



# Programski paketi u matematici

Polinomi, fitovanje krivih i  
interpolacija

# Polinomi

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
- $n$  je stepen polinoma,  $a_i$  su koeficijenti
- U Matlabu polinom se predstavlja u obliku vrsta vektora čiji su elementi koeficijenti polinoma

```
Command Window
>> p1 = [4 3 2 1]; % p1=4x^3+3x^2+2x+1
>> p2 = [1 0 -1 2]; % p2=x^3-x+2
>> p1+p2

ans =

     5     3     1     3

>> polyval(p1,1)

ans =

    10
```

# Neke komande za rad sa polinomima

- **polyval(p,x)** – izračunava vrednost polinoma  $p$  u  $x$ . Napomena:  $x$  može biti i vektor ili matrica i tada kao rezultat dobijamo vektor ili matricu sa vrednostima polinoma u traženim tačkama:

```
Command Window
>> % izracunajmo vrednost polinoma p(x)=x^3+2x-1 za x=0,1,2,3,4
>> p=[1 0 2 -1]; x=0:4; polyval(p,x)

ans =

    -1     2    11    32    71

fx >>
```

# Koreni polinoma:

- $r = \text{roots}(p)$  – rezultat je kolona vektor sa vrednostima korena ili nula polinoma  $p$
- $p = \text{poly}(r)$  – za poznate vrednosti korena polinoma određuje koeficijente polinoma tako da vodeći koeficijent bude jednak 1

```
Command Window
>> % polinom p=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)
>> p=[1 -6 11 -6]; r=roots(p)

r =

    3.0000
    2.0000
    1.0000

fx >> |
```

```
>> p=[2 3 4 5 6];r=roots(p)

r =

    0.3369 + 1.2587i
    0.3369 - 1.2587i
   -1.0869 + 0.7653i
   -1.0869 - 0.7653i

fx >>
```

## Sabiranje polinoma:

- Polinome sabiramo tako što saberemo koeficijente uz iste stepene. Ukoliko sabiramo polinome različitih stepena, moramo dopuniti polinom nižeg stepena nulama, kao u primeru:

```
>> p1=[2 3 4 5 6];p2=[3 4 5];
>> p=p1+p2;
Error using +
Matrix dimensions must agree.

>> p2 = [0 0 3 4 5]; p = p1 + p2

p =

    2    3    7    9   11

fx >> |
```

# Moženje polinoma:

- $c = \text{conv}(a, b)$  – komanda koja kao rezultat daje koeficijente polinoma  $c$  koji predstavlja proizvod polinoma  $a$  i  $b$  proizvoljnog stepena.

```
>> a = [1 0 0 -1 2]; b = [2 1 0]; c = conv(a,b)

c =

     2     1     0    -2     3     2     0

fx >> % c=(x^4-x+2) (2x^2+x)=2x^6+x^5-2x^4+3x^3+2x
```

# Deljenje polinoma:

- $[q,r] = \text{deconv}(u, v)$  –  $u=qv+r$ , odnosno  $q$  je količnik, a  $r$  ostatak koji se dobija pri deljenju polinoma  $u$  polinomom  $v$

```
>> [a b] = deconv([1 2 0 1],[1 -1 2]) % x^4+2x^3+1=(x^2-x+2)*a+b
```

```
a =
```

```
    1    3
```

```
b =
```

```
    0    0    1   -5
```

```
>> conv(a,[1 -1 2])+b
```

```
ans =
```

```
    1    2    0    1
```

← provera

# Izvodi polinoma

- $k = \text{polyder}(p)$  – kao rezultat dobijamo vektor  $k$  čiji su elementi koeficijenti polinoma  $p'$
- $k = \text{polyder}(a, b)$  - kao rezultat dobijamo vektor  $k$  čiji su elementi koeficijenti polinoma  $a'b + ab'$  (izvod proizvoda)
- $[n \ d] = \text{polyder}(u, v)$  - kao rezultat dobijamo vektor  $k$  čiji su elementi koeficijenti polinoma  $(u'v - uv')/v^2$  (izvod količnika)



# Primer:

Command Window

```
>> a=[ 1 0 0 -1]; b = [1 0 2]; % a=x^3-1, b=x^2+2  
>> k1=polyder(a) % k1=3*x^2
```

k1 =

```
3 0 0
```

```
>> k2=polyder(b) % k2=2x
```

k2 =

```
2 0
```

```
>> k3=polyder(a,b) %k3=k1*b+a*k2
```

k3 =

```
5 0 6 -2 0
```

```
>> [n d] = polyder(a,b)
```

n =

```
1 0 6 2 0
```

d =

```
1 0 4 0 4
```

```
>>
```

```
>> k3-conv(k1,b)-conv(a,k2)
```

ans =

```
0 0 0 0 0
```

provera

## Zadaci: Knjiga poglavlje 8.6.

1. Grafički predstaviti polinom  $y = -0.4x^4 + 7x^2 - 20.5x - 28$  u domenu  $-5 \leq x \leq 4$ .
2. Koristeći Matlabove naredbe izračunati  $(x+1.4)(x-0.4)x(x+0.6)(x-1.4)$  i grafički predstaviti dati polinom za  $-1.5 \leq x \leq 1.5$ .
3. Podeliti polinom  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 48$  polinomom  $x^3 - 3x^2 + 2$ .
4. Proizvod tri uzastopna prirodna broja je 1716. Odrediti te brojeve.

## Zadatak 5

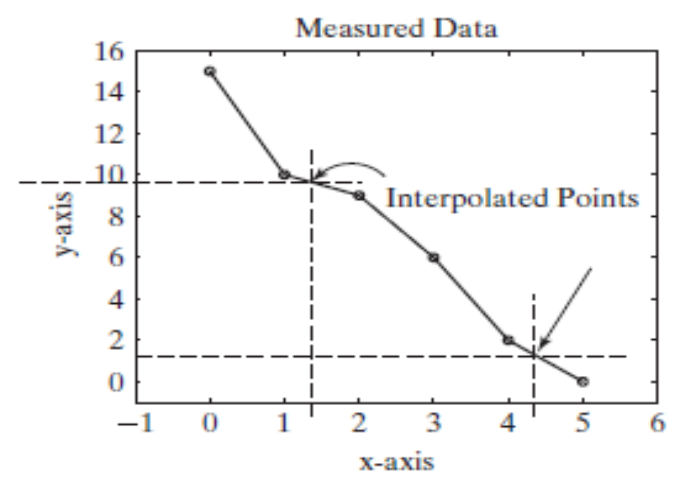
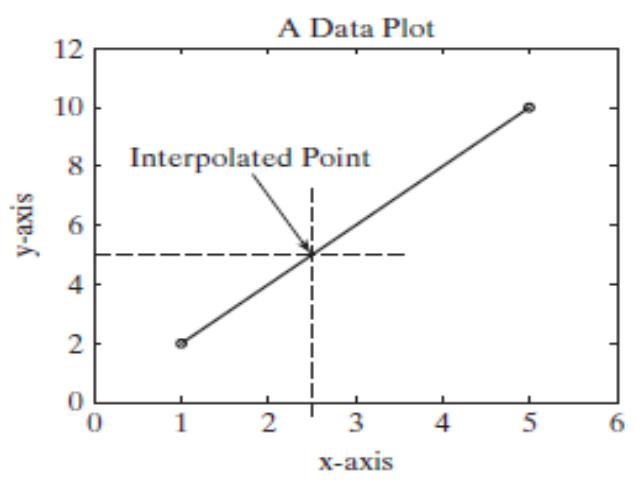
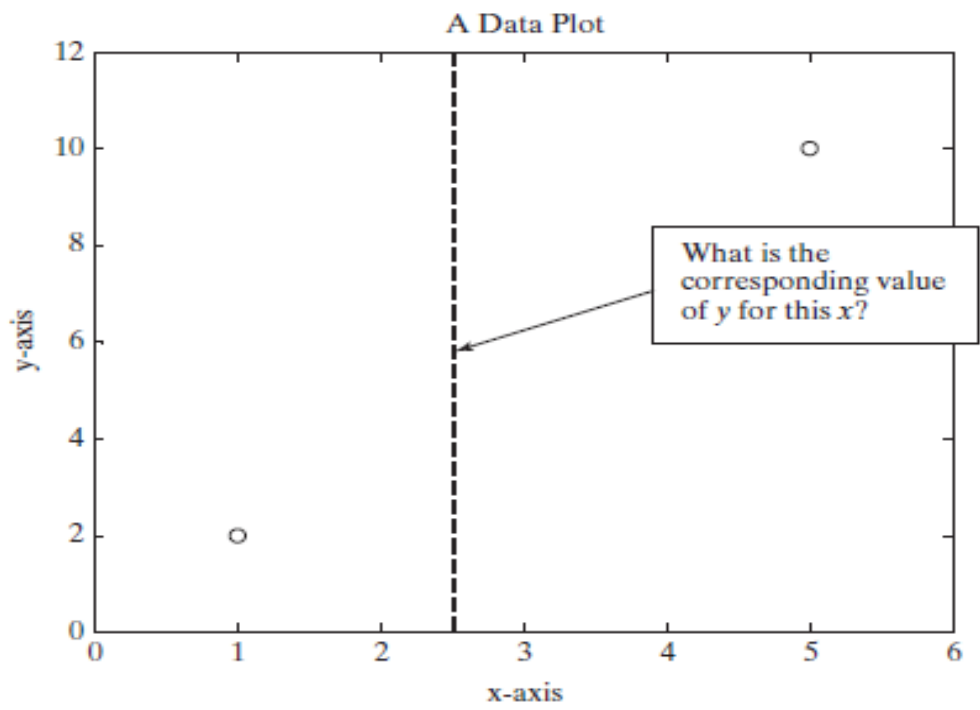
- Aluminijska cisterna za gorivo je oblika cilindra sa spoljašnjim dijametrom jednakim 30 inča i visinom 50 inča. Debljina zidova cisterne je  $t$ , a dno i vrh su 25% deblji. Odrediti  $t$  ako je težina cisterne 152lb, a specifična težina aluminijuma je 165 lb/ft<sup>3</sup>.

# Zadatak 6

- Od kartona oblika pravougaonika dimenzija 40x22 cm napravljena je pravougaona kutija isecanjem kvadrata stranice  $x$  iz uglova pravougaonika i savijanjem tako dobijenih bočnih strana.
  1. Izraziti zapreminu  $V$  tako dobijene kutije kao polinom od  $x$
  2. Nacrtati grafik  $V$  u zavisnosti od  $x$
  3. Odrediti  $x$  ako je zapremina 1000cm kubnih
  4. Odrediti vrednost  $x$ -a za koju je zapremina kutije maksimalna.

# Interpolacija

- Interpolacija predstavlja procenu ili umetanje vrednosti između dve poznate vrednosti
- Najčešće se koristi interpolacija polinomima
- $y_i = \text{interp}(x, y, x_i, \text{'method'})$  – linearna interpolacija, gde je  $x$  monoton vektor čiji elementi su vrednosti nezavisne promenljive,  $y$  je vektor čiji elementi su vrednosti zavisne promenljive,  $x_i$  je koordinata nezavisne promenljive u kojoj procenjujemo vrednost i može biti skalar ili vektor.
- Napomena : u prethodnoj naredbi je **BROJ 1**
- 'method' – opciono - 'nearest', 'linear', 'spline', 'pchip'



# Primer

- Za vrednosti  $x = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$  izračunati vrednosti funkcije  $y = \exp(x) * \sin(3x)$  i skicirati grafik funkcije za  $0 \leq x \leq 5.5$ . Zatim primenom metoda linear, spline i pchip izračunati vrednosti funkcije za  $x = 1.8, 3.5$  i  $5.2$  i predstaviti ih na grafiku različitim simbolima. Obratiti pažnju na rezultat za  $x = 5.2$ .

# Zadatak:

- Za podatke u tabeli oceniti vrednost un.energije  $u$  za  $T=215\text{ C}$ , kao i kolikoj temp. odgovara  $u= 2600\text{ KJ/kg}$ .

Temperature, °C	Internal Energy $u$ , kJ/kg
100	2506.7
150	2582.8
200	2658.1
250	2733.7
300	2810.4
400	2967.9
500	3131.6

Source: Data from Joseph H. Keenan, Frederick G. Keyes, Philip G. Hill, and Joan G. Moore, *Steam Tables, SI units* (New York: John Wiley & Sons, 1978).



# Zadatak:

- Proširiti tabelu tako da daje  $v$ ,  $u$  i  $h$  na svakih 25 stepeni između 100 i 500 step.

**Table 13.3 Properties of Superheated Steam at 0.1 MPa (Approximately 1 atm)**

Temperature, °C	Specific Volume, $v$ , m <sup>3</sup> /kg	Internal Energy, $u$ , kJ/kg	Enthalpy, $h$ , kJ/kg
100	1.6958	2506.7	2676.2
150	1.9364	2582.8	2776.4
200	2.172	2658.1	2875.3
250	2.406	2733.7	2974.3
300	2.639	2810.4	3074.3
400	3.103	2967.9	3278.2
500	3.565	3131.6	3488.1

Source: Data from Joseph H. Keenan, Frederick G. Keyes, Philip G. Hill, and Joan G. Moore, *Steam Tables, SI units* (New York: John Wiley & Sons, 1978).

# Zadatak iz saobraćaja:

Na osnovu podataka iz tabele naći moguć oblik linearne zavisnosti između Y (broj kretanja na dan) i X (broj stanovnika), a zatim utvrditi ukoliko je broja stanovnika 550 za koliko će se povećati broj kretanja.

$$Y = [480 \ 600 \ 750 \ 900 \ 1150 \ 1750 \ 2000];$$

$$X = [240 \ 290 \ 360 \ 420 \ 500 \ 800 \ 950];$$

Iz knjige – formula za procenu:

$$\beta = \frac{n \cdot \sum(xy) - \sum(x) \cdot \sum(y)}{n \cdot \sum(x^2) - (\sum x)^2}$$

$$\alpha = \frac{\sum(y)}{n} - \beta \cdot \frac{\sum(x)}{n}$$

$$y = \alpha + \beta \cdot x$$

Na kraju, proceniti broj kretanja koristeći interp1 naredbu.

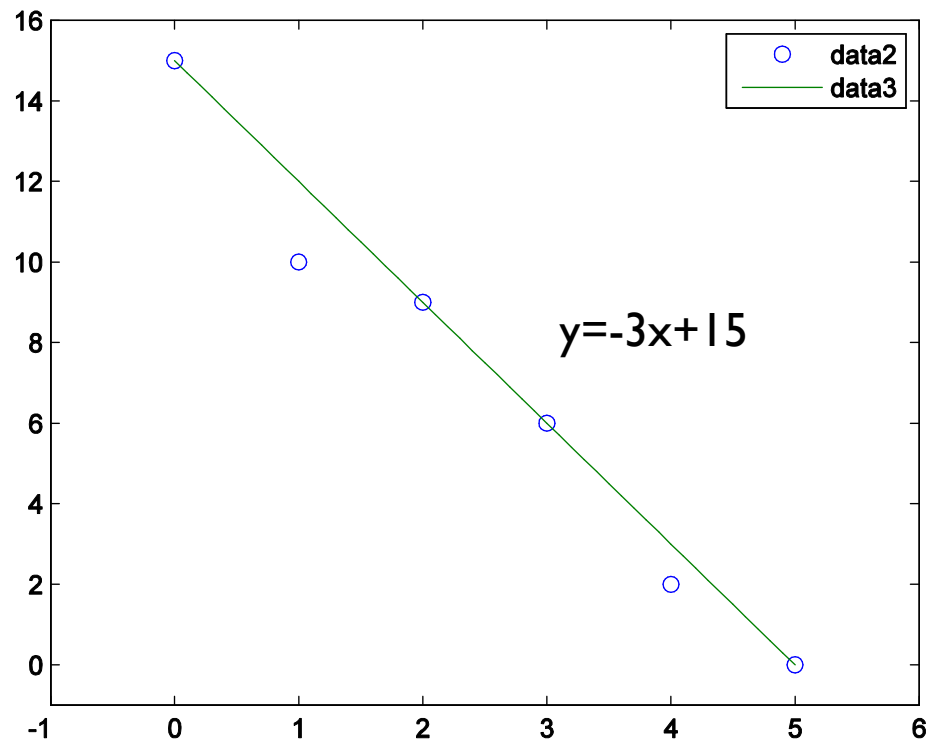
# Fitovanje krivih polinomijalnim funkcijama

- Postupak formulisanja funkcije  $f(x)$  koja aproksimira nepoznatu zavisnost tako da odstupanja eksperimentalnih vrednosti od računskih procena budu relativno mala zove se fitovanje
- $p = \text{polyfit}(x,y,n)$  – tačke čije su koordinate date vektorima  $x$  i  $y$  fituje se krivom koja predstavlja grafik polinoma stepena  $n$  sa koeficijentima datim vektorom  $p$
- U slučaju kada se podaci fituju linearnom funkcijom, proces fitovanja nazivamo linearna regresija ili polinomom stepena  $n$ ,  $n > 1$ , polinomna regresija

# Primer:

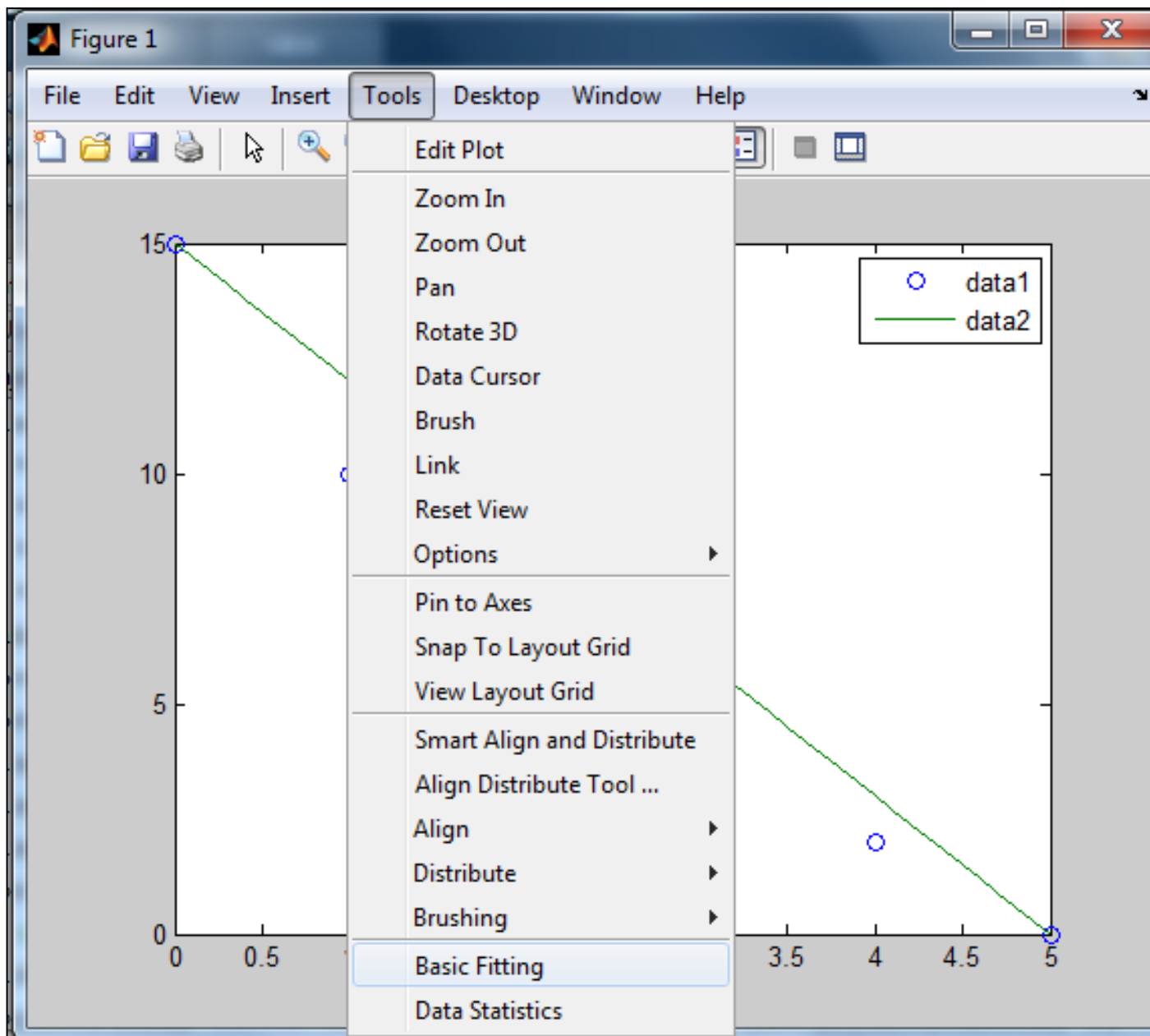
```
x = 0:5; y = [15, 10, 9, 6, 2, 0];
```

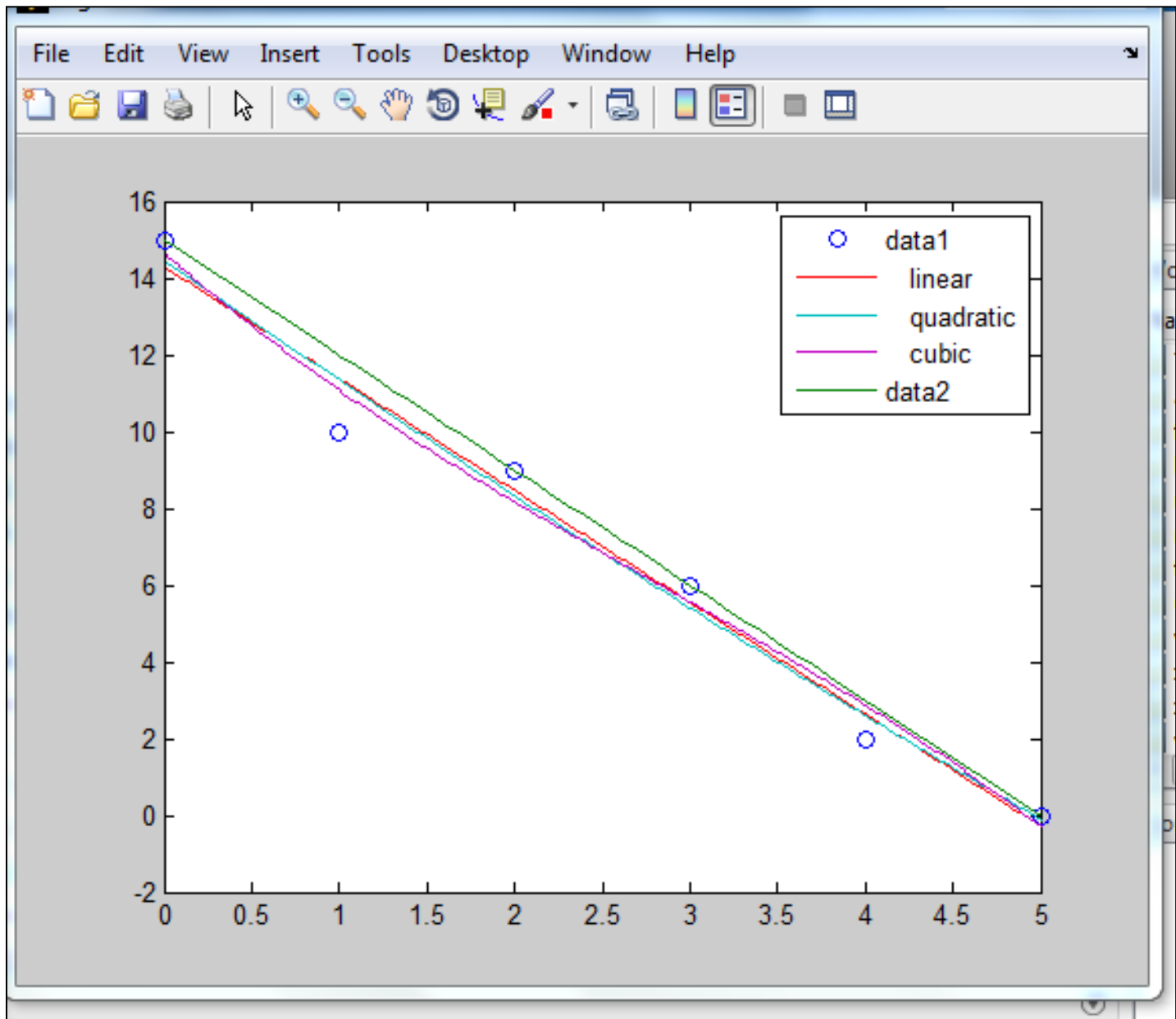
```
plot(x,y, 'o');
```

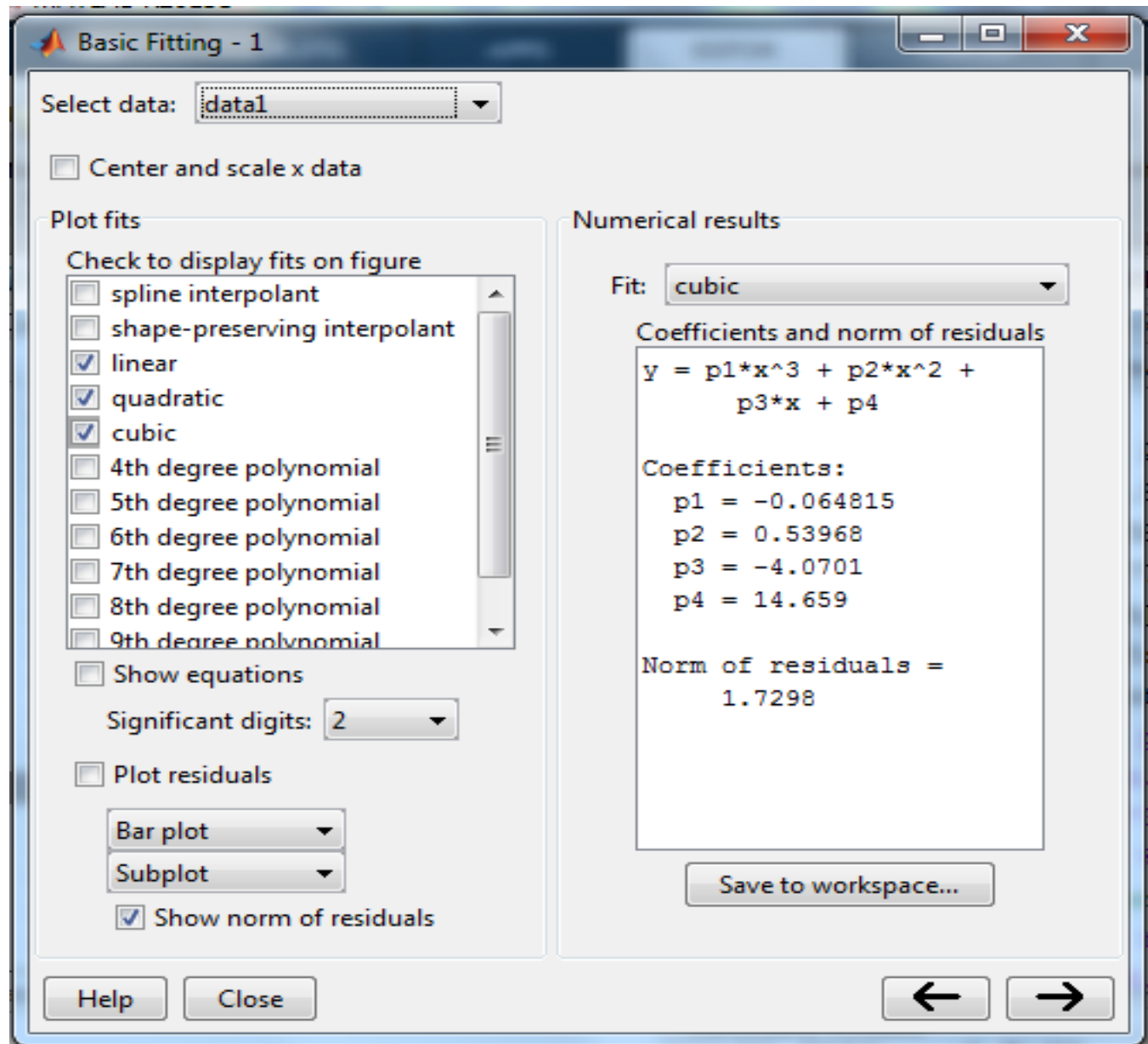


# Korišćenje interaktivnih alata za fitovanje

- Posle grafičkog prikaza skupa podataka u Figure Window-u korisnik može izabrati opciju **Tools**→**Basic Fitting** i zatim na grafiku interaktivno odabrati željene opcije.
- Izborom opcije **Plot residuals** korisnik može da prati koliko daleko je svaka tačka od izračunate linije
- Opcija **Data statistics**







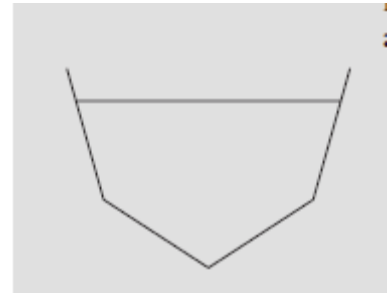


# Fitovanje još nekim karakterističnim funkcijama:

- Stepena funkcija  $y = bx^m$ ,  $p = \text{polyfit}(\log(x), \log(y), 1)$
- Eksponencijalna funkcija  $y = be^{mx}$  komanda  $p = \text{polyfit}(x, \log(y), 1)$  ili  $y = b10^{mx}$  komanda  $p = \text{polyfit}(x, \log_{10}(y), 1)$
- logaritamska funkcija  $y = m \ln(x) + b$  komanda  $p = \text{polyfit}(\log(x), y, 1)$  ili  $y = m \log(x) + b$  komanda  $p = \text{polyfit}(\log_{10}(x), y, 1)$
- Recipročna funkcija  $y = \frac{1}{mx+b}$  komanda  $p = \text{polyfit}(x, 1./y, 1)$

# Zadatak

- Odvod za vodu je oblika kao na slici. Poznat je protok vode za određene visine:



visina = [1.7 1.95 2.6 2.92 4.04 5.24]

tok = [2.6 3.6 4.03 6.45 11.22 30.61]

Odrediti linearnu, kvadratnu i kubnu jednačinu za fitovanje podataka, i nacrtati sve tri funkcije za visine između 0 i 6 metara. Koja jednačina najbolje predstavlja podatke?

# Zadatak

- Temperatura ključanja vode na različitim visinama data je u tabeli. Odrediti linearnu funkciju koja najbolje fituje date podatke. Koristeći dobijenu funkciju proceniti temperaturu ključanja vode na 16000 ft. Skicirati date podatke i dobijenu linearnu funkciju.

<b>h (ft)</b>	<b>0</b>	<b>2000</b>	<b>5000</b>	<b>7500</b>	<b>10000</b>	<b>20000</b>	<b>26000</b>
<b>T (F)</b>	212	210	203	198	194	178	168

# Zadatak

- Broj bakterija  $N_b$  izmeren u različitim trenucima  $t$  dat je u tabeli. Odrediti eksponencijalnu funkciju koja najbolje fituje date podatke u obliku  $N_b = N \exp(at)$ . Koristeći dobijenu funkciju proceniti broj bakterija posle 60 min. Skicirati grafik.

$t$ (min)	10	20	30	40	50
$N_b$	15000	215000	335000	480000	770000

# Ispitni zadatak

- Najpre izracunati vrednost  $\text{tg}x$  za  $x = [0:1 : 0:05 : 1]$ . Zatim odrediti polinom četvrtog stepena koji najbolje aproksimira dobijene vrednosti tangensa. Nacrtajte grafik funkcije  $\text{tg}x$  i dobijenog polinoma u istom grackom prozoru i dati legendu.