=[2 1 4;4 1 8;2 -1 3]
M =
     2     1     4
     4     1     8
     2    -1     3
>> % proverimo najpre da li je det(M)=0
>> det(M)
ans =
     2
>> M^(-1)
ans =
     5.5000    -3.5000     2.0000
     2.0000    -1.0000         0
    -3.0000     2.0000    -1.0000
>> %proverimo da li je M*M^(-1) =E
>> ans*M
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

```

fx >>

```

>> B=[8/3 5; 2/3 3]
B =
     2.6667     5.0000
     0.6667     3.0000
>> inv(B)
ans =
     0.6429    -1.0714
    -0.1429     0.5714
>> ans*B
ans =
     1.0000    -0.0000
         0     1.0000
>> C=[4 2;2 1]
C =
     4     2
     2     1
>> inv(C)
Warning: Matrix is singular to working precision.
ans =
     Inf     Inf
     Inf     Inf
>> det(C)
ans =
     0

```

fx >>

Matrične jednačine i deljenje matrica u matlabu

- Rešenje matrične jednačine $AX=B$, ukoliko je $\det(A)$ različita od nule, je $X= A^{-1} B$. U matlabu zapisujemo ili sa $X= A^{-1} * B$ ili $X=A \setminus B$ (levo deljenje) i ovako zapisane operacije daju isti rezultat ali ih matlab drugacije izvršava
- Rešenje matrične jednačine $XA=B$, ukoliko je $\det(A)$ različita od nule, je $X= BA^{-1}$. U matlabu zapisujemo ili sa $X= B * A^{-1}$ ili $X=A / B$ (desno deljenje)

Zadatak – rešiti sistem linearnih jednačina:

- $3x + 2y - z = 10$, $-x + 3y + 2z = 5$,
 $x - y - z = -1$
- Možemo sistem zapisati i kao matričnu jednačinu $AX=B$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

MATLAB R2013a

HOME PLOTS APPS

New Script New Open Find Files Compare Import Data Save Workspace New Variable Open Variable Clear Workspace

FILE VARIABLE

C: > Users > pc2012 > Documents > MATLAB >

```
>> A=[3 2 -1;-1 3 2; 1 -1 -1]
A =
     3     2    -1
    -1     3     2
     1    -1    -1

>> B=[10;5;-1]
B =
    10
     5
    -1

>> X=inv(A)*B
X =
   -2.0000
    5.0000
   -6.0000

>> A\B
ans =
   -2.0000
    5.0000
   -6.0000

fx >> |
```

Napomene:

- Postoji i naredba `linsolve(A,b)` koju koristimo za rešavanje sistema linearnih jednačina $Ax=b$
- Ukoliko sistem linearnih jednačina ima više rešenja Matlab to neće isticati, već daje jedno rešenje
- Ukoliko sistem linearnih jednačina nema rešenja, Matlab će vratiti najbliže približno rešenje

New
Script

New



Open

Find Files
CompareImport
DataSave
Workspace

New Variable



Open Variable



Clear Workspace



Analyze Code



Run and Time



Clear Commands



Layout



Preferences



Set Path

C: > Users > pc2012 > Documents > MATLAB >

```
>> % primer sistema koji ima beskonacno mnogo resenja
>> A=[1 -1 1; 2 3 -2]
A =
     1     -1     1
     2     3    -2
>> B=[10;0]
B =
    10
     0
>> linsolve(A,B)
ans =
     6.0000
    -4.0000
     0
>> %resenje je i x=4,y=4,...i svaki par koji zadovoljava 4*x1+x2=20
>> %resenje je i x=4,y=4,...i svaki par koji zadovoljava 4*x1+x2=20,x3=10
>> %primer sistema jednacina koji nema resenje
>> C=[1,-1;1,2;1,3];
>> D=[2 0 2]';
>> linsolve(C,D)
ans =
     1.5385
    -0.1538
fx >> % ali matlab nam ipak ispisuje neko "najblize" resenje!!!
```

Neke od ugrađenih funkcija u Matlab-u za rad sa nizovima i matricama

- **max(A), min(A)** – vraća vrednost maksimalnog odnosno minimalnog elementa u nizu A
- **[d,n]=max(A)** – vraća kao d maksimalnu vrednost elementa u A i kao n poziciju tog elementa u nizu
- **sum(A)** - vraća sumu svih elemenata niza A
- **mean(A)** – vraća srednju vrednost elemenata u nizu A
- **sort(A)** – sortira niz A u neopadajućem redosledu

```

MATLAB R2013a
HOME PLOTS APPS
New Script New Open Compare Import Data Save Workspace New Variable Open Variable Clear Worksp
FILE VARIABLE
C:\Users\pc2012\Documents\MATLAB
>> B=[4,6,88,91,52]
B =
     4     6    88    91    52
>> sort(B)
ans =
     4     6    52    88    91
>> mean(B)
ans =
    48.2000
>> sum(B)
ans =
    241
>> ans/5 % suma podeljena br.elemenata
ans =
    48.2000
>> C=[1 3 4; 5 4 2; 66 43 21]
C =
     1     3     4
     5     4     2
    66    43    21
>> sort(C)
ans =
     1     3     2
     5     4     4
    66    43    21
fx >>

```

```

>> A=[1 4 6 74 2]
A =
     1     4     6    74     2
>> max(A)
ans =
    74
>> [C,n]=max(A)
C =
    74
n =
     4
>> [D,m]=min(A)
D =
     1
m =
     1

```

```

>> A=[5 88 3; 4 66 2; 33 21 6]
A =
     5    88     3
     4    66     2
    33    21     6
>> sort(A,1) % uredjuje po kolonama
ans =
     4    21     2
     5    66     3
    33    88     6
>> sort(A,2) % uredjuje po vrstama
ans =
     3     5    88
     2     4    66
     6    21    33
fx >>

```

Neke komande za generisanje slučajnih promenljivih

- **rand** – generiše slučajnu veličinu između 0 i 1
- **rand(1,n)** – generiše n slučajnih veličina između 0 i 1
- **rand(n)** – generiše elemente kvadratne matrice reda n između 0 i 1
- **rand(n,m)** – generiše elemente matrice reda nxm između 0 i 1
- **randperm(n)** – generiše elemente niza dužine n kao slučajnu permutaciju od 1 do n
- **randi(imax)** – generiše slučajnu celobrojnu veličinu između i imax
- **randi([imin,imax],m,n)**

HOME PLOTS APPS

New Script New Open Find Files Compare Import Data Save Workspace New Variable Open Variable Clear Workspace Analyze Code Run and Time Clear Commands Layout Set Path Preferences

FILE VARIABLE CODE ENVIRONMENT

C:\Users\pc2012\Documents\MATLAB

```
>> rand
ans =
    0.8147

>> rand
ans =
    0.9058

>> rand(1,5)
ans =
    0.1270    0.9134    0.6324    0.0975    0.2785

>> rand(3)
ans =
    0.5469    0.1576    0.4854
    0.9575    0.9706    0.8003
    0.9649    0.9572    0.1419

>> randperm(6)
ans =
     6     1     5     3     2     4

>> %ukoliko nam je potreban slucajno izabran broj iz (a,b)
>> 4+rand*(5-4)
ans =
    4.8491

>> % generisati niz v od 6 elemenata sl.izabranih iz (-5,3)
>> v=-5+(3-(-5))*rand(1,6)
v =
    2.4719    0.4299    1.0619    0.9451   -1.8622    0.2438
```

fx

```
FILE VARIABLE CODE ENVIRONMENT RESOURCES
C:\Users\pc2012\Documents\MATLAB
>> % ako zelimo da generisemo cele brojeve, koristimo randi (integer)
>> randi(35)
ans =
    20
>> randi([-22,44],3) % generise kv.matricu reda 3 sa slucajno izabranim celim brojevima iz [-22,44]
ans =
    39     28    -17
    -3     3    -19
    28    16     13
>> % navodjenjem odgovarajuceg formata generisemo proizvoljnu matricu
>> randi([-10,10],2,3)
ans =
     6    -8     -1
     9     1    -10
>> randn(5)
ans =
 -0.4390  -0.5445   1.7119  -1.0722  -0.1977
 -1.7947   0.3035  -0.1941   0.9610  -1.2078
  0.8404  -0.6003  -2.1384   0.1240   2.9080
 -0.8880   0.4900  -0.8396   1.4367   0.8252
  0.1001   0.7394   1.3546  -1.9609   1.3790
>> sum(ans)
ans =
 -2.1812   0.3880  -0.1056  -0.5114   3.7067
```

„Sparse“ matrice

- Ponekad je potrebno generisati matrice velikog formata čiji elementi su većinom jednaki 0. To radimo naredbom `sparse(i,j,v)` – gde sa i, j biramo koordinate elementa koji će imati vrednost v , dok će svi ostali elementi biti jednaki 0.
- Obratiti pažnju da i i j mogu biti i nizovi!

Zadaci za vežbu:

- Gilat : sample problems 3-4 i 3-5 – pročitati
- Gilat : 3.9 problems – uraditi zadatke 27, 28, 29, 31, 32
- Generisati slučajnu matricu reda 10 sa najviše dvocifrenim celobrojnim vrednostima, zatim u svakoj koloni odrediti najveće elemente i najmanji od njih, kao i najmanje elemente po vrstama i najveći od njih.

Zadatak iz Planiranja saobraćaja

- U Matlabu rešiti zadatak iz zbirke Planiranje saobraćaja



Zadatak 2: Na osnovu podataka iz tabele (Tabela 3.2) naći moguć oblik linearne zavisnosti između Y (broj kretanja na dan) i X (broj stanovnika), a zatim utvrditi ukoliko dođe do povećanja broja stanovnika zone 350 na 550 za koliko će se povećati broj kretanja.

Tabela 3.2 Podaci o broju kretanja i broj stanovnika po zonama

ZONA	1	2	3	4	5	6	7
Broj kretanja	480	600	750	900	1150	1750	2000
Broj stanovnika	240	290	360	420	500	800	950

Rešenje

- U slučaju linearne zavisnosti $y = \alpha + \beta x$ koeficijenti se računaju na sledeći način:

$$\beta = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \quad \alpha = \frac{\sum y}{n} - \frac{\beta(\sum x)}{n}$$

Zadatak

- Kategorijska analiza
- Zadatak rešiti i primenom struktura i primenom višedimenzionih matrica

Zadatak 3: Na osnovu socio-ekonomskih istraživanja jednog područja utvrđene su sledeće karakteristike koje su od značaja za kategorijsku analizu (Tabela 3.4).

Tabela 3.4 Broj kretanja u zavisnosti od karakteristika domaćinstva

Veličina domaćinstva	Broj automobila po domaćinstvu					
	0		1		2 +	
	Broj domaćinstava	Kretanja	Broj domaćinstava	Kretanja	Broj domaćinstava	Kretanja
1	1300	2730	2500	5750	42	100
2	547	1312	3450	9315	5700	19380
3 +	700	1820	2700	8640	8550	31635

Na osnovu prethodne tabele odrediti ukupan broj kretanja za zonu, ako se prognozira da će u nekom planskom periodu imati sledeće karakteristike (Tabela 3.5).

Tabela 3.5 Prognozirani broj domaćinstava u posmatranoj zoni

Veličina domaćinstva	Broj automobila po domaćinstvu		
	0	1	2 +
1	27	100	5
2	35	152	270
3 +	15	89	520