



Programski paketi u matematici

Numeričke tehnike u Matlabu

Rešavanje jednačina oblika $f(x)=0$

$x = \text{fzero}(\text{funkcija}, x_0)$

- Funkcija čiju nulu tražimo mora biti uneta ili kao string ili kao funkcija koju kreira korisnik ili kao anonimna funkcija.
- x_0 je skalar u čijoj blizini tražimo nulu funkcije ili interval u kome se nula nalazi (u ovom slučaju funkcija mora imati suprotan znak na krajevima intervala). Dobar način da izaberemo x_0 je da prvo nacrtamo grafik funkcije.

Primer:

- $e^{0.5x} - \sqrt{x} = 3$

```
>> f = @(x)exp(0.5*x)-sqrt(x)-3
```

```
>> fplot(f,[0,5])
```

```
>> resenje = fzero(f,2)
```

- Pokušati poziv funkcije za $x_0 = 5, 10, 100, [2,5], [1,2]$
- Uraditi isti primer sa pozivom funkcije u vidu stringa.

Zadaci:

- Odrediti tri pozitivna korena jednačine
$$x^3 - 8x^2 + 17x + \sqrt{x} = 10.$$
- Odrediti pozitivna rešenja jednačine $x^2 - 5x \sin(3x) + 3 = 0.$
- Za vežbu : zadaci iz knjige 9.6.5. i 9.6.6.

Minimum i maksimum funkcije

$$x = \text{fminbnd}(\text{funkcija}, x1, x2)$$

- funkcija se zadaje na isti način kao u naredbi fzero
- $x1$, $x2$ predstavljaju granice intervala na kome tražimo minimum
- x je vrednost minimuma funkcije na $[x1, x2]$
- Maksimum funkcije F tražimo kao minimum funkcije $-F$
- Pozivom $[x, vrmin] = \text{fminbnd}(f, x1, x2)$ dobijamo vrednost x -a u kojoj funkcija ima min kao i vrednost tog minimuma $vrmin$

Primer

- Odrediti minimum i maksimum funkcije

$$f(x) = \frac{x-2}{((x-2)^2+2)^{1.8}}$$

```
>> f9 = @(x) (x-2)/((x-2)^2+2)^(1.8)
```

```
>> fplot(f9,[-10,10])
```

```
>> [xmin,f9min] = fminbnd(f9,-10,10)
```

```
>> f9minus = @(x) -(x-2)/((x-2)^2+2)^(1.8)
```

```
>> xmax= fminbnd(f9minus,-10,10)
```

Zadaci:

- (9.6.10) Od papira je napravljen fišek oblika konusa zapremine 250 cm^3 . Odrediti poluprečnik r i visinu h konusa tako da za pravljenje konusa bude upotrebljena minimalna količina papira.
- (9.6.13) Odrediti stranice a i b pravougaonika maksimalne površine koji je upisan u elipsu $\frac{x^2}{19^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

Numerička integracija

$$\int_a^b f(x)dx$$

q = integral(f , a, b)

U starijim verzijama Matlab:

q = quad(f , a, b) - Simpsonova metoda

q = quadl(f, a, b) - prilagodljiva Lobatto

q = trapz(x, y) - trapezoidna metoda kada se integrali funkcija data skupom tačaka čije x koordinate su date vektorom x a y koordinate vektorom y

Napomena: funkcija mora biti napisana u vektorskom obliku!

Primeri:

- $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx, \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

>> f = @(x) exp(-x.^2)

>> integral(f,-1,1) ili quad(f,-1,1)

>> integral(f,0,Inf) ili

integral(@(x) exp(x.^2),0,Inf)

- $\int_1^2 \frac{\cos(2x)}{x} dx$

>> integral(@(x) cos(2*x)./x,1,2)

- Zadatak 5: Brzina trkačkog auta u prvih 0:7 sekundi trke je $v = [0 \ 14 \ 39 \ 69 \ 95 \ 114 \ 129 \ 139]$ milja/sat. Odrediti rastojanje koje je auto prešao za to vreme.
- Za vežbu: 9.6.20, 9.6.22, 9.6.24, 9.6.27

Dvojni integral

$$q = \text{integral2}(\text{fun}, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max})$$

- fun je funkcija 2 promenljive koju integralimo, obavezno u vektorskom obliku zapisana
- x_{\min} i x_{\max} su granice za x
- y_{\min} i y_{\max} su granice za y , mogu biti brojevi ili funkcije od x , u kom slučaju ih zadajemo preko pokazivača na funkciju

Primeri:

- $\iint (x^2 + y^2) dx dy$, po domenu $x=1, x=2, y=0, y=1$.

>> $f = @(x,y) x.^2 + y.^2$

>> $\text{integral2}(f, 1, 2, 0, 1)$

- $\iint (x^3 + y^3) dx dy$, za $D: y = x^4, y = x^2$.

- Granice za y su funkcije od x :

>> $z1 = @(x,y) x.^3 + y.^3$

>> $\text{integral2}(z1, -1, 1, @(x)x.^4, @(x)x.^2)$

Zadatak 6:

- Izračunati:

$$I = \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, \quad D : x = 1, y = 2, x = 0, y = 0.$$

Zadatak 7:

- Izračunati

$$I = \iint_D e^{x+y} (1 - 2x + 3y) dx dy, \quad D : y = 1 - x, y \geq 0, x \geq 0.$$

Zadatak 8

- Izračunati:

$$I = \iint_D \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1.$$

Rešavanje (običnih) diferencijalnih jednačina

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Odrediti opseg vrednosti za x i inicijalnu vrednost za y
- Kreirati funkciju u editoru ili anonimnu funkciju
- Izabrati metodu
- Rešiti datu jednačinu

Metode u Matlabu:

- **ode45** - za probleme koji nisu kruti. Jedan korak. Metod Runge-Kutta. Prvi izbor za vecinu problema
- **ode23** - za probleme koji nisu kruti. Jedan korak. Često brži , ali manje tačan od ode45
- **ode15s** - za krute probleme. Više koraka. Koristiti ako ode 45 ne uspe.
- **ode23s** - za krute probleme. Jedan korak. Može da reši probleme koje ode15s ne može.
- **ode23t** - za umereno krute probleme
- **ode23tb** - za krute probleme. Često efikasniji od ode15s.

[x, y] =

ime_funkcije('ime_dat',x_opseg,y0)

- **ime_funkcije** : jedan od prethodno pobrojanih metoda, najčešće ode45 ili ode23
- **'ime_dat'**: ime funkcijske datoteke koja izračunava dy/dx za date vrednosti y i x
- **x_opseg** : vektor koji zadaje opseg gde rešavamo dif.jednačinu
- **y0**: početna ili inicijalna vrednost za y (početni uslov)
- **[x, y]** : rezultat komande

Primer:

- $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{y}}{4}, 1 \leq x \leq 5, y(1) = 1$
- Najpre u editoru napravimo funkciju:
function dydx = izvod(x,y)
dydx = sqrt(x)+x^2*sqrt(y)/4
end
- `[x y] = ode45(@izvod,[1,5],1)`
- `plot(x,y)`
- Probati: `[x y] = ode45(@izvod,[1:0.5:5],1)`
- Ili `izvod1 = @(x,y) sqrt(x)+x^2*sqrt(y)/4`
- `[x,y] = ode45(izvod1,[1,5],1)`

Primer 2:

- 9.6.30 iz knjige

```
zad9630 = @(x,y) sqrt(x*y)-0.5*y*exp(-  
0.1*x)
```

```
[x y] = ode45(zad9630,[0,4],6.5)
```

```
plot(x,y)
```

```
axis([0,4,5,10])
```

Zadatak 9:

- Najpre naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + y = \sin x$.

Nacrtati familiju opštih rešenja za $0 \leq x \leq 4\pi$, i za početne uslove $y(0) = -10:2:10$.

Na kraju, za $y(0) = -5$, $y(0) = 0$ i $y(0) = 5$ rešiti jednačinu koristeći ode45 naredbu i skicirati ta rešenja pa ih uporediti sa dobijenim grafikom za opšta rešenja.

Zadatak 10:

- Naći rešenje logističke jednačine $\frac{dx}{dt} = rx \frac{r-x}{K}$, najpre za $r = 2$, $K=10$, $x_0 = 0.1$, $0 < t < 10$. Zatim modifikovati funkciju $dx/dt = \text{logistic}(\dots)$ tako da istovremeno rešava jednačinu za dva različita parametra K . Rešiti i skicirati rešenja jednačine za $K=5$ i $K=10$, $x_0=0.1$.

Sistemi diferencijalnih jednačina

- Rešiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

za $0 < t < 10$ i $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

function `dx=sistem(t,x)`

`dx1=x(2);`

`dx2=-x(1);`

`dx=[dx1;dx2];`

```
t=[0 10];  
xinit=[1;0]; % pocetni uslovi  
[t,x]=ode45(@sistem,t,xinit); % rešava sistem  
jednačna  
subplot(3,1,1)  
plot(t,x(:,1)) % crtamo x1 u zavisnosti od t  
xlabel('t'); ylabel('x_1');  
subplot(3,1,2)  
plot(t,x(:,2))  
xlabel('t'); ylabel('x_2');  
subplot(3,1,3)  
plot(x(:,1),x(:,2)) % crtamo x2 u zavisnosti od x1  
xlabel('x_1'); ylabel('x_2');  
axis equal
```

Zadatak 11: Lotka Voltera prey predator system

- Rešiti sistem jednačina

$$\frac{dy_1}{dt} = ay_1 - by_1y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -ry_2 + cy_1y_2$$

sa vrednostima parametara $a = .5471$; $b = .0281$; $c = .0266$; $r = .8439$ i početnim uslovima $y_1(0) = 30$, $y_2(0) = 4$ za $0 < t < 20$.

Diferencijalne jednačine višeg reda

- Rešiti diferencijalnu jednačinu drugog reda $y'' + x^2 y' - y = \sin x$ sa početnim uslovima $y(0) = 1, y'(0) = 3$ za $0 < x < 5$.

function ydrizv = drugiizv(x,y);

ydrizv = [y(2); y(1)-x^2*y(2)+sin(x)];

Pozivamo je sa:

```
[x,y]=ode45(@drugiizv,[0,5],[1;3]);
```

```
plot(x,y(:,1))
```

Zadatak 12:

- Rešiti jednačinu $y'' - 3y' + 2y = 4xe^x$, za $y(0)=0$, $y'(0)=3$ i $0 \leq x \leq 5$. Skicirati dobijeno rešenje a zatim u drugom grafičkom prozoru skicirati rešenje dobijeno eksplicitnim izračunavanjem

$$y = -8e^x + 5e^{2x} + 2x + 3 - xe^x$$

i uporediti grafike.

Za vežbu

- Odabrati sa ispitnih rokova iz Matematike 2 i Matematike 3 po jednu diferencijalnu jednačinu prvog i drugog reda i rešiti ih ručno, pa skicirati opšte rešenje, a zatim je rešiti koristeći Matlab i skicirati tako dobijeno rešenje. Uporediti eksplicitno i Matlabovo rešenje.
- Prilagoditi rešavanje jednačine drugog reda jednačini trećeg reda i rešiti jednačinu $y''' - y' = \cos x$
- Rešiti neki dvojni integral iz Matematike 3.