



Programski paketi u matematici

Simbolička matematika

Simbolička matematika

- Matematika sa simbolima, npr. $a+a = 2a$
- Simboličke promenljive kreiraju se pomoću naredbe **sym**

```
>> a + a
```

Undefined function or variable 'a'.

```
>> a = sym('a')
```

```
>> a + a
```

```
ans = 2*a
```

Simbolički izrazi

- Mogu biti promenljive, brojevi ili izrazi

```
>> a = sym('a')
```

```
>> b = sym('15')
```

```
>> c = 15
```

c i b nisu isti objekat – pogledati variable editor

```
>> syms a b c x (Probati i syms a,b,c,x)
```

$F = a*x^2+b*x+c$ – F je isto simbolički izraz

Primer

- U jednostavnim izrazima mogu se izostaviti navodnici:

```
>> sym('11/8')
```

```
>> sym(11/8)
```

```
>> sym(11/8)+1
```

```
>> sym('11.2/8')
```

```
>> sym(11.2/8)
```

Izbegavati upotrebu decimalnih zapisa pod navodnicima

- Šta je rezultat komande `sym(exp(1))`?

Primer

```
>> syms a b x
```

```
>> a = x^2, b = x^3
```

```
>> a*b
```

```
>> a*x-b
```

```
>> a^12/b^8
```

```
>> b+5*x^3
```

Obratiti pažnju:

```
>> sym('z^3 + 2*z^3')
```

```
>> z = sym('z');
```

```
>> sym(z^3 + 2*z^3)
```

Naredba **pretty**

- Kada koristimo duge izraze, korisno je deklarirati promenljive na početku:

```
>> x = sym(x);
```

```
>> f = 512*x^4 + 11/8*x^2 + 756*x^(2/3)
```

- Inače bismo morali kucati:

```
>> g = sym(512)*x^(sym(4)) +  
sym(11)/sym(8)*x^sym(2) + ...
```

```
sym(756)*x^(sym(2)/sym(3))
```

```
>> f - g % ali su f i g svakako jednaki
```

```
>> pretty(f) - prikazuje rezultat u simbolickoj  
formi
```

Naredbe **simplify, collect, expand i factor**

```
>> x = sym('x'); % ili syms x
```

```
>> izraz = cos(x)^2 + sin(x)^2
```

```
>> simplify(izraz)
```

```
>> x = sym('x');
```

```
>> collect(x^2 + 4*x^3 + 3*x^2)
```

```
>> expand((x+2)*(x-1))
```

```
>> factor(ans)
```

```
>> factor(x^3+x^2+x+1)
```

Zamena numeričkih vrednosti umesto simboličkih promenljivih

- `subs(simbolicki_izraz,promenljiva,broj)`
- Izračunati vrednost funkcije
 $y=(x^2+3*x)*\exp(3*x)$ u tačkama 2, 2.5, 3, 3.5 i 4

```
>>syms x
```

```
>> y=(x^2+3*x)*exp(3*x)
```

```
>> subs(y, x, 2) % i tako redom tačku po  
tačku ili odjednom:
```

```
>> subs(y, x, [2:0.5:4])
```


Primer

- Izračunati vrednost

$$r = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \text{ za } x = 1, y = 2, z = 3.$$

- Rešenje:

```
>> syms x y z
```

```
>> r = sqrt(x^2 + 2*y^2 + 3*z^2)
```

```
>> A = subs(r, [x y z], [1 2 3])
```

```
>> double(A) % prikazuje A u decimalnom zapisu (konvertuje simbolicki rezultat u numericki )
```

Rešavanje jednačina

- `solve(jednacina)`
- `solve(jednacina, promenljiva)`

- Rešiti jednačinu $3x+8=0$

```
>> syms x, solve(3*x+8)
```

Ili:

```
>> jedn = 3*x+8==0
```

```
>> solve(jedn) % ili solve(jedn,x)
```

- Rešiti kvadratnu jednačinu

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

Rešavanje sistema jednačina

- `solve (jednacina1, jednacina2,...)`
- `solve(jednacina1, jednacina2,... promenljiva1, promenljiva2,...)`
- Rešiti sistem jednačina:

$$2x + 3y = 8, 3x - 4y = -5$$

- Rešenje:

```
>> syms x y
```

```
>> eq1 = 2*x+3*y == 8;
```

```
>> eq2 = 3*x-4*y == -5;
```

```
>> [xres, yres] = solve(eq1, eq2, x, y)
```

- Alternativa preko struktura:

```
>> res = solve(eq1, eq2, x, y)
```

```
>> xres = res.x
```

```
>> yres = res.y
```

Primer

- Rešiti sistem jednačina

$$4 * x + 3 * y - 2 * z = 5$$

$$3 * x - y + 4 * z = 6$$

$$5 * x - 2 * y - z = 7$$

i rešenja prikazati i u simboličkom i u numeričkom formatu.

- Rešiti jednačinu $a * x^2 + b * x + c = 0$ najpre po x , a zatim po a .

Crtanje grafika krive zadate simbolički

- `ezplot(f)` – po default-u crta od -2π do 2π
- `ezplot(f,[xmin,xmax,ymin,ymax])`
- Možemo koristiti i `fplot(f, domen)`

Limesi

- **limit(f,a)** izračunava $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- Odrediti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$

```
>> syms x
```

```
>> limit(sin(x)/x, x, 0)
```

```
>> expr = (x^2-1)/(x^2-5*x+6);
```

```
>> limit(expr, x, 2, 'right')
```

- **diff(f)** – izračunava prvi izvod funkcije
- **diff(f,n)** – izračunava n-ti izvod funkcije
- Odrediti ekstremne i prevojne tačke funkcije

$$y = \exp(x) * (3 * x - 2 * x^2)$$

Zadaci:

- Odrediti stacionarne tačke funkcije

$$y = 12x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 330x^2 + 600x + 2$$

i skicirati grafik funkcije za $-1 \leq x \leq 3$ i na njemu crvenom * oznaciti realne stacionarne tacke, a zatim prilagoditi ose koristeći naredbu axis(...)

- Skicirati drugi izvod funkcije $y = \frac{x^4}{1+x^2}$ za $-5 \leq x \leq 5$

Tejlorov i Maklorenov polinom

- **taylor(f)** – određuje Maklorenov polinom petog stepena funkcije f
- **taylor(f,x,a)** – određuje Tejlorov polinom petog stepena funkcije f u okolini tacke a
- **help taylor**
- Odrediti Maklorenov polinom treceg stepena funkcije $y = \exp(x) * (3 * x - 2 * x^2)$, kao i Tejlorov polinom sedmog stepena iste funkcije oko tacke $a=1$

Integrali – simboličko izračunavanje

- $\text{int}(f)$ izračunava $\int f dx$
- $\text{int}(f,x)$ ukoliko je funkcija f konstantna ili se u f pojavljuju i parametri
- $\text{int}(f,a,b)$ izračunava $\int_a^b f dx$
- Izračunati:
 - $\int (3e^x + x) dx$
 - $\int 6dx, \int \sin(ax) dx$
 - $\int_2^3 \frac{3x^2 + 3x + 12}{x(x-1)(x-2)} dx$
 - $\int x^x dx$ % obratiti paznju na rezultat

Primer

- Izračunati $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

```
>> syms x
```

```
>> f = 1/(1+x^2)
```

```
>> r = int(f,0,1)
```

```
>> pretty(r)
```

```
>> double(r)
```

- $\int \sqrt{e^x - 1} dx$

- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$

Rešavanje diferencijalnih jednačina

- `dsolve('jednacina')`
 - `dsolve('jednacina', 'promenljiva')`
 - Jednačinu koju rešavamo moramo uneti kao string i to tako što kucamo Dy umesto dy/dt , dalje D2y umesto $\frac{d^2y}{dt^2}$,...
 - $\frac{dy}{dt} = 4t + 2y$
- ```
>>dsolve('Dy=4*t+2*y')
```

# Drugi način

- Najpre kreirati diferencialnu jednacinu

$$dj = \text{diff}(y,t) == 4*t+2*y,$$

pa primeniti `dsolve`. Prethodno obavezno deklarirati da je  $y$  funkcija od  $t$  na sledeci način:

```
>> syms y(t)
```

```
>> dj = diff(y,t) == 4*t+2*y
```

```
>> dsolve(dj)
```

# Jednačine višeg reda. Partikularna rešenja.

- Najpre odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

a zatim i rešenje koje zadovoljava

$$y(0) = 0, y(1) = 3.$$

Na kraju, skicirati grafik tog rešenja za  $-0.5 \leq x \leq 3$  i oznaciti tacke  $(0,0)$  i  $(1,3)$ .

```
>> syms y(x)
```

```
>> dj = diff(y,x,2) + 5*diff(y,x) + 6*y == 0
```

```
>> opste = dsolve(dj)
```

```
>> partikularno = solve(DE, y(0)==0, y(1)==3)
```

# Zadaci:

- Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' = y, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Zatim skicirati grafik rešenja  $y(x)$  i prvog izvoda  $y'(x)$  crvenom crta-tacka linijom, dodati legendu.

- Isprobati:
- `expand(cos(2*x))`, `expand(sin(x+y))`,
- `syms f(x) g(x)`
- `diff(f + g, x)`
- `diff(f * g, x)`
- `diff(f / g, x)`