Математика 2 - материјал за вежбе

Стеван Милашиновић
email: s.milasinovic@sf.bg.ac.rs

У току рада следеће интеграле ћемо сматрати табличним:

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq 0;$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C;$
4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$
5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C;$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C;$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0;$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0;$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{a^2 \pm x^2}\right| + C,\ a > 0;$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a > 0.$

Вежбе планиране за 19.3.2020.

Подсећање: Ако при решавању интеграла узмемо смену $t = \varphi(x)$, онда је веза између диференцијала dx и dt дата са $dt = (\varphi(x))'dx$.

Задатак 1. Израчунати интеграле:
а) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+2x+10}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{5x^2+10x+1}\,dx$.

Решење:

а) Када је степен полинома у имениоцу за један мањи него у бројиоцу онда се намеће да пробамо да узмемо именилац за смену, видимо шта је извод па напакујемо у бројиоцу до облика извода имениоца. Дакле, видимо да је $(x^2+x+1)' = 2x+1$, па прво пакујемо интеграл.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\right)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx\\ &+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 = (*).\end{aligned}$$

Израчунајмо интеграле I_1 и I_2.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \left\{\begin{array}{c}\text{смена} : t = x^2+x+1\\ dt = (2x+1)\,dx\end{array}\right\} = \int \frac{dt}{t}\\ &= \ln|t| + C = \ln\left|x^2+x+1\right| + C_1.\end{aligned}$$

Интеграл I_2 ћемо свести на таблични свођењем израза на потпун квадрат и малом сменом

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}\\ &= \left\{\begin{array}{c}\text{смена} : t = x+\frac{1}{2}\\ dt = dx\end{array}\right\} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C_2\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C_2\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2.$$

Коначно, враћајући добијене интеграле, као и користећи то да је $\frac{1}{2}(C_1 + C_2) = C$ имамо

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+x+1\right| + C_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+x+1\right| + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

б) Овај интеграл се решава на сличан начин као и претходни. Прво приметимо да је $(x^2+2x+10)' = 2x+2$ па пакујемо интеграл као у делу под а)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{2x+2+3}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx \\
&+ \int \frac{3}{x^2+2x+10}\,dx = \ln\left|x^2+2x+10\right| + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+3^2} \\
&= \ln\left|x^2+2x+10\right| + 3\,\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C \\
&= \ln\left|x^2+2x+10\right| + \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

в) Приметимо да је $(5x^2+10x+1)' = 10x+10$, па рачунамо

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x+4}{5x^2+10x+1}\,dx = 3\int \frac{x+\frac{4}{3}}{5x^2+10x+1}\,dx = \frac{3}{10}\int \frac{10\left(x+\frac{4}{3}\right)}{5x^2+10x+1}\,dx \\
&= \frac{3}{10}\int \frac{10x+\frac{40}{3}}{5x^2+10x+1}\,dx = \frac{3}{10}\int \frac{10x+10-10+\frac{40}{3}}{5x^2+10x+1}\,dx \\
&= \frac{3}{10}\left(\int \frac{10x+10}{5x^2+10x+1}\,dx + \frac{10}{3}\int \frac{dx}{5x^2+10x+1}\right) = \frac{3}{10} I_1 + I_2 = (*).
\end{aligned}$$

Рачунамо интеграле I_1 и I_2.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{10x+10}{5x^2+10x+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена}: t = 5x^2+10x+1 \\ dt = (10x+10)\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} \\
&= \ln|t| + C_1 = \ln\left|5x^2+10x+1\right| + C_1.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{dx}{5x^2+10x+1} = \int \frac{dx}{5\left(x^2+2x+\frac{1}{5}\right)} \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2-\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{5}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{4}{5}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{4}{5}}}{t+\sqrt{\frac{4}{5}}}\right| + C_2 = \frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{\frac{4}{5}}}{x+1+\sqrt{\frac{4}{5}}}\right| + C_2.
\end{aligned}
$$

Коначно је

$$
(*) = \frac{3}{10}\ln\left|5x^2+10x+1\right| + \frac{\sqrt{5}}{20}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{\frac{4}{5}}}{x+1+\sqrt{\frac{4}{5}}}\right| + C.
$$

Задатак 2. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$; г) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$.

Решење:

а) Идеја је да напакујемо интеграл на облик $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(2x^2-3x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-2\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)}} \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(1-\left(x^2-\frac{3x}{2}+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x-\frac{3}{4} \\ dt = dx \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{t}{\frac{5}{4}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4(x-\frac{3}{4})}{5}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right) + C.$$

б) Идеја је да напакујемо на $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1-4}} = \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-2^2}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2-4}\right| + C$$

$$= \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right| + C = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right| + C.$$

в) Идеја је иста као и код задатка 1. Видимо да је под кореном полином другог степена, а и бројиоцу је полином првог степена. Погледамо шта је извод под кореном и допунимо у бројиоцу до тог извода. Како је $(x^2+2x+2)' = 2x+2$, онда допуњујемо бројиоц да буде облика $2x+2$ плус још нешто.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) = \frac{1}{2}\,(I_1 + 4I_2) = (*)$$

Рачунамо сада интеграле I_1 и I_2.

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x^2+2x+2 \\ dt = (2x+2)dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_1 = 2t^{\frac{1}{2}} + C_1 = 2\sqrt{t} + C_1$$

$$= 2\sqrt{x^2+2x+2} + C_1.$$

Интеграл I_2 намештамо на облик $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C_2\\
&= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C_2.
\end{aligned}
$$

Коначно је

$$
\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2+2x+2} + 4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|\right) + C\\
&= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.
\end{aligned}
$$

г) Идеја је иста као и у претходном. Видимо да је $(5+4x-x^2)' = 4-2x$ па пакујемо.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = -\int \frac{-3(x-\frac{2}{3})}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2(x-2+2-\frac{2}{3})}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{3}{2}\left(\int \frac{4-2x}{\sqrt{5+4x-x^2}} - \frac{8}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}\right) = -\frac{3}{2}\left(I_1 - \frac{8}{3}I_2\right) = (*)
\end{aligned}
$$

Интеграл I_1 се решава сменом $t = 5+4x-x^2$ и на исти начин као у претходном примеру се добија да је $I_1 = 2\sqrt{5+4x-x^2} + C_1$, а интеграл I_2 се пакује на облик $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x^2-4x+4-4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-((x-2)^2-4)}}\\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_2.
\end{aligned}
$$

Коначно је

$$
\begin{aligned}
(*) &= -\frac{3}{2}\left(2\sqrt{5+4x-x^2} - \frac{8}{3}\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)\right) + C\\
&= 4\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) - 3\sqrt{5+4x-x^2} + C.
\end{aligned}
$$

Задатак 3. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{x^3}{5-x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$; д) $\displaystyle\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$.

Решење:

а)

$$\int \frac{x^3}{5-x^2}\,dx = \int \frac{x^2}{5-x^2}\,xdx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 = 5 - t \\ dt = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{5-t}{t}(-\frac{dt}{2}) = \frac{1}{2}\int \frac{t-5}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{5}{t}\right)\,dt = \frac{1}{2}\left(t - 5\ln|t|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(5 - x^2 - 5\ln\left|5 - x^2\right|\right) + C.$$

б)

$$\int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2-2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x^4 \\ dt = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{\frac{dt}{4}}{t^2-2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$$

в)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x^2 + 1 \\ dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C$$

$$= \sqrt{x^2+1} + C.$$

г)

$$\int x\sqrt{x^2-4}\,dx = \int \sqrt{x^2-4}\,xdx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = x^2 - 4 \\ dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-4)^3} + C.$$

д)

$$\int x\sin\left(1-x^2\right)dx = \int \sin(1-x^2)\,xdx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin t\,dt = \frac{\cos t}{2} + C = \frac{\cos\left(1-x^2\right)}{2} + C.$$

Задатак 4. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$;   б) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x^2+4}\,dx$;   г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

Решење: У овим задацима смена се намеће сама ако добро знамо изводе.

а)

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{\arcsin x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена}: t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\}$$
$$= \int \sqrt{t}\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{t^3}}{3} + C = \frac{2\sqrt{\arcsin^3 x}}{3} + C.$$

б)

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \int e^{\operatorname{arctg} x}\,\frac{dx}{1+x^2} = \left\{ \text{смена}: t = \operatorname{arctg} x dt = \frac{dx}{1+x^2} \right\}$$
$$= \int e^t\,dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

в) Приметимо да је $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{2}{x^2+4}$, па имамо

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x^2+4}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена}: t = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} \\ dt = \frac{2dx}{x^2+4} \Rightarrow \frac{dx}{x^2+4} = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int t\,dt = \frac{t^2}{4} + C$$
$$= \frac{\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}}{4} + C.$$

г)

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена}: t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t\ln t} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена}: z = \ln t \\ dz = \frac{dt}{t} \end{array} \right\}$$
$$= \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln|\ln t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C.$$

Задатак 5. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$; б) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$; в) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$;

г) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$; д) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$; ђ) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$;

е) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,dx$; ж) $\displaystyle\int \cos x\cos 5x\,dx$; з) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$.

Решење:

У неким од наредних задатака користићемо следеће интеграле као познате $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C$ и $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C$ за $a \neq 0$, а који се једноставно решавају сменом $t = ax$.

а)

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \Rightarrow \sin x\,dx = -dt \end{array} \right\}$$
$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

б)

$$\int \sin x\cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Напоменимо да смо у преходном примеру могли узети и смену $t = \cos x$. Овај пример је специјални случај интеграла $\displaystyle\int \sin^n x\cos^m x\,dx$, где су $m, n \in \mathbb{N}$. Ако је n непаран, онда је смена $t = \cos x$. Ако је n непаран, онда је смена $t = \sin x$, а ако су и m и n парни, онда се помоћу идентитета

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

дати интеграл своди на неки од претходна два случаја, применом ових правила одређен број пута.

в)

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\,dx$$
$$= \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена}: t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\}$$
$$= \int t^2(1-t^2)\,dt = \int t^2\,dt - \int t^4\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Користили смо идентитет $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, а који следи из познатог идентитета $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

г)

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{смена}: t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \Rightarrow \sin x\,dx = -dt \end{array} \right\} = -\int (1-t^2)\,dt$$
$$= -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

д)

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

ђ)

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int \sin^2 x \left(\cos^2 x\right)^2 dx$$
$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8} \int \left(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx$$
$$= \frac{1}{8} \left(\int dx + \int \cos 2x\,dx - \int \cos^2 2x\,dx - \int \cos^3 2x\,dx \right)$$
$$= \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{1+\cos 4x)}{2} - \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - I_1\right) = (*)$$

$$I_1 = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \sin 2x \\ dt = 2\cos 2x\,dx \Rightarrow \cos 2x\,dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C_1 = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C_1$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_1, \text{ па је}$$

$$(*) = \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + C.$$

Интеграли облика

$$\int \sin ax \cos bx\,dx, \ \int \cos ax \cos bx\,dx, \ \int \sin ax \sin bx\,dx$$

се решавају коришћењем идентитета

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right);$$
$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right);$$
$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right).$$

е)

$$\int \sin 3x \cos 5x\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(3+5)x + \sin(3-5)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin 8x + \sin(-2x)\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 8x\,dx - \int \sin 2x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C.$$

У претходном примеру искористили смо да је синус непарна функција. Такође, треба знати и да је косинус парна функција, односно

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ и } \cos(-x) = \cos x.$$

ж)

$$\int \cos x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2} \left(\cos(1+5)x + \cos(1-5)x\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4}\right) + C.$$

з)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$
$$+ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Задатак 6. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx$; б) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$; г) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

Решење:

а)

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = e^x \\ dt = e^x\, dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$= \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right) + C.$$

б)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}(1+e^{2x})}}\, dx$$
$$= \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}}\, dx = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}\, dx$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x}\, dx \Rightarrow e^{-x}\, dx = -dt \end{array} \right\} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$= -\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C = -\ln\left(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}\right) + C.$$

в)

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,e^x\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = 1+e^x \Rightarrow e^x = t-1 \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{t-1}{t}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right)\,dt = t - \ln|t| + C$$

$$= 1 + e^x - \ln\left(1+e^x\right) + C$$

г)

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t(1+t)}$$

$$= \int \frac{((t+1)-t)}{t(1+t)}\,dt = \int \frac{t+1}{t(1+t)}\,dt - \int \frac{t}{t(1+t)}\,dt = \int \frac{dt}{t}$$

$$- \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t| - \ln|1+t| + C = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + C$$

$$= \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + C.$$

Задаци за вежбу:

1. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+2x+11}\,dx$; 2. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$; 3. $\displaystyle\int \frac{1-x}{2x^2+4x+3}\,dx$;

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}$; 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$; 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$;

7. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$; 8. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2-x+1}}\,dx$; 9. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx$;

10. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$; 11. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 12. $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\,dx$;

13. $\displaystyle\int e^x e^{e^x}\,dx$; 14. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$; 15. $\displaystyle\int \sin x \cos(\cos x)\,dx$;

16. $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^3 x\,dx$; 17. $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$; 18. $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx$;

19. $\displaystyle\int \sin 2020x \cos x\,dx$; 20. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Вежбе планиране за 26.3.2020.

Метода парцијалне интеграције

Метода парцијалне интеграције се често памти у следећем облику

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где су u, v функције које треба погодно одабрати (du и dv су диференцијали тих функција, односно $du = u'(x)\,dx$ и $dv = v'(x)\,dx$). Поставља се питање како одабрати шта нам је u, а шта нам је dv у почетном интегралу. Имамо неколико карактеристичних типова интеграла на које се примењује правило парцијалне интеграције. То су следећи типови:

1. $\displaystyle\int e^x\, P_n(x)\,dx$;
2. $\displaystyle\int \sin x\, P_n(x)\,dx$;
3. $\displaystyle\int \cos x\, P_n(x)\,dx$;
4. $\displaystyle\int \ln x\, g(x)\,dx$;
5. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, g(x)\,dx$;
6. $\displaystyle\int \arcsin x\, g(x)\,dx$,

где је $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ полином степена n, а $g(x)$ нека непрекидна функција. У прва три случаја за u узимамо полином, а dv оно остало. Рецимо, у првом случају $u = P_n(x),\ dv = e^x\,dx$. Разлог је тај што ако за u узмемо полином, диференцирањем полинома снизавамо степен и тиме олаксавамо проблем. Колики је степен полинома, толико ћемо парцијалних интеграција морати да употребимо. У преостала три случаја за u увек узимамо или $\ln x$ или $\operatorname{arcctg} x$ или $\arcsin x$, а $dv = g(x)\,dx$. Разлог је тај што интеграл логаритма и аркуса не знамо, али извод знамо и такође претпостављамо да знамо да одредимо интеграл функције $g(x)$.

Дакле, када одредимо u и dv, по формули треба одредити du и v, а то радимо на следећи начин

$$\left[\begin{array}{cc} u = f(x) & du = f'(x)\,dx \\ dv = g(x)\,dx & v = \int g(x)\,dx \end{array}\right],$$

при чему код рачунања $v = \displaystyle\int g(x)\,dx$ узимамо само једну примитивну функцију (не пишемо констнту).

Задатак 7. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int xe^x\,dx$; б) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$; в) $\displaystyle\int (x^2+x-3)\cos x\,dx$;

г) $\displaystyle\int (2x+3)e^{-5x}\,dx$; д) $\displaystyle\int \ln x\,dx$; ђ) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$;

е) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

Решење:

а) Ово је пример једног од прва три типа где је $P_n(x) = P_1(x) = x$ полином првог степена.

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = e^x\,dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

б) Радимо слично као у претходном.

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array}\right] \\ &= -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

в) У овом примеру нема потребе раздвајати дати интеграл на три па рачунати сваки засебно. $P_2(x) = x^2 + x - 3$ је полином другог степена и можемо га целог узети за u и урадити две парцијалне интеграције!

$$\int (x^2+x-3)\cos x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = x^2+x-3 & du = (2x+1)\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= (x^2+x-3)\sin x - \int (2x+1)\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u=(2x+1) & du=2dx \\ dv=\sin x\,dx & v=-\cos x \end{bmatrix}$$
$$= (x^2+x-3)\sin x - \left(-(2x+1)\cos x - 2\int -\cos x\,dx\right)$$
$$= (x^2+x-3)\sin x - (-(2x+1)\cos x + 2\sin x) + C$$
$$= (x^2+x-3)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x + C$$
$$= (x^2+x-5)\sin x + (2x+1)\cos x + C.$$

г) Ради се слично као претходни.

$$\int (2x+3)e^{-5x}\,dx = \begin{bmatrix} u=(2x+3) & du=2dx \\ dv=e^{-5x}\,dx & v=-\frac{1}{5}e^{-5x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}(2x+3)e^{-5x}$$
$$+\frac{2}{5}\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}(2x+3)e^{-5x} - \frac{2}{25}e^{-5x} + C.$$

Искористили смо $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + C,\ a \neq 0.$

д) Овај пример је онај који спада у један од последња три типа.

$$\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

ђ) Овде иако имамо полином, тј. $P_1(x) = x$, за u узимамо логаритам!

$$\int x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx & v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$\int \arcsin x\,dx = \begin{bmatrix} u=\arcsin x & du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} = x\arcsin x$$
$$-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

где се последњи интеграл лако решава сменом $t = 1-x^2$.

Задатак 8. Израчунати интеграле:

а) $\int x\sin^2 x\,dx$; б) $\int x\sin x\cos x\,dx$; в) $\int x\,\mathrm{tg}^2\,2x\,dx$;

г) $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$; д) $\int (5x^4-1)\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Решење:

а) Искористићемо формулу за свођење квадрата на двоструки угао.

$$\int x\sin^2 x\,dx = \int x\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx & v = \frac{\sin 2x}{2}\end{array}\right]$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

б) Овде ћемо искористи формулу за двоструки угао

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

$$\int x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \sin 2x\,dx & v = -\frac{\cos 2x}{2}\end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx\right) = -\frac{x\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + C.$$

в) Овај пример не спдада ни под један од типова наведених на почетку. Приметимо да знамо да урадимо интеграл и од x и од $\mathrm{tg}^2\,2x$, али интеграл полинома би нам повећао степен и тиме додатно отезао проблем. Дакле, радимо парцијалну интеграцију на следећи начин

$$\int x\,\mathrm{tg}^2\,2x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \mathrm{tg}^2\,2x\,dx & v = \int \mathrm{tg}^2\,2x dx = \frac{\mathrm{tg}\,2x}{2} - x\end{array}\right]$$
$$= x\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2} - x\right) - \int\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{2} - x\right)dx = \frac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{2} - x - \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$$
$$+ \frac{x^2}{2} + C = \frac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{2} - x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \frac{x^2}{2} + C.$$

Користили смо

$$v=\int \operatorname{tg}^2 2x\,dx=\int \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\,dx=\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x}\,dx=\int \frac{dx}{\cos^2 2x}\,dx$$
$$-\int dx=\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}-x.$$

г)

$$\int \arcsin\sqrt{x}\,dx=\left[\begin{array}{cc} u=\arcsin\sqrt{x} & du=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right]$$
$$=x\arcsin\sqrt{x}-\int \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx=x\arcsin\sqrt{x}-\int \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx$$
$$=\left\{\begin{array}{c} \text{смена}: t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\}=x\arcsin\sqrt{x}-\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=x\arcsin\sqrt{x}-I_1$$
$$=(*).$$

Интеграл I_1 можемо урадити на више начина. Урадимо га помоћу парцијалне интеграције на следећи начин

$$I_1=\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int t\,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\left[\begin{array}{cc} u=t & du=dt \\ dv=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt & v=-\sqrt{1-t^2} \end{array}\right]$$
$$=-t\sqrt{1-t^2}+\int \sqrt{1-t^2}\,dt=-t\sqrt{1-t^2}+\int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
$$=-t\sqrt{1-t^2}+\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t-I_1.$$

Дакле, добли смо следећу везу

$$I_1=-t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t-I_1 \implies 2I_1=\arcsin t-t\sqrt{1-t^2},$$

односно

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\arcsin t-t\sqrt{1-t^2}\right)+C.$$

Коначно је

$$(*)=x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\left(\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x}\right)+C.$$

д)

$$\int (5x^4-1)\operatorname{arctg} x\,dx=\left[\begin{array}{cc} u=\operatorname{arctg} x & du=\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv=(5x^4-1)\,dx & v=x^5-x \end{array}\right]$$

$$= (x^5 - x)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^5 - x}{1 + x^2}\, dx = (x^5 - x)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^5}{1 + x^2}\, dx$$

$$+ \int \frac{x}{1 + x^2}\, dx = (x^5 - x)\operatorname{arctg} x - I_1 + I_2 = (*).$$

Решавамо I_1, I_2.

$$I_1 = \int \frac{x^5}{1 + x^2}\, dx = \int \frac{x^4}{1 + x^2}\, x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = t - 1 \\ dt = 2x\, dx \Rightarrow x\, dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(1 - t)^2}{t}\, dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{t}\, dt - 2 \int dt + \int t\, dt \right) = \frac{1}{2} \ln|t| - t$$

$$+ \frac{t^2}{4} + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - (1 + x^2) + \frac{(1 + x^2)^2}{4} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{(1 + x^2)(x^2 - 3)}{4} + C_1.$$

$I_2 = \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_2$, који се једноставно решава сменом $t = 1 + x^2$.
Коначно,

$$(*) = (x^5 - x)\operatorname{arctg} x - \frac{(1 + x^2)(x^2 - 3)}{4} + C.$$

Задатак 9. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int x \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) dx$;

б) $\displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$;

в) $\displaystyle\int x \sin\sqrt{x}\, dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$.

Решење:

а) Видимо да имамо логаритам, значи радимо парцијалну и u је баш тај логаритам.

$$\int x \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) dx = \left[\begin{array}{cc} u = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & du = \frac{2}{1-x^2}\, dx \\ dv = x\, dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2}$$

$$- \int \frac{x^2}{1 - x^2}\, dx = \frac{x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2} + \int \frac{-x^2 + 1 - 1}{1 - x^2}\, dx = \frac{x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2}$$

$$+ \int dx + \int \frac{dx}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2} + x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C.$$

б) Опет имамо логаритам.

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = \left[\begin{array}{cc} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) & du=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right] =$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}+C.$$

в) Овде видимо да имамо полином и синус, али синус нам је са кореном па не можемо да применимо одмах парцијалну. Мораћемо прво да уведемо једну смену, па тек онда парцијалну.

$$\int x\sin\sqrt{x}\,dx = \left\{\begin{array}{c} \text{смена}: t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \\ dx=2t\,dt \end{array}\right\} = 2\int t^3\sin t\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u=t^3 & du=3t^2\,dt \\ dv=\sin t\,dt & v=-\cos t \end{array}\right] = 2\left(-t^3\cos t+3\int t^2\cos t\right)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u=t^2 & du=2tdt \\ dv=\cos t\,dt & v=\sin t \end{array}\right] = -2t^3\cos t+6\left(t^2\sin t-2\int t\sin t\,dt\right)$$

$$= -2t^3\cos t+6t^2\sin t-12\left(-t\cos t+\sin t\right)+C$$

$$= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x}+6x\sin\sqrt{x}+12\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-12\sin\sqrt{x}+C.$$

г) Овде имамо аркус функцију па ће нам то бити u у парцијалној.

$$\int \frac{x\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{cc} u=\operatorname{arcctg} x & du=-\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx & v=\sqrt{1+x^2} \end{array}\right] = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arcctg} x$$

$$+\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arcctg} x+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arcctg} x$$

$$+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

Задатак 10. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0;$ б) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx,\ a>0.$

Решење:

а) Један од начина да се израчуна овај интеграл је парцијалном интеграцијом. Идеја је иста као када смо рачунали интеграл I_1 у задатку 8 под в).

$$I=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}-\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$
$$=a^2\text{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)-\int x\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\left[\begin{array}{cc} u=x & du=dx \\ dv=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx & v=-\sqrt{a^2-x^2}\end{array}\right]$$
$$=a^2\text{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)-\left(-x\sqrt{a^2-x^2}+\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\right)=a^2\text{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$+\,x\sqrt{a^2-x^2}-I.$$

Дакле, добили смо везу

$$I=a^2\text{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)+x\sqrt{a^2-x^2}-I,\ \text{односно}$$
$$2I=a^2\text{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)+x\sqrt{a^2-x^2},\ \text{одакле је}$$
$$I=\frac{1}{2}\left(a^2\text{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

б) За вежбу. Идеја је потпуно иста.

Задатак 11. Израчунати интеграле

$$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx \text{ и } J=\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \ a,b\neq 0.$$

Решење:

Овај задатак је карактеристичан и требало би запамтити метод којим се решава. Овде ће бити изложена три метода, али је довољно знати само први метод. Проблематика у овом задтку је та што је подинтегрална функција производ синуса (косинуса) и експоненцијалне, а знамо да у оним типовима када се јављају са полиномима њих узимамо да одредимо v.

Први начин

Поставља се питање шта да одаберемо за u? Одговор гласи, свеједно је! Међутим, у овом задатку је карактеристично то што ћемо урадити две парцијалне и добити одређену везу, али тако што морамо бити пажљиви да оно што узмемо у првој парцијалној за u то исто узимамо и у другој (ако узмемо e^x у првој онда опет e^x у другој, а ако узмемо синус у првој онда у другој узимамо косинус, али видећемо већ на шта се мисли...)

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}\, dx \\ dv = \sin bx \, dx & v = -\frac{\cos x}{b} \end{bmatrix} = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b}$$
$$+ \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}\, dx \\ dv = \cos bx \, dx & v = \frac{\sin bx}{b} \end{bmatrix} = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b}$$
$$+ \frac{a}{b} \left(\frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx \right) = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{ae^{ax} \sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} I.$$

Дакле, добили смо везу

$$I = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{ae^{ax} \sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} I, \text{ односно}$$
$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = \frac{ae^{ax} \sin bx}{b^2} - \frac{be^{ax} \cos bx}{b^2} = \frac{e^{ax}\,(a \sin bx - b \cos bx)}{b^2} \Rightarrow$$
$$\boxed{I = \frac{e^{ax}\,(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.}$$

На сличан начин се одбија да је $\boxed{J = \dfrac{e^{ax}\,(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.}$

<u>Други начин</u>

Кренемо да решавамо I као у првом начину

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}\, dx \\ dv = \sin bx \, dx & v = -\frac{\cos x}{b} \end{bmatrix} = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b}$$
$$+ \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} J,$$

па имамо прву везу

$$I - \frac{a}{b} J = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b}.$$

Кренемо сада да решавамо J

$$J = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax} & du = ae^{ax}\, dx \\ dv = \cos bx \, dx & v = \frac{\sin x}{b} \end{bmatrix} = \frac{e^{ax} \sin bx}{b}$$
$$- \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} I,$$

па имамо и другу везу

$$\frac{a}{b}I + J = \frac{e^{ax}\sin bx}{b}.$$

Решавањем система

$$\begin{aligned} I - \frac{a}{b}J &= -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} \\ \frac{a}{b}I + J &= \frac{e^{ax}\sin bx}{b}, \end{aligned}$$

где су непознате I и J добијамо тражено решење.

Трећи начин

Овде ће бити потребно мало знање из комплексних бројева, користићемо *Ојлерову формулу*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in \mathbb{R},$$

а која је, надам се, споменута у оквиру Математике 1 (ако није доказаћемо је у Математици 3).

Приметимо следеће

$$\begin{aligned} I + iJ &= \int e^{ax}\cos bx\,dx + i\int e^{ax}\sin bx\,dx = \int e^{ax}\left(\cos bx + i\sin bx\right)dx \\ &= \int e^{ax}e^{ibx}\,dx = \int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C, \end{aligned}$$

где је C комплексан број, односно $C = C_1 + iC_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Када $\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C_1 + iC_2$ раставимо на реални и имагинарни део (пробајте за вежбу) добићемо да је I реални део тог израза, а J имагинарни део.

Задатак 12. Нека је $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\ n \in \mathbb{N}$. Наћи везу између I_n и I_{n-1}, а затим израчунати I_2 и I_3.

Решење:

Овај тип задатка је такође карактеристичан и битно је запамтити идеју решавања.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx\right) = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$- \frac{1}{a^2}\int x\,\frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int x\,\frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,dx & v = \frac{1}{2}\frac{(a^2+x^2)^{1-n}}{1-n} \end{array}\right] = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{x(a^2+x^2)^{1-n}}{2(1-n)}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2(1-n)}\int (a^2+x^2)^{1-n}\,dx\right) = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{2a^2(1-n)}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{2a^2(1-n)}I_{n-1} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2(1-n)}\right)I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Дакле, веза између I_n и I_{n-1} је дата са

$$I_n = \frac{3-2n}{2a^2(1-n)}I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Сада израчунајмо I_2, то значи да је $n = 2$.

$$I_2 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{3-4}{2a^2(1-2)}I_1 - \frac{x}{2a^2(1-2)(a^2+x^2)^{2-1}}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$+ \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C.$$

I_3 израчунати за вежбу.

Задатак 13. Израчунати $\displaystyle\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx.$

Овај задатак је мало тежи и може се урадити на два начина. Први начин је директно парцијалном, с тим што није одмах јасно шта узети за u, а шта за dv.

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = e^x(x-1) & du = xe^x\,dx \\ dv = \frac{1}{x^2}\,dx & v = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{e^x(x-1)}{x}$$

$$+ \int \frac{xe^x}{x}\,dx = -e^x + \frac{e^x}{x} + e^x + C = \frac{e^x}{x} + C.$$

Други начин

Раздвојимо почетни интеграл на два и у једном урадимо парцијалну, са погодно одабраним компонентама, тако да се добије интеграл који ће се скратити са оним другим.

$$I = \int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx = \int \frac{e^x}{x}\,dx - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx = I_1 - I_2 = (*)$$

Хоћемо у интегралу I_1 да урадимо парцијалну, али како одабрати шта је u, а шта dv? Помсатрамо интеграл I_2 и видимо да је у њему фактор $\dfrac{1}{x^2}$. Ако желимо да из I_1 некако добијемо I_2 онда сигурно морамо за u да узмемо $\dfrac{1}{x}$, јер ће при изводу у имениоцу да се појави квадрат!

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{e^x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}\,dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{array}\right] = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}\,dx \\ &= \frac{e^x}{x} + I_2 + C. \end{aligned}$$

Када заменимо у $(*)$ добијамо

$$I = \frac{e^x}{x} + I_2 + C - I_2 = \frac{e^x}{x} + C.$$

Задатак 14. Наћи грешку у следећем закључивању.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right] = x\,\frac{1}{x} + \int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx,$$

одакле скраћивањем интеграла са леве и десне стране добијамо да је $0 = 1$.

Задаци за вежбу:

1. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$;
2. $\int (x^2+4)e^{-x}\,dx$;
3. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$;
4. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$;
5. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;
6. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;
7. $\int \arcsin^2 x\,dx$;
8. $\int \cos(\ln x)\,dx$;
9. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$;

$$10.\int e^{-2x}\sin^2 3x\,dx; \qquad 11.\int e^{\sqrt{x}}\,dx; \qquad 12.\int \frac{e^x(2x-3)}{(2x+1)^3}\,dx;$$

Вежбе планиране за 2.4.2020.

Интеграција рационалних функција

Рационална функција је функција облика $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где су $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ полиноми степена n и m респективно. Ако је $n<m$ кажемо да је рационална функција права. Ако је $n \geqslant m$ онда се дељењем полинома $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ добија да је $R(x)=Q_{n-m}(x)+\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$, где је $Q_{n-m}(x)$ количник, а $R_k(x)$ остатак при дељењу полинома, и $0 \leqslant k < m$. Приметимо да је тада $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ права рационална функција.

Дефиниција 1. Простом или елементарном рационалном функцијом називамо функције облика:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;
3. $\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$;
4. $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$,

где су $A,B,a,b,c\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$ и $k\geqslant 2$ и $b^2-4c<0$. Последњи услов нам каже да полином x^2+bx+c нема реалне нуле, односно кажемо да је нерастављив на линеарне факторе над реалним брјевима или само нерастављив (подразумевамо да је над $\mathbb{R}$).

Познато је да сваки полином $Q_m(x)$ степена m са реалним коефицијентима има тачно m нула, рачунајући и вишеструке. Раставимо га у облику

$$\begin{aligned}Q_m(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdot\\ (x^2+b_2x+c_2)^{l_2}...(x^2+b_qx+c_q)^{l_q},\end{aligned}$$

где су $a_1,a_2,...,a_p\in\mathbb{R}$, $k_1+k_2+...+k_p+l_1+l_2+...+l_q=m$, а сви квадратни фактори су нерастављиви. Такође, претпоставили смо да је коефицијент уз водећи члан полионом $Q_m(x)$ једнак 1.

Теорема 1. (О разлагању рационалне функције)
Свака права рационална функција може се представити као збир простих рационалних функција.

Растављање се ради методом неодређених коефицијената и то на следећи начин. Сваком од чиниоца у растављању полинома $Q_m(x)$ облика $(x-a_i)^{k_i}$ одговараће следећи сабирци

$$\frac{A_1}{x-a_i}+\frac{A_2}{(x-a_i)^2}+...+\frac{A_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}},$$

а сваком нерастављивом чиниоцу облика $(x^2+b_jx+c_j)^{l_j}$ одговараће сабирци

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_jx+c_j}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+b_jx+c_j)^2}+...+\frac{B_jx+C_j}{(x^2+b_jx+c_j)^{l_j}},$$

где су $A_1, A_2, .., B_1, B_2, ...C_1, C_2...$ непознати коефицијенти које треба одредити.

Напомена. Растављање рационалних функција је разумно радити за степен имениоца највише 5. Уколико се у неким задацима појаве рационалне функције чији именилац има степен већи од 5, оне ће највероватније бити такве да се лако могу решити неком сменом или парцијалном интеграцијом. Видећемо касније неке такве примере.

Задатак 15. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2},\ a\neq 0;$ б) $\displaystyle\int\frac{2x^2+8x-2}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx;$

в) $\displaystyle\int\frac{4x^2-4}{x^2(x-2)}\,dx;$ г) $\displaystyle\int\frac{2x^3-4x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx.$

Решење:

а) Ово је таблични интеграл који ћемо урадити преко растављања рационалне функције. Видимо да је наша функција $R(x)=\dfrac{1}{x^2-a^2}$. Када раставимо именилац добијамо $R(x)=\dfrac{1}{(x-a)(x+a)}$ одакле видимо да имамо две реалне нуле које се понављају само једном, па је онда растављање следеће

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

Множењем леве и десне стране једнакости са $(x-a)(x+a)$ добијамо

$$\begin{aligned}&1 = A(x+a) + B(x-a) = x(A+B) + a(A-B) \text{ односно}\\ &0 \cdot x + 1 = x(A+B) + a(A-B),\end{aligned}$$

односно добијамо једнакост два полинома, а два полинома су једнака ако и само ако су истог степена и имају једнаке коефицијенте уз одговарајуће степене. Другим речима мора да важи следећи систем једнакости

$$\begin{aligned}&A + B = 0\\ &a(A-B) = 1.\end{aligned}$$

Решење овог система је $A = \frac{1}{2a}$, $B = -\frac{1}{2a}$, па је

$$R(x) = \frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}\int R(x)\,dx &= \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}\right)dx\\ &= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| + \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.\end{aligned}$$

б) Прво ћемо раставити дату рационалну функцију на просте. Видимо да у имениоцу имамо три различите реалне нуле које се понављају по једном па ће растав бити следећег облика

$$\frac{2x^2+8x-2}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

Множењем леве и десне стране једнакости са $(x-1)(x+1)(x+3)$ добијамо

$$\begin{aligned}&2x^2+8x-2 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)\\ &\;= A(x^2+4x+3) + B(x^2-2x-3) + C(x^2-1) = x^2(A+B+C)\end{aligned}$$

$$+ x(4A - 2B) + 3A - 3B - C.$$

Дакле, добили смо једнакост

$$2x^2 + 8x - 2 = x^2(A + B + C) + x(4A - 2B) + 3A - 3B - C,$$

из које добијамо следећи систем једначина

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ 4A - 2B &= 8 \\ 3A - 3B - C &= -2. \end{aligned}$$

Решење овог система је $A = 1,\ B = 2,\ C = -1$, па је

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x^2 + 8x - 2}{(x-1)(x+1)(x+3)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= \ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \ln|x+3| + C = \ln|x-a| + \ln(x+1)^2 \\ &- \ln|x+3| + C = \ln\left| \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x+3)} \right| + C. \end{aligned}$$

Сређивање израза са логаритмима није било неопходно.

в) У овом примеру један чинилац има реалну нулу која се два пута понавља, а други има реалну нулу која се једном понавља. Дакле, прво растављамо на следећи начин

$$\frac{4x^2 - 4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Множењем леве и десне стране једнакости са $x^2(x-2)$ добијамо

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4 &= Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 \\ &= x^2(A + C) + x(-2A + B) - 2B, \end{aligned}$$

а одатле имамо систем једначина

$$\begin{aligned} A + C &= 4 \\ B - 2A &= 0 \\ -2B &= -4. \end{aligned}$$

Решење овог система је $A = 1,\ B = 2,\ C = 3$, одакле следи да је

$$\int \frac{4x^2 - 4}{x^2(x-2)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-2} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x}$$

$+ 3\ln|x-2| + C.$

г) У овом примеру именилац има једну реалну нулу која се понавља два пута и има један нерастављив фактор (који има комплексне нуле) који се појављује само једном. Растављање изгледа овако

$$\frac{2x^3-4x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Множењем леве и десне стране једнакости са $(x-1)^2(x^2+1)$ добијамо

$$\begin{aligned}
&2x^3-4x^2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2\\
&= x^3(A+C) + x^2(-A+B-2C+D) + x(A+C-2D)\\
&- A + B + D.
\end{aligned}$$

Одатле добијамо следећи систем једначина

$$\begin{aligned}
&A+C=2\\
&D-A+B-2C=-4\\
&A+C-2D=0\\
&B-A+D=0,
\end{aligned}$$

а чије је решење $A=0,\ B=-1,\ C=2,\ D=1$, па је

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^3-4x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}\right) dx\\
&= -\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1}\,dx\\
&= \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

Задатак 16. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-16}\,dx;$

б) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^3+x^2-x+2}\,dx;$

г) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3-x^2+1}{x^3+x^2-2x}\,dx.$

Решење:

а)

$$\int \frac{x^2}{x^4-16}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}\,dx.$$

Растављамо рационалну функцију.

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Множећи леву и десну страну једнакости са $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ добијамо

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4) \\ &= x^3(A+B+C) + x^2(2A-2B+D) + x(4A+4B-4C) \\ &+ 8A - 8B - 4D, \end{aligned}$$

а одатле систем једначина

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ 2A-2B+D &= 1 \\ 4A+4B-4C &= 0 \\ 8A-8B-4D &= 0, \end{aligned}$$

чије је решење $A = \frac{1}{8},\ B = -\frac{1}{8},\ C = 0,\ D = \frac{1}{2}$. Коначно је

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^4-16}\,dx &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{8}\ln|x-2| - \frac{1}{8}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

б) Приметимо да је полином другог степена x^2-4x+5 нераста-вљив јер му је дискриминанта $D = 16-20 = -4 < 0$. То значи да се дата рационална функција разлаже на следећи начин

$$\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-4x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Множећи леву и десну страну једнкости са $(x^2-4x+5)^2$ добијамо

$$\begin{aligned} x^3+1 &= (Ax+B)(x^2-4x+5) + Cx + D = Ax^3 + x^2(-4A+B) \\ &+ x(5A-4B+C) + 5B + D, \end{aligned}$$

а затим и систем једначина

$$\begin{aligned}
&A = 1\\
&B - 4A = 0\\
&5A - 4B + C = 0\\
&5B + D = 1.
\end{aligned}$$

Решење система је $A = 1,\ B = 4,\ C = 11,\ D = -19$, одакле је

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx &= \int \frac{x+4}{x^2-4x+5}\,dx + \int \frac{11x-19}{(x^2-4x+5)^2}\,dx\\
&= I_1 + I_2 = (*).
\end{aligned}$$

Интеграл I_1 је тип интеграла из Задатка 1 и добија се да је $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + 6\operatorname{arctg}(x-2) + C_1$. Интеграл I_2 се ради на сличну фору.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{11x-19}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = \frac{11}{2}\int \frac{2(x-\frac{19}{11}-2+2)}{(x^2-4x+5)^2}\,dx\\
&= \frac{11}{2}\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2}\,dx + 3\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} = I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

I_3 се решава сменом $t = x^2-4x+5$ и добија се да је $I_3 = \dfrac{-11}{2(x^2-4x+5)} + C_3$, а I_4 се своди на тип $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$, за $t = x-2$ и $a = 1$, а који је рађен у Задатку 12, па је $I_4 = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4x+5} + \operatorname{arctg}(x-2)\right) + C_4$. Коначно, када се све сабере и одузме, имамо

$$(*) = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2-4x+5) + 15\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{3x-17}{x^2-4x+5}\right) + C.$$

в) Да би видели како да раставимо ову рационалну функцију, потребно је да факторишемо полином у имениоцу. Како је овде реч о полиному трећег степена морамо се мало довијати (постоје и експлицитне формуле за решења, али о њима нећемо). Нама ће у пракси бити од значаја тврђење које каже да ако полином $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant i \leqslant n-1$ има целобројну нулу, онда она мора бити делиоц броја a_0. Претпоставка је да је

$a_0 \neq 0$ јер у супротном је $x = 0$ једна целобројна нула. Дакле, у нашем случају полином је $Q(x) = x^3 + x^2 - x + 2$, односно $a_0 = 2$. Кандидати за целобројне нуле полином су делиоци броја 2, а то су $\pm 1,\ \pm 2$. Крећемо од нпр. $x = 1$ и проверавамо да ли је то нула $1^3 + 1^2 - 1 + 2 = 3 \neq 0$. Дакле, није нула. Лако се установи да ће $x = -2$ бити једна целобројна нула датог полинома, а то значи да ће се полином растављати као $Q(x) = (x + 2)K(x)$. Полином $K(x)$ ћемо добити дељењем полинома $Q(x)$ полиномом $x+2$. После дељења добијамо да је $K(x) = x^2 - x + 1$, односно $Q(x) = (x + 2)(x^2 - x + 1)$. Приметимо да је полином $K(x)$ нерастављив јер му је дискриминанта $D = -3 < 0$, па нема реалне нуле. Раставимо сада дату рационалну функцију на просте факторе

$$\frac{2x-5}{x^3+x^2-x+2} = \frac{2x-5}{(x+2)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Множењем леве и десне стране једнакости са $(x + 2)(x^2 - x + 1)$ добијамо

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 2) = x^2(A + B) \\ &+ x(-A + 2B + C) + A + 2C, \end{aligned}$$

а одатле систем

$$\begin{aligned} &A + B = 0 \\ &2B - A + C = 2 \\ &A + 2C = -5. \end{aligned}$$

Решење система је $A = -\dfrac{9}{7},\ B = \dfrac{9}{7},\ C = -\dfrac{13}{7}$. Дакле, добијамо да је полазни интеграл једнак следећем

$$\begin{aligned} \int \left(-\frac{9}{7}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{7}\frac{9x-13}{x^2-x+2}\right) dx &= \frac{9}{14}\ln(x^2 - x + 1) \\ -\frac{9}{7}\ln|x+2| + \frac{17}{21\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C, \end{aligned}$$

а који се лако решава применом неких од претходних правила која су рађена.

г) У овом примеру видимо да рационална функција није права, односно степен полином у бројиоцу је већи од степена полином у имениоцу. У том случају делимо полиноме. После дељења добијамо

$$\int \frac{x^4+x^3-x^2+1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(x+\frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x}\right)dx = \frac{x^2}{2}$$
$$+\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x-2)}\,dx = \frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+\int\left(\frac{-1}{2x}+\frac{5}{6(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}\right)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{6}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C.$$

Задатак 17. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$;

б) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^6+1)^{10}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{5e^x}{e^{4x}-3e^{2x}-4}\,dx$;

ђ) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x+\cos x}{\sin^3 x+\sin^2 x-2}\,dx$.

Решење:

Наредне примере само ћемо прокоментарисати и дати кратка упутства за решавање.

а) Ова рационална функција је већ растављена!!! Ако би пробали да раставимо као

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2},$$

добили би да је $A=0,\ B=0,\ C=1,\ D=1$, а то је ништа друго до установљавања да је Ж=Ж где је Ж у овом случају рационална функција. Дакле, како је функција већ проста рационална имамо да је

$$\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Први интеграл се решава сменом $t=x^2+1$, а други смо радили у Задатку 12 за $a=1$.

б) Овде видимо да је степен полинома у имениоцу 60, што је практично неизводљиво растављати на просте факторе! Приметимо да се овај интеграл сменом $t = x^6 + 1$ своди на $\dfrac{1}{6}\displaystyle\int \frac{dt}{t^{10}}$ који је таблични.

в) У овом примеру је степен полинома у имениоцу 6, али и то је практично превише за рачунање па можемо помислити да се решава на неки други начин. Можемо га решити рецимо парцијалном интеграцијом.

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \int x\,\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx & v = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

а овај интеграл је исти као и у Задатку 12.

г)

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$+\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + \int \frac{x^2}{(x^3)^2+1}\,dx$$
$$= \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(x^3\right) + C.$$

д) Сменом $t = e^x$ интеграл директно сводимо на интеграл рационалне функције.

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x}-3e^{2x}-4}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{5dt}{t^4-3t^2-4}$$
$$= \int \frac{5dt}{(t^2+1)(t^2-4)} = \int \frac{5dt}{(t^2+1)(t-2)(t+2)} = \ldots$$

Остатак је остављен за вежбу.

ђ)

$$\int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x - 2}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x + \cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x - 2}\,dx$$
$$= \int \frac{(2\sin x + 1)\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x - 2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{2t+1}{t^3+t^2-2}\,dt = \int \frac{2t+1}{(t-1)(t^2+2t+2)}\,dt = \ldots$$

Остатак задатка урадити за вежбу.

Задаци за вежбу:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx;$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1};$
3. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx;$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1};$
5. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx;$
6. $\displaystyle\int \frac{6x^2+11x-15}{x^3+4x^2-15x-18}\,dx.$
7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{2+\sin 2x+\cos 2x}\,dx;$
8. $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{1+(x\ln x)^3}\,dx.$
9. $\displaystyle\int \frac{3e^{3x}-e^{2x}+4e^x}{(e^x+1)(e^{2x}+1)(e^{2x}-2e^x+5)}\,dx;$

Вежбе планиране за 9.4.2020.

Интеграција ирационалних функцја

Тригонометријске смене

Неке ирацоналне функције се могу одговарајућом сменом свести на интеграле тригонометријских фунцкија и то:

1. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ се решава сменом $x = a\sin t$ и $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
2. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ се решава сменом $x = \dfrac{a}{\sin t}$ и $t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$;
3. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ се решава сменом $x = a\operatorname{tg} t$, и $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

где је $a > 0$.

Задатак 18. Израчунати интеграле:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$;

б) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$;

в) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$;

г $\int \frac{x^3}{\sqrt{2 - x^2}}\, dx$;

д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$;

ђ) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

Решење:

а) Овде имамо тип 1, па интеграл решава сменом $x = a \sin t$, одакле је $t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : x = a \sin t \\ dx = a \cos t\, dt \end{array} \right\} = \int a \cos t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, dt$$
$$= \int a \cos t \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t}\, dt = \int a^2 \cos t \sqrt{1 - \sin^2 t}\, dt$$
$$= a^2 \int \cos t \sqrt{\cos^2 t}\, dt = a^2 \int \cos t\, |\cos t|\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt$$
$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C = a^2 \Bigg(\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2}$$
$$+ \frac{\sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{4} \Bigg) + C.$$

Приметимо да смо искористи да је $|\cos t| = \cos t$, а то смо смели јер је $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Решење може остати у датом облику, али се може последњи део може трансформисати у алгебарски облик! Приметимо да је

$$\sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) = 2 \sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$
$$= \frac{2x}{a} \cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right),$$

јер је $\sin(\arcsin(t)) = t$. Остаје још да трансформишемо израз

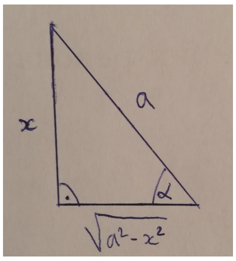
$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

То можемо на два начина. Први начин:

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Други начин је да уочимо правоугли троугао са углом $\alpha = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ (као на слици испод).

Како је $\sin\alpha = \dfrac{x}{a}$, а знамо да је у правоуглом троуглу синус угла једнак количнику наспрамне стране и хипотенузе, то онда бирамо такав правоугли троугао чија је хипотенуза дужине a, катета наспрам угла α дужине x (за $x > 0$), а друга катета из Питагорине теореме је онда дужине $\sqrt{a^2 - x^2}$.



Нама је непознат $\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$, однсно $\cos\alpha$, а из правоуглог троугла видимо да је $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$. На крају, наш интеграл у другом облику гласи

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \left(\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^2} \right) + C,$$

а то је управо облик који смо добили у Задатку 10. део а).

б) Ово је тип 2, па је смена $x = \dfrac{a}{\sin t}$, одакле је $t = \arcsin\left(\frac{a}{x}\right)$. Одређености ради, изаберимо да је $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (јер се интеграција ради на интервалу).

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : x = \frac{a}{\sin t} \\ dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\, dt \end{array} \right\} = -a \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2}\, dt$$

$$= -a \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} \sqrt{\frac{a^2 - a^2 \sin^2 t}{\sin^2 t}}\, dt = -a^2 \int \frac{\cos t\, |\cos t|}{\sin^2 t\, |\sin t|}\, dt = -a^2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}\, dt$$

$$= -a^2 \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^3 t}\, dt = -a^2 \left(\int \frac{dt}{\sin^3 t} - \int \frac{dt}{\sin t} \right) = -a^2 \left(I_1 - I_2\right) = (*).$$

Остаје ра решимо интеграле I_1 и I_2.

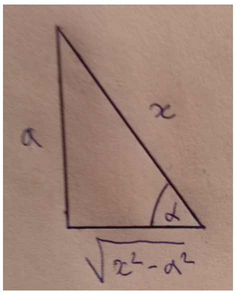
$$I_1 = \int \frac{dt}{\sin^3 t} = \int \frac{\sin t}{\sin^4 t}\,dt = -\int \frac{-\sin t}{(1-\cos^2 t)^2}\,dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : z = \cos t \\ dz = -\sin t\,dt \end{array} \right\}$$
$$= -\int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = -\int \frac{dz}{(1-z)^2(1+z)^2} = -\frac{1}{4}\Bigg(\int \frac{dz}{1+z} + \int \frac{dz}{1-z}$$
$$+ \int \frac{dz}{(1+z)^2} + \int \frac{dz}{(1-z)^2}\Bigg) = -\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right) + C_1$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{2z}{1-z^2}\right) + C_1 = -\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + \frac{2\cos t}{1-\cos^2 t}\right) + C_1$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + \frac{2\cos t}{\sin^2 t}\right) + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t}\,dt = -\int \frac{-\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : z = \cos t \\ dz = -\sin t\,dt \end{array} \right\}$$
$$= -\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + C_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + C_2.$$

Када се вратимо интеграле I_1 и I_2 имамо

$$(*) = -a^2\left(-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| - \frac{1}{2}\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|\right) + C$$
$$= a^2\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + \frac{\cos t}{2\sin^2 t} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|\right) + C$$
$$= a^2\left(\frac{\cos t}{2\sin^2 t} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|\right) + C = a^2\Bigg(\frac{\cos(\arcsin\left(\frac{a}{x}\right))}{2\sin^2(\arcsin\left(\frac{a}{x}\right))}$$
$$- \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos(\arcsin\left(\frac{a}{x}\right)))}{1-\cos(\arcsin\left(\frac{a}{x}\right)))}\right|\Bigg) + C = \spadesuit.$$

Решење такође можемо изразити у алгебарском облику, а за то ће нам требати да иразимо колико је $\cos(\arcsin\left(\frac{a}{x}\right)))$. Означимо са $\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{x}\right)$. Тада је $\sin\alpha = \dfrac{a}{x}$. Слично као у преходном примеру, посматрајмо правоугли троугао као на слици испод.



Одатле је $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, односно $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. Заменом добијамо

$$\spadesuit = a^2\left(\frac{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}{\frac{2a^2}{x^2}} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}\right|\right) + C = a^2\Bigg(\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2}$$
$$- \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right|\Bigg) + C = \clubsuit.$$

Једноставном рационализацијом у аргументу логаритма добија се да је $\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right| = \ln\left|\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^2}{a^2}\right| = 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a^2$. Како је $\ln a^2$ константа, то је решење у другом облику дато са

$$\clubsuit = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right) + C.$$

Ово решење би добили и да је задатак рађен парцијалном интеграцијом (слично као у Задатку 10).

в) Овај пример је тип 3 па га решавамо сменом $x = a\operatorname{tg} t$, односно $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} \text{смена} : x = a\operatorname{tg} t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt \end{array}\right\} = a\int \frac{1}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t} + a^2}\,dt$$
$$= a\int \frac{1}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\cos^2 t}}\,dt = a^2\int \frac{dt}{\cos^2 t\,|\cos t|} = a^2\int \frac{dt}{\cos^3 t}$$
$$= a^2 I_1 = (*).$$

Рачунамо I_1

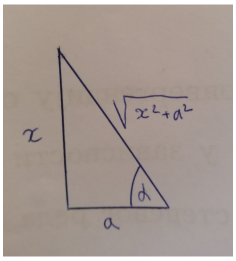
$$I_1 = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt = \int \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\,dt = \left\{\begin{array}{c} \text{смена} : z = \sin t \\ dz = \cos t\,dt \end{array}\right\}$$

$$= \int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2z}{1-z^2} + \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\right) + C = \frac{1}{4}\Bigg(\frac{2\sin t}{\cos^2 t}$$

$$+ \ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg) + C = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{\cos^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)} + \ln\left|\frac{1+\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{1-\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}\right|\right)$$

$$+ C = \spadesuit.$$

Да би ово решење изразили у алгебарском облику потребно је да видимо шта је $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{a}\right)\right)$ и шта је $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{a}\right)\right)$. Опет ћемо се послужити правоуглим троуглом. Означимо са $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, а одатле је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{a}$. Како је тангенс угла у правоглом троуглу однос наспрамне и налегле катете угла, то онда посматрамо правоугли троугао са оштрим углом α, катетом дузине x наспрам њега и налегле катете дужине a. Из Питагорине теореме је онда дужина хипотенузе $\sqrt{x^2+a^2}$ као на слици испод.



Са слике је јасно да је $\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, а $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Заменом добијамо да је

$$\spadesuit = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\frac{a^2}{x^2+a^2}} + \ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right|\right) + C = \frac{1}{4}\Bigg(\frac{2x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2}$$

$$+ \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right|\Bigg) + C = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2} + \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{2} + C,$$

где смо искористили да је $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right| = 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) +$

$\ln a^2$. Коначно је

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = a^2 I_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{2} + C.$$

г) Ово је тип 1 и смена је $x = \sqrt{2}\sin t$, однсно $t = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{c} \text{смена} : x = \sqrt{2}\sin t \\ dx = \sqrt{2}\cos t\,dt \end{array}\right\} = 4\int \frac{\sin^3 t\cos t}{\sqrt{2-2\sin^2 t}}\,dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int \frac{\sin^3 t\cos t}{\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}\int \sin^3 t\,dt = 2\sqrt{2}\left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right) + C$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + \frac{\cos^3\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{3}\right) + C.$$

Искористили смо резултат Задатка 5 под г) за интеграл $\displaystyle\int \sin^3 t\,dt$. За вежбу изразити дато решење у алгебарском облику. Треба да се добије $-2\sqrt{2-x^2} + \dfrac{\sqrt{(2-x^2)^3}}{3} + C$.

д) Ово је тип 2 и смена је $x = \dfrac{1}{\sin t}$, односно $t = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{\begin{array}{c} \text{смена} : x = \frac{1}{\sin t} \\ dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt \end{array}\right\} = \int \frac{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\sin t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}\,dt = \int -dt$$

$$= -t + C = -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

ђ) Ово је тип 3 па је смена $x = \operatorname{tg} t$, односно $t = \operatorname{arctg} x$.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} = \left\{\begin{array}{c} \text{смена} : x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^5}} = \int \cos^3 t\,dt = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C$$

$$= \sin(\operatorname{arctg} x) - \frac{\sin^3(\operatorname{arctg} x)}{3} + C.$$

За домаћи изразити решење у алгебарском облику. Добија се да је $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Метод Остроградског

Интеграли облика $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, где је $P_n(x)$ полином степена $n \geqslant 1$, могу се решити на следећи начин:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где је $Q_{n-1}(x)$ полином степена $n-1$ са коефицијентима које треба одредити, а $\lambda \in \mathbb{R}$ такође непознати параметар ког треба одредити. Одређивање ових коефицијената биће приказано у задацима који следе.

Задатак 19. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$; в) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

Решење:

а) У бројиоцу је полином степена $n=1$, што значи да је наш непознат полином $Q(x)$ степена 0, односно само константа, односно $Q(x)=A$. Имамо

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = A\sqrt{5+4x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

Диференцирамо сада леву и десну страну претходне једнакости (користећи да је $\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ по дефиницији неодређеног интеграла) и добијамо

$$\frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}} = A\frac{4-2x}{2\sqrt{5+4x-x^2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

Помножимо леву и десну страну једнакости са $\sqrt{5+4x-x^2}$ и добијамо

$$3x-2 = \frac{A}{2}(4-2x) + \lambda = -Ax + \lambda + 2A,$$

одакле мора бити $-A=3$ и $\lambda+2A=-2$, односно $A=-3$ и $\lambda=4$. Враћањем коефицијената A, λ у почетну једнакост добијамо

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = -3\sqrt{5+4x-x^2} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$$

$$= -3\sqrt{5+4x-x^2} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = -3\sqrt{5+4x-x^2}$$
$$+ 4\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$$

б) У овом примеру је полином у бројиоцу степена $n = 3$, па ће бити $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$. Дакле

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Диференцирамо и добијамо

$$3x^3+5 = (2Ax+B)\sqrt{x^2+4} + (Ax^2+Bx+C)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Множимо све са $\sqrt{x^2+4}$ и добијамо

$$3x^3+5 = (2Ax+B)(x^2+4) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + \lambda = 3Ax^3 + 2Bx^2$$
$$+ x(8A+C) + 4B + \lambda,$$

одакле мора бити $3A = 3,\ 2B = 0,\ 8A + C = 0,\ 4B + \lambda = 5$. Решавањем добијамо да је $A = 1,\ B = 0,\ C = -8,\ \lambda = 5$ и враћањем у почетну једнакост имамо

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (x^2-8)\sqrt{x^2+4} + 5\int \frac{dx}{x^2+4} = (x^2-8)\sqrt{x^2+4}$$
$$+ \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

в) Овај пример се може урадити на неколико начина. Методом Остроградског се решава рационалисањем.

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}$$
$$+ \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Остатак урадити за вежбу. Такође, за вежбу урадити интеграле $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx,\ \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ методом Остроградског.

Задаци за вежбу:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx;$

4. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx;$

6. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx.$

Вежбе планиране за 16.4.2020.

Интеграли облика $\displaystyle\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Ови интеграли се решавају сменом

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N,$$

где је

$$N = НЗС(n_1, n_2, ..., n_k),\ \ n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$$

(НЗС је најмањи заједнички садржалац) јер ћемо тиме ,,убити" сваки од корена и свести интеграл на интеграл рационалне функције.

Задатак 20. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx;$

б) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}\,dx;$

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})};$

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$

д) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x^2-1)(x+1)}\ .$

Решење:

а) У овом примеру имамо само један корен и то трећи корен, а како желимо да се ослободимо корена за смену узимамо то унутар корена дигнуто на трећи степен, односно

$$\frac{x+1}{x-1} = t^3 \Rightarrow (x-1)t^3 = x+1 \Rightarrow xt^3 - x = 1 + t^3$$
$$\Rightarrow x(t^3-1) = t^3+1 \Rightarrow x = \frac{t^3+1}{t^3-1}.$$

Одатле изражавамо везу између диференцијала dx и dt.

$$dx = \left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)' dt = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\, dt.$$

Сада рачунамо интеграл

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : \frac{x+1}{x-1} = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\, dt \end{array} \right\} = -\int \sqrt[3]{t^3} \frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\, dt$$
$$= -\int \frac{6t^3}{(t^3-1)^2}\, dt = -I.$$

Свели смо интеграл на рационалну функцију и можемо је сада растављати помоћу познатог шаблона. Међутим, приметимо да је степен имениоца релативно велики (шести степен), а рекли смо да у тим случајевима вероватно можемо мало лакше решити задатак ако уведемо неку смену или применимо парцијалну интеграцију. У овом случају ће парцијална интеграција олакшати задатак. Напишимо интеграл I у мало другачијем облику и применимо парцијалну интеграцију.

$$I = \int 2t \frac{3t^2}{(t^3-1)^2}\, dt = \left[\begin{array}{cc} u = 2t & du = 2\, dt \\ dv = \frac{3t^2}{(t^3-1)^2}\, dt & v = -\frac{1}{t^3-1} \end{array} \right] = -\frac{2t}{t^3-1} +$$
$$2\int \frac{dt}{t^3-1} = -\frac{2t}{t^3-1} + 2\int \left(\frac{1}{3(t-1)} - \frac{t+2}{3(t^2+t+1)} \right) dt$$
$$= -\frac{2t}{t^3-1} + \frac{2}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\ln(t^2+t+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+ C = \spadesuit.$$

Како је $\dfrac{x+1}{x-1}=t^3$, то је $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, па је коначно

$$\spadesuit=-\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1}{x-1}-1}+\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|-\frac{1}{3}\ln\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{3}}\right)+C=-(x-1)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

б) Овде се под свим коренима јавља израз $x+2$, а сваки од њих је трећи корен, па је смена

$$t=\sqrt[3]{x+2}\iff x+2=t^3\Rightarrow x=t^3-2.$$

Рачунамо

$$\int\frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}\,dx=\left\{\begin{array}{c}\text{смена}:t^3=x+2\Rightarrow x=t^3-2\\ dx=3t^2\,dt\end{array}\right\}=3\int\frac{(t^3-2)t}{t^3-2+t}\,dt$$

$$=3\int\frac{t^4-2t}{t^3+t-2}\,dt=3\int\left(t-\frac{t^2}{t^3+t-2}\right)dt=\frac{3t^2}{2}-3\int\frac{t^2}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt$$

$$=\frac{3t^2}{2}-\frac{9}{8}\ln\left(t^2+t+2\right)-\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{6\sqrt{7}}{28}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-\frac{9}{8}\ln\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}+2\right)$$

$$-\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}-1\right|-\frac{6\sqrt{7}}{28}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

в) У овом примеру се израз x јавља у свим коренима, а јављају се квадратни и трећи корен, па ће смена бити $x=t^6\iff t=\sqrt[6]{x}$, јер је $\mathit{НЗС}(2,3)=6$.

$$\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=\left\{\begin{array}{c}\text{смена}:x=t^6\\ dx=6t^5\,dt\end{array}\right\}=\int\frac{6t^5}{t^6(1+2t^3+t^2)}\,dt$$

$$=\int\frac{6dt}{t(2t^3+t^2+1)}=\int\frac{6dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)}=6\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|t+1|$$

$$-\frac{9}{4}\ln(2t^2-t+1)-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)+C=\ln\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[6]{x}+1)$$
$$-\frac{9}{4}\ln(2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+1)-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

г)

$$\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\left\{\begin{array}{c}\text{смена}: x-1=t^2\Rightarrow x=1+t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}\right\}=\int\frac{2t}{(1-t^2)t}\,dt$$
$$=\int\frac{2dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

д) Смена ће бити

$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\iff\frac{x+1}{x-1}=t^2\Rightarrow x+1=t^2(x-1)\Rightarrow t^2x-x=1+t^2$$
$$\Rightarrow x(t^2-1)=t^2+1\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{t^2-1}.$$

Са стране срачунајмо изразе који се још јављају у интегралу.

$$x^2-1=\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^2-1=\frac{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}{(t^2-1)^2}=\frac{4t}{(t^2-1)^2}\text{ и}$$
$$x+1=\frac{t^2+1}{t^2-1}+1=\frac{2t^2}{t^2-1}.$$

Сада уврштавамо добијене изразе у интеграл уводећи смену.

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x^2-1)(x+1)}=\left\{\begin{array}{c}\text{смена}: x=\frac{t^2+1}{t^2-1}\\ dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,dt\end{array}\right\}$$
$$=\int t\frac{-\frac{4t}{(t^2-1)^2}}{\frac{4t}{(t^2-1)^2}\frac{2t^2}{t^2-1}}\,dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t}\,dt=-\frac{t^2}{4}+\ln|t|+C$$
$$=-\frac{1}{4}\frac{x+1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+C.$$

Ојлерове смене

Интеграли облика $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, где је R рационална функција, се могу решити и помоћу Ојлерових смена. Тим сменама

се интеграл ирационалне функције трафсормише у интеграл рациоанле функције који знамо да урадимо. Постоје три Ојлерове смене:
1. Ако је $a > 0$ смена је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x.$$

Квадрирањем леве и десне стране добијамо да је

$$ax^2+bx+c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2 \Rightarrow bx+c = t^2 \pm 2\sqrt{a}tx$$
$$\Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t},$$

а одавде се лако изрази веза између dx и dt.

Напомена. Да ли ћемо у смени изабрати знак $+$ или знак $-$ је свеједно, али некад у одређеним задацима је са једним знаком лакше израчунати интеграл него са другим.

2.Ако је $c > 0$ смена је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}.$$

Квадрирањем добијамо да је

$$ax^2+bx+c = t^2x^2 \pm 2tx\sqrt{c} + c \Rightarrow ax^2+bx = t^2x^2 \pm 2tx\sqrt{c}$$
$$\Rightarrow ax+b = t^2x \pm 2t\sqrt{c} \Rightarrow x = \frac{b \pm 2t\sqrt{c}}{t^2-a}.$$

3. Ако је $D = b^2-4ac \geqslant 0$, осносно квадратна једначина има реална решења (означимо их са x_1, x_2), смена је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1).$$

Како је $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, то онда после квадрирања добијамо

$$a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2 \Rightarrow a(x-x_2) = t^2(x-x_1)$$
$$\Rightarrow x = \frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}.$$

Задатак 21. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;　　б) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$;　　г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{x^2+1})}$.

Решење:

а) Приметимо да је коефицијент $a = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$, па можемо искористити прву Ојлерову смену. Дакле, смена је

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t \pm x.$$

Поставља се питање шта је боље узети, да ли са знаком $+$ или са знаком $-$? Овде је боље узети знак $-$ јер се у том случају можемо ослободити целоог имениоца у интегралу, односно тада је $\sqrt{x^2 + x + 1} + x = t$. Квадрирањем једнакости $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$ добијамо

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 &\Rightarrow x + 1 = t^2 - 2tx \\ &\Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1} \Rightarrow dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t + 1)^2}\, dt. \end{aligned}$$

Убацивањем у почетни итнеграл добијамо

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(2t + 1)^2}\, dt = 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t + 1|$$
$$+ \frac{3}{4t + 2} + C = 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| - \frac{3}{2} \ln \left| 2(x + \sqrt{x^2 + x + 1}) + 1 \right|$$
$$+ \frac{3}{4(x + \sqrt{x^2 + x + 1}) + 2} + C.$$

б) Приметимо да је овде $c = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{c} = 1$, па можемо искористити другу смену и то са предзнаком $-$ јер ћемо имати мање да рачунамо! Смена је

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 2x - x^2} = xt - 1 &\Rightarrow 1 + \sqrt{1 - 2x - x^2} = xt \\ &\Rightarrow t = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Остаје да изразимо x преко t. Квадрирањем добијамо

$$\begin{aligned} 1 - 2x - x^2 = x^2t^2 - 2xt + 1 &\Rightarrow -2x - x^2 = x^2t^2 - 2xt \\ &\Rightarrow -2 - x = xt^2 - 2t \Rightarrow x = \frac{2t - 2}{t^2 + 1} \\ &\Rightarrow dx = \frac{-2t^2 + 4t + 2}{(t^2 + 1)^2}\, dt. \end{aligned}$$

Убацивањем смене добијамо

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{\frac{-2t^2+4t+2}{(t^2+1)^2}}{t\frac{2t-2}{t^2+1}}\,dt = \int \frac{-2t^2+4t+2}{t(2t-2)(t^2+1)}\,dt$$
$$= \ln|t-1| - \ln|t| - 2\mathrm{arctg}\, t + C = \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} - 1\right|$$
$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right| - 2\mathrm{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right) + C.$$

в) У овом примеру је $a>0,\ c>0$, али је такође и $D = 9 - 8 = 1 > 0$, па квадратна једначина има реална решења. У овом примеру можемо за смену узети било коју од три смене, али ће нам трећа дати најбрже решење. Рецимо ако бисмо хтели прву смену да узмемо, тада би нам један знак $(\pm)$ олакшао један део разломка, док би други део отежао. Тако да нам то даје мотивацју да пробамо са трећом сменом. Како су нуле једначине $x^2+3x+2=0$ $x_1 = -1,\ x_2 = -2$, то можемо узети смену

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1) &\Rightarrow x^2+3x+2 = t^2(x+1)^2\\ &\Rightarrow (x+1)(x+2) = t^2(x+1)^2 \Rightarrow (x+2) = t^2(x+1)\\ &\Rightarrow x = \frac{2-t^2}{t^2-1} \Rightarrow dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Имамо још да је

$$\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1) = t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right) = \frac{t}{t^2-1}.$$

Убацивањем смене у интеграл добијамо

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = -\int \frac{\frac{2-t^2}{t^2-1} - \frac{t}{t^2-1}}{\frac{2-t^2}{t^2-1} + \frac{t}{t^2-1}}\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt$$
$$= \int \frac{2t(t^2+t-2)}{(t^2-1)^2(2+t-t^2)}\,dt = \int \frac{2t(t-1)(t+2)}{-(t-2)(t+1)^3(t-1)^2}\,dt$$
$$= -\int \frac{2t(t+2)}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\,dt = -\frac{17}{108}\ln|t+1| + \frac{3}{4}\ln|t-1|$$
$$-\frac{16}{27}\ln|t-2| - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + C.$$

На крају се само замени смена $t = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

г) У овом примеру ћемо искористити прву смену $\sqrt{x^2+1} = t - x$. Квадрирањем се добија $1 = t^2 - 2tx$, односно $x = \dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2t}$. Одатле добијамо $dx = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2t^2}\right) dt$ и убацивањем у интеграл имамо

$$\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{x^2+1})} = \int \frac{1}{\frac{(t^2-1)^2}{4t^2} t} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) dt = \int \frac{4t}{(t^2-1)^2} \frac{t^2+1}{2t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{2(t^2+1)}{t(t-1)^2(t+1)^2}\, dt = 2\ln|t| - \ln\left|t^2-1\right| - \frac{2}{t^2-1} + C.$$

На крају се врати смена $t = x + \sqrt{x^2+1}$.

Интеграли биномног диференцијала

Интеграли биномног диференцијала су облика $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\, dx$, где су $a, b \in \mathbb{R},\ m, n, p \in \mathbb{Q}$. Решавају се на следећи начин.

Прво се уведе смена $t = x^n \iff x = t^{\frac{1}{n}} \Rightarrow dx = \dfrac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n}\, dt$. Убацивањем у интеграл добијамо

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p\, dx &= \frac{1}{n}\int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p t^{\frac{1}{n}-1}\, dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1-n}{n}}(a+bt)^p\, dt \\ &= \frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p\, dt,\ \text{где је } q = \frac{m+1-n}{n}.\end{aligned}$$

Разликујемо три случаја.

1. $q \in \mathbb{Z},\ p = \dfrac{r}{s}$. То значи да имамо знак корена код израза $a + bt$ и желимо да га „убијемо”, а то радимо сменом $a + bt = z^s$.

2. $q = \dfrac{r}{s},\ p \in \mathbb{Z}$. То значи да је знак корена код t, па је смена $t = z^s$.

3. $q \in \mathbb{Q},\ p \in \mathbb{Q}$, али је $q + p \in \mathbb{Z}$. Множењем и дељењем подинтегралне функције са t^p добијамо да је

$$\int t^p(a+bt)^q\, dt = \int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt,$$

и сада се слично случају 1. уводи смена $\dfrac{a+bt}{t}=z^s$, где је $p=\dfrac{r}{s}$, јер је $p+q$ цео број.

Задатак 22. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

Решење:

а) Запишимо интеграл мало другачије.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \left\{\begin{array}{c}\text{смена} : x^5=t \Rightarrow x=t^{\frac{1}{5}}\\ dx=\frac{t^{-\frac{4}{5}}}{5}\,dt\end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{5}}(1+t)^{-\frac{1}{3}}t^{\frac{-4}{5}}\,dt = \frac{1}{5}\int t^{-1}(1+t)^{-\frac{1}{3}}\,dt = (*).$$

Видимо да нам само израз у загради прави проблем па уводимо смену $1+t=z^3$. Дакле

$$(*) = \left\{\begin{array}{c}\text{смена} : 1+t=z^3 \Rightarrow t=z^3-1\\ dt=3z^2\,dz\end{array}\right\} = \frac{3}{5}\int (z^3-1)^{-1}z^{-1}z^2\,dz$$
$$= \frac{3}{5}\int \frac{z}{z^3-1}\,dz = \frac{3}{5}\int \frac{z}{(z-1)(z^2+z+1)}\,dz = -\frac{1}{10}\ln(z^2+z+1)$$
$$+\frac{1}{5}\ln|z-1| + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$
$$= -\frac{1}{10}\ln\left(\sqrt[3]{(1+x^5)^2}+\sqrt[3]{1+x^5}+1\right)+\frac{1}{5}\ln\left|\sqrt[3]{1+x^5}-1\right|$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

где смо искористили да је $z=\sqrt[3]{1+t}$, а $t=x^5$.

б) Пишемо интеграл у другом облику и уводимо одговарајућу смену.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}\,dx = \left\{\begin{array}{c}\text{смена} : t=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x=t^3\\ dx=3t^2\,dt\end{array}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\int t^{\frac{3}{2}}(1+t)^{-2}t^2\,dt = 3\int t^{\frac{7}{2}}(1+t)^{-2}\,dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = z^2 \\ dt = 2z\,dz \end{array} \right\} \\
&= 6\int z^7(1+z^2)^{-2}z\,dz = 6\int \frac{z^8}{(1+z^2)^2} \overset{(*)}{=} 6\int \left(z^4 - 2z^2 + 3 - \frac{4z^2+3}{(1+z^2)^2} \right) \\
&= \frac{6}{5}z^5 - 4z^3 + 18z - 21\operatorname{arctg} z - \frac{3z}{1+z^2} + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} \\
&- 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} - \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + C.
\end{aligned}
$$

У једнакости (*) је искоришћено дељење полинома z^8 полиномом $(1+z^2)^2 = z^4 + 2z^2 + 1$.

в)

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}\left(1 + x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : x^{\frac{3}{4}} = t \Rightarrow x = t^{\frac{4}{3}} \\ dx = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{3}}\,dt \end{array} \right\} \\
&= \frac{4}{3}\int t^{-\frac{12}{6}}(1+t)^{-\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{4}{3}\int t^{-\frac{5}{3}}(1+t)^{-\frac{1}{3}}\,dt = \frac{4}{3}\int t^{-\frac{5}{3}}(1+t)^{-\frac{1}{3}}\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{t^{-\frac{1}{3}}}\,dt \\
&= \frac{4}{3}\int t^{-2}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{3}}dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : \frac{1+t}{t} = z^3 \Rightarrow t = \frac{1}{z^3-1} \\ dt = -\frac{3z^2}{(z^3-1)^2}\,dz \end{array} \right\} \\
&= -4\int \left(\frac{1}{z^3-1}\right)^{-2} z^{-1}\frac{z^2}{(z^3-1)^2}\,dz = -4\int z\,dz = -2z^2 + C \\
&= -2\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^2} + C.
\end{aligned}
$$

Интеграли облика $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Универзална смена која у теорији решава све интеграле овог облика је

$$
t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.
$$

Остаје још да изразимо $\sin x$ и $\cos x$ у функцији од $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} \\
&= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} \overset{(*)}{=} \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$= \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

У (*) смо искористли једнакост $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, а која се може проверити директно или видети из основне тригонометријске једакости. Наиме, ако једнакост

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

поделимо са $\cos^2 x$ (јер ћемо тангенс добити као однос синуса и косинуса) добијамо да је

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Дакле, кад имамо универзалну тригонометријску смену довољно је знати следеће:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ова смена је најбоља за рационалне функције које имају само прве стенепе синуса и косинуса. Нпр. $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1+\sin x}{2-5\cos x}$. За остале облике се у пракси тешко користи јер се могу добити рационалне функције са веома великим степенима. Због тога постоје три правила која нам могу олакшати решавање таквих интеграла помоћу другачијих смена.

1. Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, односно функција је непарна по синусу, смена је $\cos x = t$.

2.Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, односно функција је непарна по косинусу, смена је $\sin x = t$.

3. Ако је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, односно функција је непарна и по синусу и по косинусу (два минуса даће плус испред), смена је $\operatorname{tg} x = t$.

Код треће смене (углавном) значи да ће се синус и косинус јављати са парним степенима. У ту сврху приметимо да је

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Задатак 23. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$; б) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\, dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$; г) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}\, dx$; ђ) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}\, dx$.

Решење:

а) Видимо да су сви синуси и косинуси који се јављају у разломку првог степена, па уводимо универзалну смену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ и мењамо изведене идентитете у интеграл. Имамо да је

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}\, dt = \int \frac{2}{6t^2 + 4t + 4}\, dt \\
&= \int \frac{dt}{3t^2 - 2t + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}\right) + C.
\end{aligned}$$

б) У овом примеру су такође сви синуси и косинуси првог степена, па уводимо смену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ и мењамо у интеграл.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\, dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - 3}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} + 3} \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= 2\int \frac{-5t^2 + 2t - 1}{(5t^2 + 2t + 1)(1+t^2)}\, dt = -\frac{4}{5}\ln\left(1+t^2\right) + \frac{4}{5}\ln\left(5t^2 + 2t + 1\right) \\
&- \frac{6}{5}\operatorname{arctg} t - \frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5t+1}{2}\right) + C = -\frac{4}{5}\ln\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) \\
&+ \frac{4}{5}\ln\left(5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{2}\right) + C \\
&= -\frac{4}{5}\ln\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) - \frac{3x}{5} - \frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

в) Приметимо да је подинтегрална функција непарна и по синусу и по косинусу. Заиста, важи да је

$$\begin{aligned} R(-\sin x, -\cos x) &= \frac{1}{3(-\cos x)^2 + 4(-\sin x)^2} = \frac{1}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} \\ &= R(\sin x, \cos x), \end{aligned}$$

па ћемо увести смену $t = \operatorname{tg} x$. У овом примеру није неопходно изражавати синуса и косинуса преко тангенса као што ћемо видети у решењу. Дакле,

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(3 + 4\operatorname{tg}^2 x)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{dt}{3 + 4t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

г) Подинтегрална функција је непарна и по синусу и косинусу. Заиста,

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^2}{(-\sin x)^4} = \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} = R(\sin x, \cos x),$$

па уводимо смену $t = \operatorname{tg} x$.

Овде можемо да напишемо следеће:

$$\begin{aligned} &t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2} \\ &\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2} \\ &\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

па да то мењамо у интеграл. А можемо и мало да се снађемо и брже срачунамо интеграл. Наиме, имамо да је

$$\begin{aligned} &\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx = \int \frac{\cos^4 x}{\cos^2 x \sin^4 x}\, dx = \int \operatorname{ctg}^4 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{tg^4 x} \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C. \end{aligned}$$

д) Подинтегрална функција је непарна по косинусу па ће смена бити $t = \sin x$ (а што је и очигледно). Докажимо непарнсот по косинусу.

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$$
$$= -R(\sin x, \cos x).$$

Интеграл се своди на интеграл рационалне функције сменом $t = \sin x$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 6}$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t+5}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x + 5}\right| + C.$$

ђ) Подинтегрална функција је непарна по синусу. Заиста

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{1 + \cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x),$$

па уводимо смену $t = \cos x$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}\,dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array} \right\}$$
$$= -\int \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,dt = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\,dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt$$
$$= t - 2\operatorname{arctg} t + C = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + C.$$

Задаци за вежбу:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4} + 3}{(x+4)^2 - \sqrt{x+4}}\,dx;$

2. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x}\,dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}};$

4. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx;$

5. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1 + \sqrt[3]{x^4}}\,dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}};$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x}\sqrt[3]{2 + \sqrt[4]{x^3}}};$

8. $\displaystyle\int \frac{1 + \cos x}{\sin x(3 - \cos x)}\,dx;$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x};$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x - 1};$

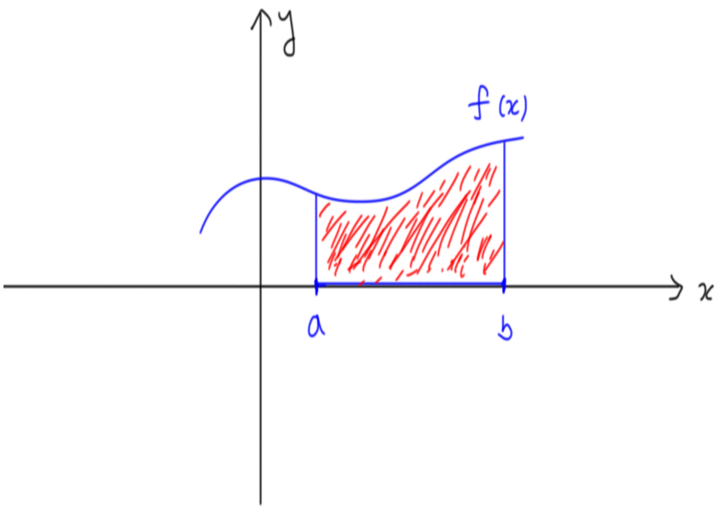
11. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \cos^2 x}\,dx;$

12. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1)^2}{(\operatorname{tg} x + 1)^4}\,dx.$

Вежбе планиране за 23.4.2020.

Одређени интеграл

Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција. Посматрајмо график функције на слици испод.



Геометијски, одређени интеграл функције f на сегменту $[a,b]$ представља површину шрафирану на слици, односно површину области огранчене графиком функције, x-осом и правама $x=a$ и $x=b$. Одређени интеграл на сегменту $[a,b]$ се означава са $\int_a^b f(x)\,dx$. Ако је $F(x)$ примитивна функција за $f(x)$ на $[a,b]$, односно ако је $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Претходну формулу зовемо Њутн-Лајбницовом формулом и она нам даје начин за израчунавање одређеног интеграла. Користе се још и следеће ознаке $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b}$ или $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$ (код двојних интеграла ће прва ознака бити кориснија јер ћемо морати да водимо рачуна по којој промењљивој интегралимо). Важе следећа својства:

1. $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx;$

2. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx;$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, за $c \in (a,b)$;

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Код израчунавања одређеног интеграла користићемо и теорему о смени променљиве.

Теорема 2. (О смени променљиве)
Ако је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ непрекидна и има непрекидан први извод на $[\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Ова теорема нам каже да када уведемо смену морамо да променимо и границе интеграције, што ће рећи да код рачунања одређеног интеграла не морамо враћати смену!

Наредна два својства одређеног интеграла су врло битна јер у неким случајевима олакшавају израчунавање.

1. Ако је $f : [-a,a] \Rightarrow \mathbb{R}$ непарна функција, односно $f(-x) = -f(x)$ тада је

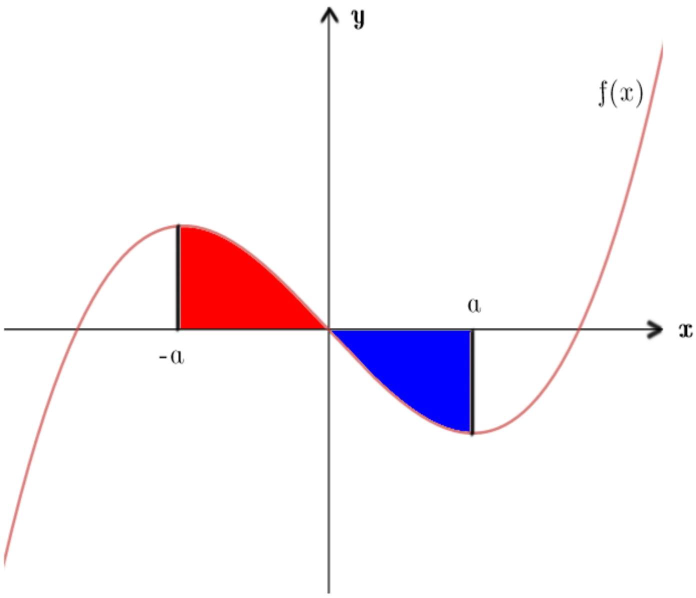
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

2. Ако је $f : [-a,a] \Rightarrow \mathbb{R}$ парна функција, односно $f(-x) = f(x)$ тада је

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

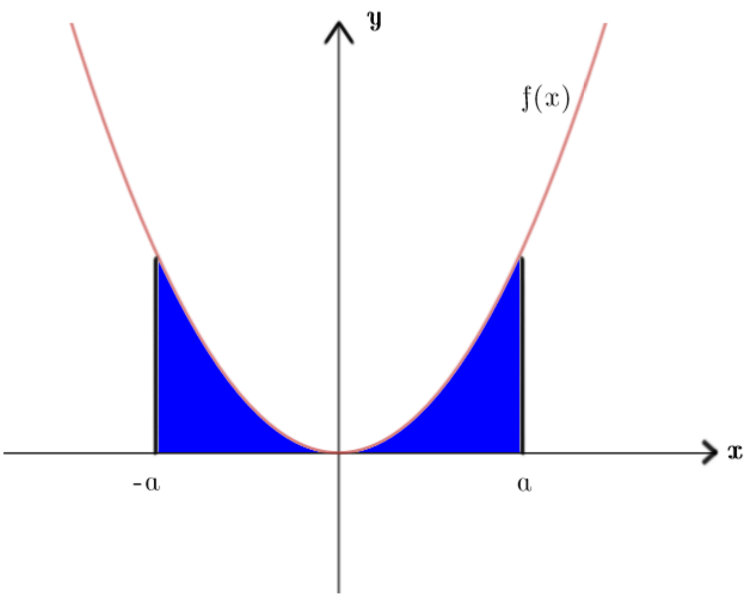
Објаснићемо геометријско значење ових особина.

1.Ако је функција непарна онда је њен график симетричан у односу на координатни почетак.



Као што се на слици види, површине црвеног и плавог дела су једнаке, али је површина плавог дела испод x-осе па ће у интеграцији доћи са негативним предзнаком. Када се интеграл раздвоји на интервале $[-a, 0]$ и $[0, a]$ и сабере добићемо да је резултат нула.

2. Ако је функција парна то значи да је њен график симетричан у односу на y-осу.



Са слике видимо да су осенчене површине једнаке па ће површина у интервалу $[-a, a]$ бити једнака двострукој површини у интервалу $[0, a]$.

Задатак 24.

Израчунати:

а) $\int_1^3 (x^2 - x - 1)\,dx$; б) $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{x}\,dx$; в) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$;

г) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; д) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; ђ) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Решење:

а)

$$\int_1^3 (x^2 - x - 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 3 - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 1\right)$$
$$= 6 - \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{3}.$$

б)

$$\int_{-1}^2 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_{-1}^2 = \frac{3}{4}\left(2^{\frac{4}{3}} - (-1)^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2^4} - 1\right) = \frac{3}{4}\left(2\sqrt[3]{2} - 1\right).$$

в)

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4 = -\frac{1}{4} - 1$$
$$-(-1-2) = \frac{7}{4}.$$

г)

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

д)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

ђ)

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_3^4 \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}$$
$$= \ln\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \ln\frac{4}{3}.$$

Задатак 25. Израчунати:

а) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$; в) $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$; д) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$; ђ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x}$;

е) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$; ж) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$; з) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

Решење:

а) Рачунамо

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена} : t = 25+3x \\ dt = 3\,dx \end{array} \right\} = (*).$$

Кад уведемо смену рекли смо да морамо да променимо и границе интеграције. Рачунамо граице за t. Ако је $x=0 \implies t = 25+3\cdot 0 = 25$, а ако је $x=3 \implies t = 25+3\cdot 3 = 34$, па имамо нови одређени интеграл (лакши) у новим границама! Дакле,

$$(*) = \frac{1}{3}\int_{25}^{34} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t}\Big|_{25}^{34} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{34}-\sqrt{25}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{34}-5\right).$$

б)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} \text{смена} : t = x^3 & x=0 \Rightarrow t=0 \\ dt = 3x^2\,dx & x=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

в)

$$\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} \text{смена} : t = \frac{1}{x^2} & x=1 \Rightarrow t=1 \\ dt = -\frac{3}{x^3}\,dx & x=3 \Rightarrow t=\frac{1}{9} \end{array} \right\} = -\frac{1}{3}\int_1^{\frac{1}{9}} e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{9}}^1 e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t\Big|_{\frac{1}{9}}^1 = \frac{1}{3}\left(e - e^{\frac{1}{9}}\right).$$

У претходном примеру смо искористили знак минус да обрнемо границе од мање ка већој.

г)

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi}$$

$$+\int_0^{\pi}\cos x\,dx = -(-\pi - 0) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi + 0 = \pi.$$

д)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{смена} : t = \sin x & x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ dt = \cos x\,dx & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t^2}$$

$$= -\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = -(1-2) = 1.$$

ђ)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos x} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{смена} : t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} & \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5 + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

е)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{смена} : t = \operatorname{tg} x & x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} & x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} & \end{array} \right\} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}\,dt$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{t^4}\,dt = \left(-\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{80}{9\sqrt{3}}.$$

ж) У овом примери морамо да водимо рачуна о апсолутној вредности! Наиме, важи да је

$$|1-x| = \left\{ \begin{array}{l} 1-x, \text{ за } x < 1 \\ x-1, \text{ за } x > 1 \end{array} \right. ,$$

па морамо интеграл раздвојити на два интервала. На интервал $[0,1]$ и на интервал $[1,2]$. Дакле,

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2 = 1.$$

з)

$$\int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int_o^\pi \sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x}\,dx$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx = \int_0^\pi |\cos x-\sin x|\,dx$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{2}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right|dx = \sqrt{2}\int_0^\pi \left|\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right|dx$$
$$= \sqrt{2}\int_0^\pi \left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx = \left\{\begin{array}{cc} \text{смена}: t = x+\frac{\pi}{4} & x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ dt=dx & x=\pi\Rightarrow t=\frac{5\pi}{4}\end{array}\right\}$$
$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\cos t|\,dt = (*).$$

Због апсолутне вредности морамо да одредимо знак. Знамо да је cos позитиван на интервалу $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, а негативан на интервалу $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$ па је

$$(*) = \sqrt{2}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos t\,dt\right) = \sqrt{2}\left(\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Задатак 26. Израчунати:

а) $\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; в) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3\cos 3x\,dx$;

г) $\int_{-1}^1 x^2\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)dx$; д) $\int_{-2}^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$.

Решење:

а) Овај пример ћемо урадити на неколико начина.

Први начин: Уведимо смену $\sin x = t$. Тада је $\cos x\,dx = dt$, међутим када треба да одредимо границе по t настаје проблем. Наиме, за $x=0 \implies t=0$, а за $x=\pi \implies t=0$! Однсно добили смо ,,интервал" $[0,0]$ што није добро, па не можемо да применимо смену променљиве на том интервалу! Проблем са сменом је тај што је смена $t = \sin x$, односно $t = \arcsin x$ дефинисана на интервалу $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а наш интервал интеграције је $[0, \pi]$, односно парче $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ прави проблем. Овај проблем се може избећи тако што ћемо решити интеграл као неодређени и онда убацити почетне границе. Ако посматрамо интеграл $\displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$ уведимо смену $t = \sin x$ правећи се да је она дефинисана на одговарајућем интервалу. Добијамо

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Приметимо да је функција $\dfrac{\sin^2 x}{2}$ дефинисана и диференцијабилна на интервалу $[0, \pi]$, као и да је $\left(\dfrac{\sin^2 x}{2}\right)' = \sin x \cos x$. Па онда по Њутн-Лајбницовој формули имамо да је

$$\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\sin^2 \pi - \sin^2 0\right) = 0.$$

<u>Други начин:</u> Искорстимо формулу за синус двострукокг угла.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^\pi = -\frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 0) \\ &= -\frac{1}{4}(1-1) = 0.\end{aligned}$$

<u>Трећи начин:</u> Раздвојимо интеграл на интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, а на другом уведемо смену $t = x - \frac{\pi}{2}$ којом дати интервал ,,померамо" на интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ који нам одговара.

$$\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x \cos x \, dx = I_1 + I_2 = (*).$$

У интегралу I_2 померамо границе

$$\begin{aligned}I_2 &= \left\{\begin{array}{cc} \text{смена} : t = x - \frac{\pi}{2} & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \\ dt = dx & x = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}\end{array}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, dt = -I_1.\end{aligned}$$

Одатле следи да је $(*) = I_1 - I_1 = 0$.

б) Овај пример ћемо урадити на два начина.

Прив начин: Сменом $x = 2\sin t \iff t = \arcsin\frac{x}{2}$.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} \text{смена} : x = 2\sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = 2\cos t\,dt & x = 2 \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

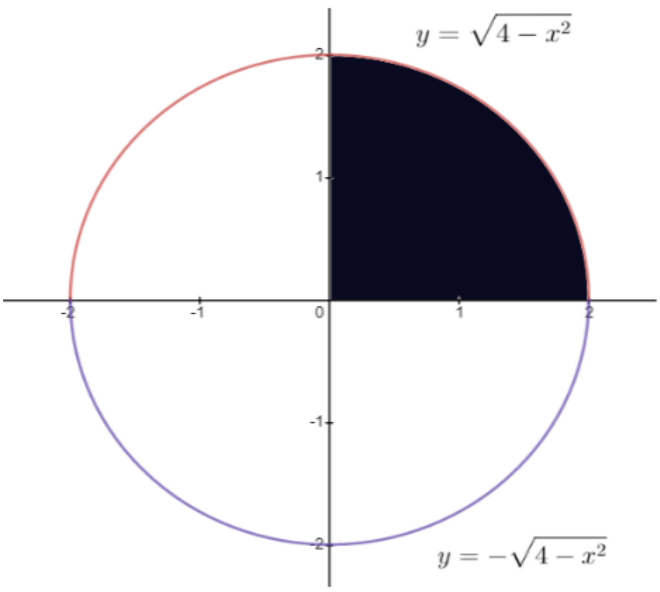
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Други начин:

Геометријски приступ. Нека је $y = \sqrt{4-x^2}$. Тада је $y^2 = 4 - x^2$, односно $x^2 + y^2 = 4$, а што представља једначину кружнице са центром у координатом почетку и полупречника $r = 2$. Како је ,,горњи" део кружнице дат једначином $y = \sqrt{4-x^2}$, а интеграли се у интервалу $[0, 2]$, то ће дати интеграл представљати површину испод кружнице у датом интервалу. Та површина је заправо четвртина површине круга полупречника $r = 2$, а то је π.



Одатле следи да је заправо

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \pi.$$

Овај реузлтат се може уопштити за произвољно $a > 0$. Биће

$$\int_0^a a^2 - x^2\,dx = \frac{a^2\pi}{4},$$

као четвртина површине круга полупречника $r = a$.

в) Приметимо да је подинтегрална функција непарна као производ непарне $f(x) = x^3$ и парне $g(x) = \cos 3x$, а интеграли се на симетричном интервалу, одакле следи да је интеграл једнак нули. Односно

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3 \cos 3x\,dx = 0.$$

Напомена. Овај пример је могао да се уради и помоћу парцијалне интеграције, али би захтевао доста пажљивог рачуна. Зато када у задацима имамо симетричан интервал интеграције, није лоше проверити да ли је функција можда непарна (или парна) што би нам уштедело много времена.

г) Видимо да је интервал интеграције симетричан па ћемо проверити да ли нам је можда подинтегрална функција непарна. Како је функција $f(x) = x^2$ парна, то је довољно проверити каква је функција $g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$. Проверимо парност функције g.

$$\begin{aligned} g(-x) &= \ln\left(\frac{-x+2}{2-(-x)}\right) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^{-1} \\ &= -\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) = -g(x). \end{aligned}$$

Дакле, g је непарна функција, па је подинтегрална непарна као производ парне и непарне и интеграл је једнак нули јер је на симетричном интервалу, односно

$$\int_{-1}^{1} x^2 \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) dx = 0.$$

д) И у овом примеру је интервал интеграције симетричан па ћемо проверити парност подинтегралне функције.

$$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = (*).$$

Како је

$$\begin{aligned} -x + \sqrt{x^2+1} &= \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

то је

$$(*) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x),$$

што значи да је функција непарна, па је интеграл на симетричном интервалу једнак нули, односно

$$\int_{-2}^{2} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx = 0.$$

Задаци за вежбу:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx;$

2. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1};$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\,dx;$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx;$

5. $\displaystyle\int_3^5 \sqrt{6x-x^2-5}\,dx;$

6. $\displaystyle\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx;$

7. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx;$

8. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\cos 5x\,dx;$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x};$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos x}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}\,dx;$

11. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^7-x^5+2x^3-x+1}{\cos^2 x}\,dx.$

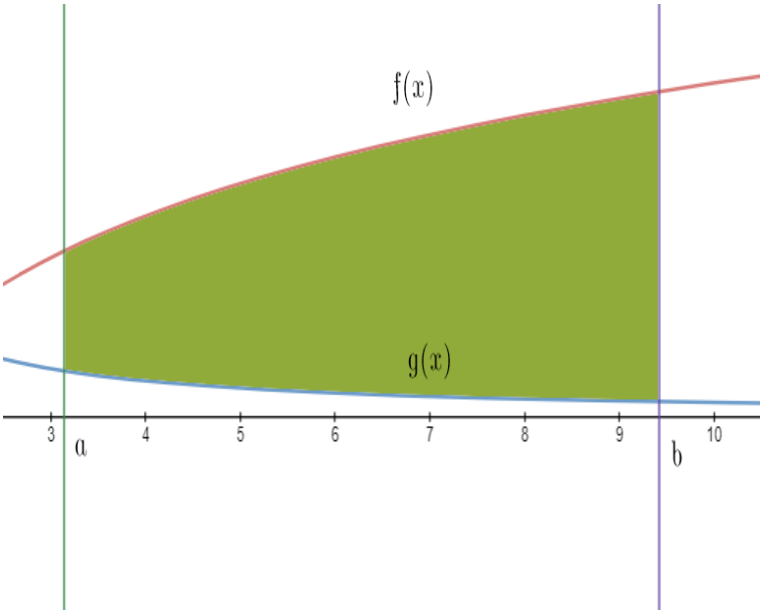
Вежбе планиране за 30.4.2020.

Површина равног лика

Ако су $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ две интеграбилне (за нас је довољно непрекидне) функције и ако је $f(x) \geqslant g(x)$ за све $x \in [a, b]$, тада је површина области D у равни коју ограничавају криве $f(x),\ g(x)$ и праве $x = a,\ x = b$ дата са

$$P(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx,$$

што је приказно на слици испод.

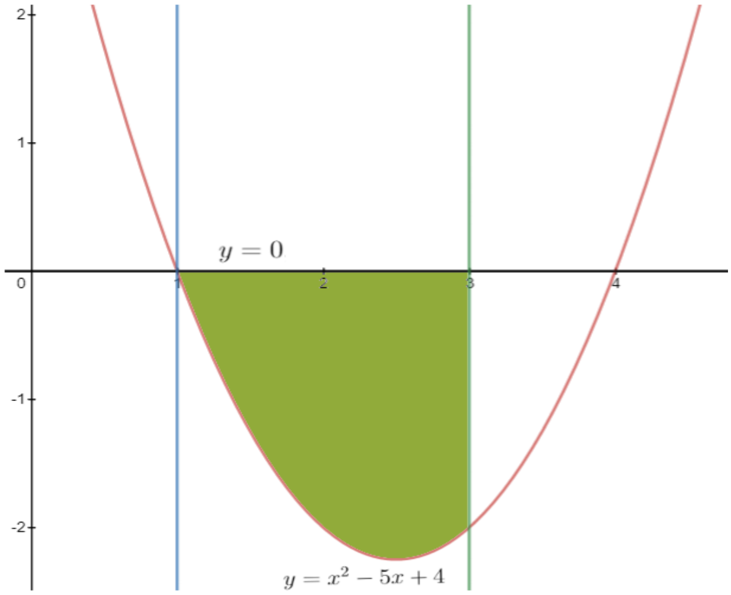


Дакле, осенчену површину добијамо када од површине испод криве $f(x)$, а то је $\int_a^b f(x)\, dx$ одузмемо површину испод криве $g(x)$, а то је $\int_a^b g(x)\, dx$ у датим границама.

Напомена. Ако више кривих ограничава неку област обавезно нацртати слику (ако је могуће) и одредити интервале у којима је нека крива изнад или испод друге (да се не би добиле негативне површине)!

Задатак 27. Израчунати површину области D ограничене кривом $y = x^2 - 5x + 4$ и правама $y = 0,\ x = 1,\ x = 3$.

Тражена површина је осенчена на слици.

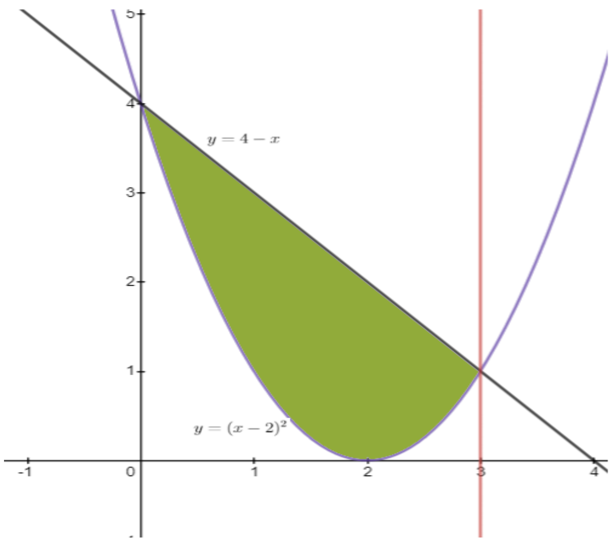


Са слике видимо да је горња горња крива заправо $y = 0$, а доња је $y = x^2 - 5x + 4$, па је површина области D

$$P(D) = \int_1^3 (0 - (x^2 - 5x + 4))\,dx = \int_1^3 (-x^2 + 5x - 4)\,dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\Big|_1^3 = \frac{10}{3}.$$

Задатак 28. Израчунати површину области D ограничене кривом $y = (x-2)^2$ и правом $y = 4 - x$.

Са слике видимо да је горња крива заправо права $y = 4 - x$, а доња крива $y = (x-2)^4$.



Интервал интеграције добијамо из пресека кривих $y = 4 - x$ и $y = (x-2)^2$, односно решавањем једначине $4 - x = (x-2)^2$, а чија су решења $x = 0$ и $x = 3$. Одатле је

$$\begin{aligned} P(D) &= \int_0^3 (4 - x - (x-2)^2)\, dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Задатак 29. Израчунати површину области D одређене правама $x = e,\ x = e^2,\ y = 0$ и графиком функције $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1}{x^2}$.

Површина која се тражи осенчена је на слици.

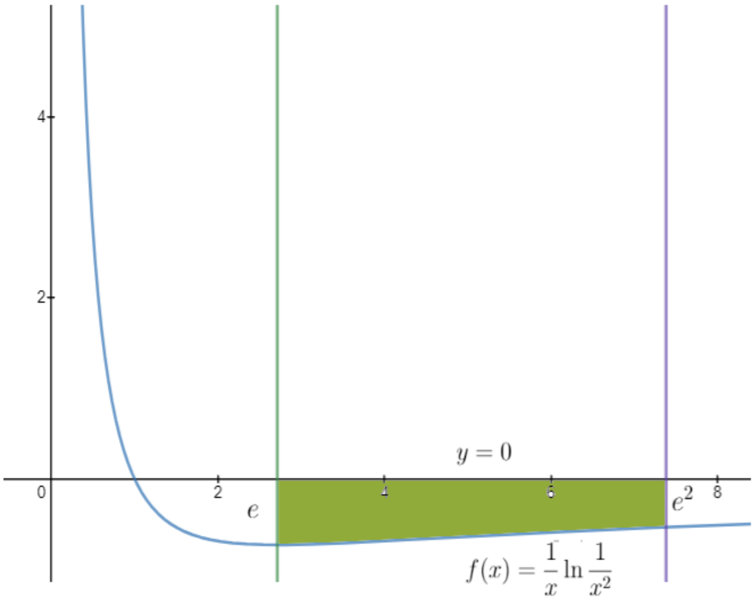
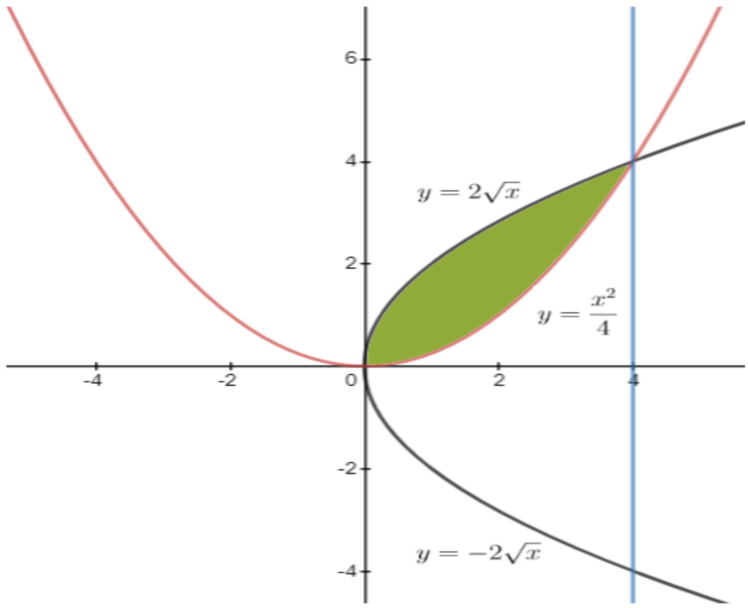


График ове криве није неопходно нацртати. Да би одредили која крива је горе, а која доле приметимо да је на датом интервалу $[e, e^2]$ $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x} \ln x^2 < 0$! То значи да је график функције $f(x)$ испод праве $y = 0$, па је површина

$$\begin{aligned} P(D) &= \int_e^{e^2} \left(0 - \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x^2} \right) dx = -\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (-\ln x^2)\, dx = 2 \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\, dx \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} \text{смена} : t = \ln x & x = e \Rightarrow t = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & x = e^2 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right\} = 2 \int_1^2 t\, dt = t^2 \Big|_1^2 = 3. \end{aligned}$$

Задатак 30. Израчунати површину област D ограничене параболама $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

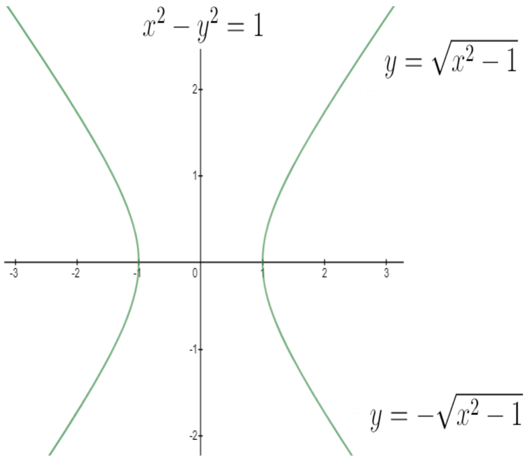


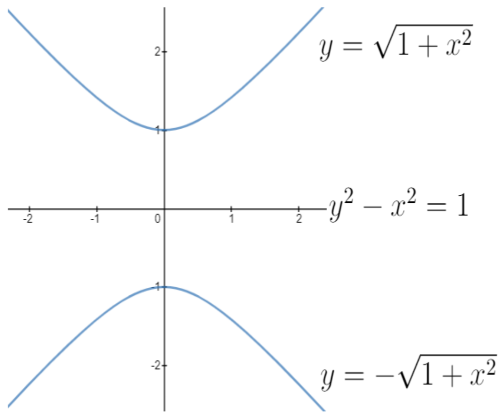
Пресек парабола $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$ се добија ако нпр. из једначине друге параболе изразимо y преко x и заменимо у прву. Имамо да је из друге једначине $y = \dfrac{x^2}{4}$, а то кад заменимо у прву добијамо $\dfrac{x^4}{16} = 4x$, однсоно $x\left(\dfrac{x^3}{16} - 4\right) = 0$, а (реална) решења ове једначине су $x = 0$ и $x = 4$. Парабола $y^2 = 4x$ има две гране, горњу и доњу. Горња је дата једначином $y = 2\sqrt{x}$, а доња $y = -2\sqrt{x}$. Са слике (а и зато што је парабола $4y = x^2$ увек изнад x-осе) видимо да нам треба горња грана друге параболе. Према томе, површина је

$$P(D) = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left(\frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3}.$$

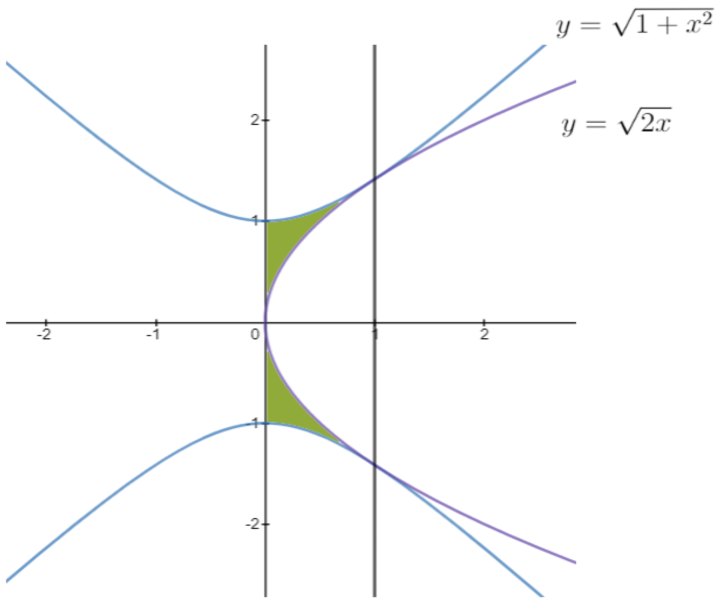
Задатак 31. Израчунати површину области D која је ограничена параболом $2x = y^2$, $y-$осом и хиперболом $y^2 - x^2 = 1$.

У овом задатку је потребно лепо нацртати слику. Приметимо да је у датој хиперболи $y^2 - x^2 = 1$ замењено место променљивама x и y у односну на хиперболу $x^2 - y^2 = 1$ коју смо цешће виђали током средње сколе. То значи да су само улоге оса замењене. Погледајмо на сликама како оне изгледају.





Наша област D је приказана на слици испод.



Пресек кривих налазимо решавањем система $y^2 = 2x$ и $y^2 - x^2 = 1$. Заменом добијамо да је $2x - x^2 = 1$, а решења ове једначине су $x = 0$ и $x = 1$. Како је све симетрично, видимо да је доња површина једнака горњој па је довољно посматрати горњу. Дакле, површина области је

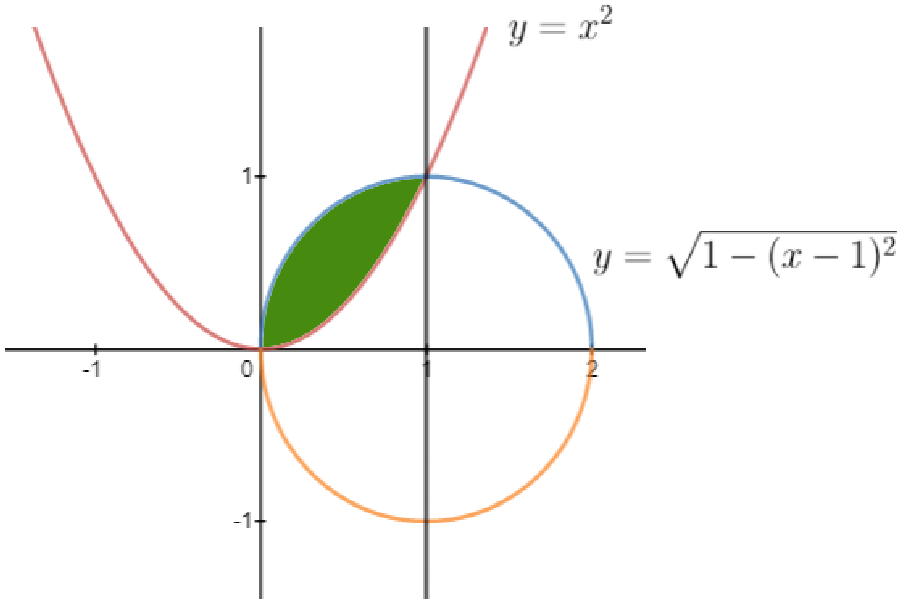
$$P(D) = 2\int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2x}\right) dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$- 2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = 2\left(\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\left.\frac{4\sqrt{2}\sqrt{x^3}}{3}\right|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Задатак 32. Израчунати површину области D ограничене кривама $y = x^2$ и $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Крива $(x-1)^2 + y^2 = 1$ је кружница са центром у $(1,0)$ полупречника $r = 1$. Пресек кружнице и параболе је решење система $y = x^2$ и $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Заменом добијамо једначину $x^2 - x = 0$. Решења ове једначине су $x = 0$ и $x = 1$.



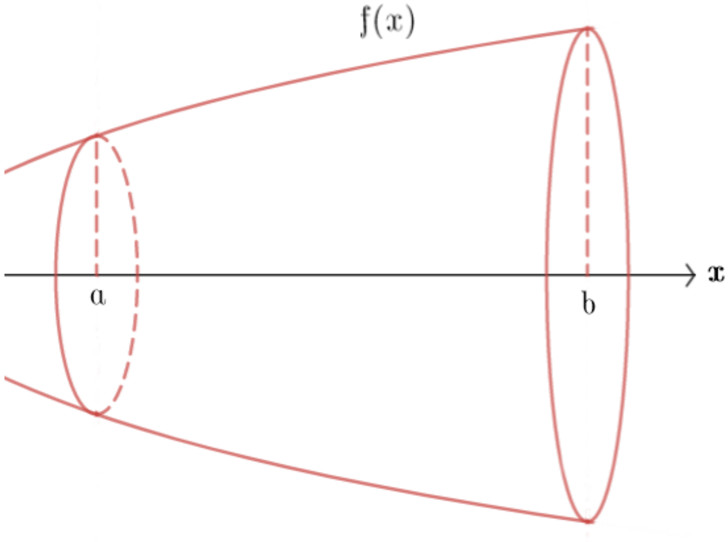
Са слике видимо да је горња крива заправо горња страна кружнице, односно $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$, а доња крива парабола $y = x^2$. Према томе, површина је

$$P(D) = \int_0^1 \left(\sqrt{1-(x-1)^2} - x^2\right) dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx$$
$$- \int_0^1 x^2\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

Запремина ротационог тела

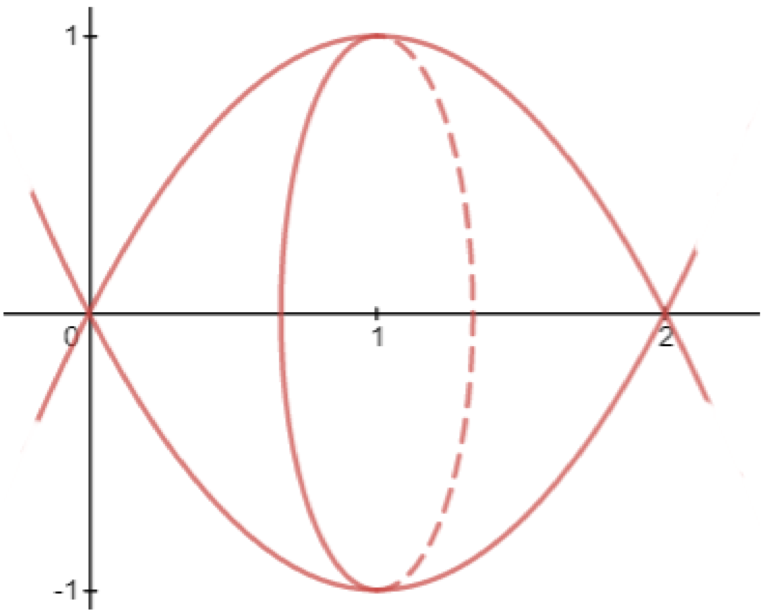
Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна и позитивна функција. Обртањем око $x-$осе крива $y = f(x)$ описује површ која са равнима $x = a$ и $x = b$ ограничава тело T (ротационо тело). Запремина тако добијеног тела T рачуна се по формули

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



Задатак 33. Наћи запремину тела T насталог ротацијом криве $y = 2x - x^2$ око $x-$осе за $x \in [0, 2]$.

Погледајмо слику.



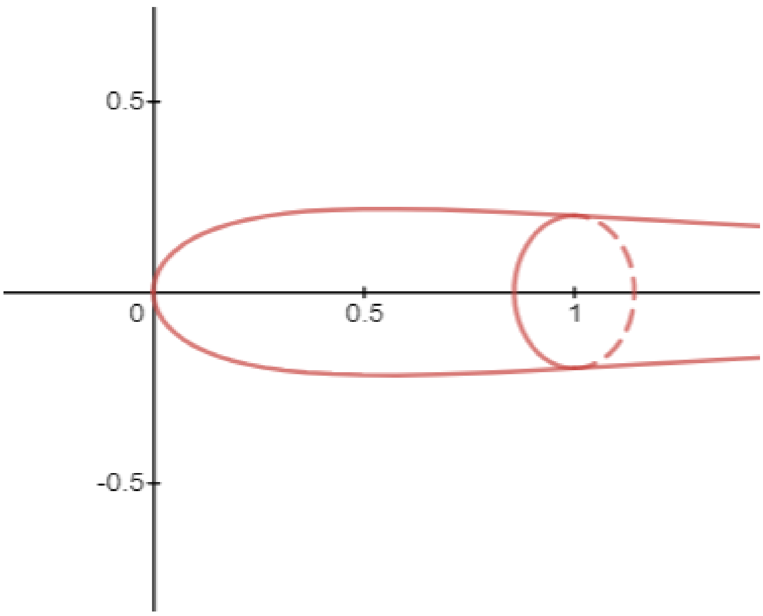
На датом интервалу функција $f(x) = 2x - x^2$ је позитивна, па је запремина ротационог тела дата са

$$V(T) = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2\, dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)\, dx =$$
$$= \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Задатак 34. Одредити запремину тела T насталог ротацијом криве $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 2x + 2}$ око $x-$осе за $x \in [0, 1]$.

Запремина тела је

$$\begin{aligned} V(T) =& \pi \int_0^1 \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{2x+2-2}{(x^2+2x+2)^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\, dx - \pi \int_0^1 \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\, dx \\ &= -\frac{\pi}{2(x^2+2x+2)} \Big|_0^1 - \pi \int_0^1 \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\, dx = \frac{3\pi}{20} \\ &- \frac{\pi}{2} \left(\frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \operatorname{arctg}(x+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{20} \\ &- \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{10} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi \operatorname{arctg} 2}{2}. \end{aligned}$$



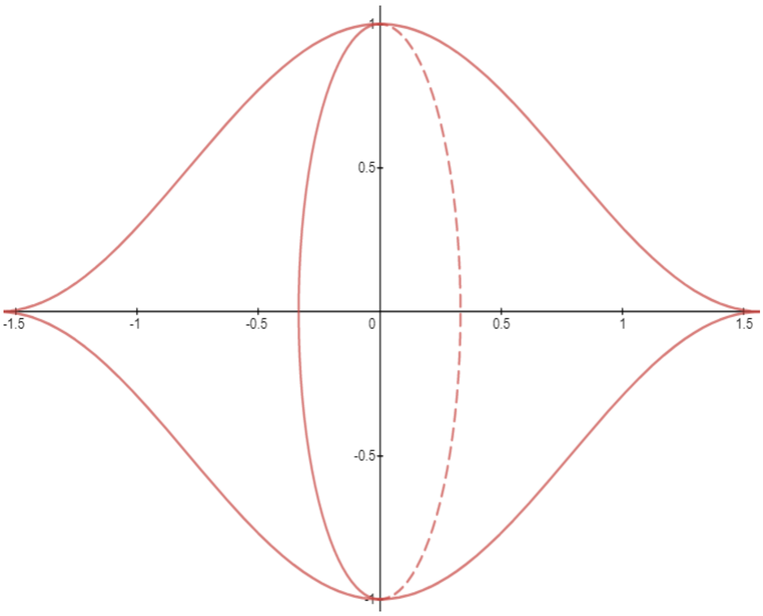
Задатак 35. Израчунати запремину тела T које настаје ротацијом криве $y = \cos^2 x$ око $x-$осе за $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Запремина је

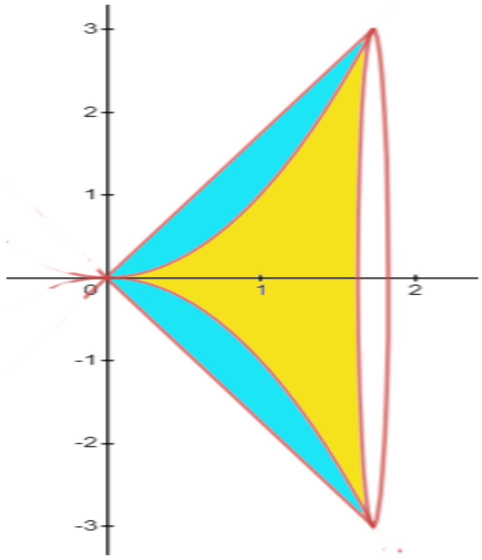
$$V(T) = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2x)^2}{4}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4}\, dx = 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi^2}{8}.$$



Задатак 36. Израчунати запремину тела T које настаје ротацијом око $x-$осе области ограничене параболом $y = x^2$ и правом $y = \sqrt{3}x$.



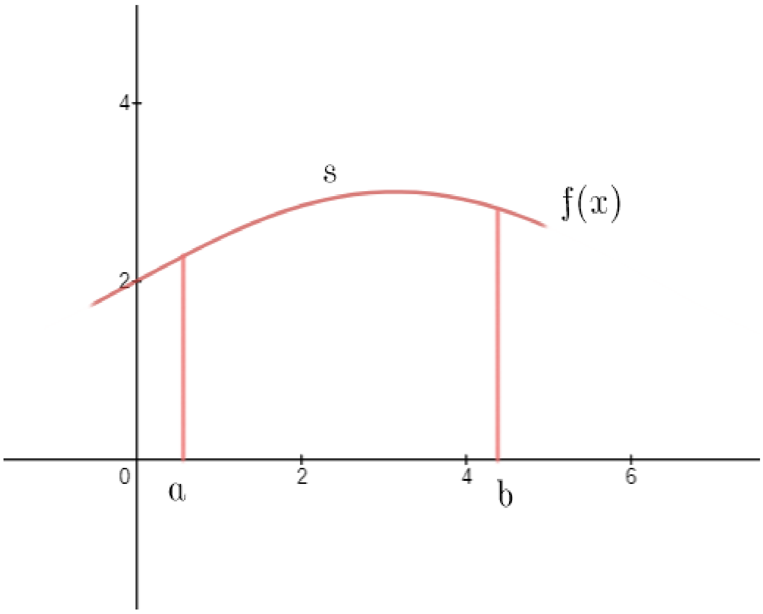
Са слике видимо да се запремина која се трази (плаво тело) добија тако што од запремине тела које је настало ротацијом праве одузмемо запремину тела које настаје ротацијом параболе (жуто тело). Остаје да одредимо границе интеграције. Њих одређујемо као решења система $y = x^2$ и $y = \sqrt{3}x$, а то су $x = 0$ и $x = \sqrt{3}$. Дакле, тражена запремина је

$$V(T) = \pi \int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\, dx - \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^4\, dx = \pi \left(x^3 - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}\pi}{5}.$$

Дужина лука криве

Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, диференцијабилна и нека је први извод f' непрекидна функција. Дужина лука криве $y = f(x)$ на сегменту $[a, b]$ је дата формулом

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$



Задатак 37. Наћи дужину лука криве $y = \ln(\cos x)$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Како је $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, то је дужина лука криве

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{|\cos x|}\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} \text{смена} : t = \sin x & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dt = \cos x\,dx & x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Задатак 38. Израчунати дужину лука криве $y = 2 + \sqrt{4-x^2}$ за $x \in [-1, \sqrt{3}]$.

Радимо прво извод $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Дужина лука криве је

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx = 2\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= 2\arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_{-1}^{\sqrt{3}} = 2\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \pi.
\end{aligned}
$$

Задатак 39. Израчунати дужину лука криве

$$
y = \sqrt{x^2-48} + 4\sqrt{6}\ln\left(x + \sqrt{x^2-48}\right),
$$

за $x \in [7, 8]$.

Први извод је $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-48}} + \dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}} = \dfrac{x+4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}}$. Одатле је

$$
\begin{aligned}
1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{(x+4\sqrt{6})^2}{x^2-48} &= \frac{x^2-48+x^2+8\sqrt{6}x+96}{x^2-48} \\
&= \frac{2(x^2+4\sqrt{6}x+24)}{x^2-48} = \frac{2(x+2\sqrt{6})^2}{x^2-48},
\end{aligned}
$$

па је дужина лука криве

$$
\begin{aligned}
s &= \int_7^8 \sqrt{\frac{2(x+2\sqrt{6})^2}{x^2-48}}\,dx = \sqrt{2}\int_7^8 \frac{|x+2\sqrt{6}|}{\sqrt{x^2-48}}\,dx = \sqrt{2}\int_7^8 \frac{x+2\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}}\,dx \\
&= \sqrt{2}\int_7^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-48}}\,dx + 4\sqrt{3}\int_7^8 \frac{1}{\sqrt{x^2-48}}\,dx = \sqrt{2}\sqrt{x^2-48}\Big|_7^8
\end{aligned}
$$

$$+4\sqrt{3}\ln\left(x+\sqrt{x^2-48}\right)\Big|_7^8 = 3\sqrt{2}-4\sqrt{3}\ln\frac{3}{2}.$$

Задаци за вежбу:

1. Израчунати површину области D која је ограничена кривом $y = \sin 2x \cos 2x$ и правама $y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4}$. Израчунати запремину тела T које настаје ротацијом дате области око $x-$осе.

2. Израчунати површину области D која је ограничена кривом $y = \dfrac{2\ln^2 x + 2\ln x - 1}{3x^2}$ и правама $y = 0,\ x = e,\ x = e^2$.

3. Израчунати површину области D која је ограничена кривом $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}$ и правама $y = 0,\ x = 2,\ x = 6$.

4. Израчунати запремину тела T насталог ротацијом криве $y = \operatorname{tg} x + 1$ око $x-$осе за $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

5. Израчунати површину области D одређене условима $y \geqslant 3-x$ и $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$.

6. Израчунати дужину лука криве $y = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ за $x \in [1,2]$.

Вежбе планиране за 7.5.2020.

Површина омотача ротационог тела

Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, диференцијабилна и нека је први извод f' непрекидна функција. Површина омотача тела које настаје ротацијом криве $y = f(x)$ око $x-$осе на сегменту $[a,b]$ дата је са

$$P(M) = 2\pi \int_a^b |f(x)|\, \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

Задатак 40. Израчунати површину омотача ротационог тела које настаје ротацијом криве $y = \cos x$ око x-осе за $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Приметимо прво да је $|\cos x| = \cos x$ јер $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Како је

$f'(x) = -\sin x$ то је површина

$$P(M) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx = \left\{ \begin{array}{cc} t = \sin x & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dt = \cos x\, dx & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\}$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \pi \left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \right).$$

Задатак 41. Израчунати површину површи настале ротацијом криве $y = \sqrt[3]{x}$ око $x-$осе за $x \in \left[\dfrac{1}{8}, 1\right]$.

Површина је

$$P(M) = 2\pi \int_{\frac{1}{8}}^1 \sqrt[3]{x} \sqrt{1 + \frac{1}{9\sqrt[3]{x^4}}}\, dx = 2\pi \int_{\frac{1}{8}}^1 x^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{9}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} x = t^{-\frac{3}{4}} & x = \frac{1}{8} \Rightarrow t = 16 \\ dx = -\frac{3}{4} t^{-\frac{7}{4}}\, dt & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} = -\frac{3\pi}{2} \int_{16}^1 t^{-2} \left(1 + \frac{t}{9}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

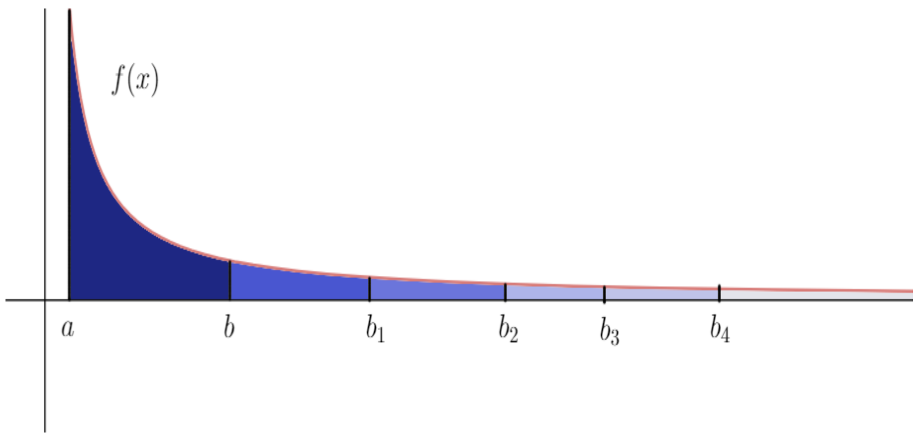
$$= \frac{3\pi}{2} \int_1^{16} t^{-2} \left(1 + \frac{t}{9}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{cc} 1 + \frac{t}{9} = z^2 & t = 1 \Rightarrow z = \frac{\sqrt{10}}{3} \\ dt = 18z\, dz & t = 16 \Rightarrow z = \frac{5}{3} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_{\frac{\sqrt{10}}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{z^2}{(z^2-1)^2}\, dz = 5.065...$$

Несвојствени интеграли

Проширићемо појам одређеног интеграла на ограниченом интервалу $[a, b]$ на интервал који може бити неограничен, ондносно облика $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ где су $a,\ b \in \mathbb{R}$. Такође, може се десити да је функција неограничена у близини тачака a или b, односно да има вертикалну асимптоту.

Посматрајмо интервал $[a, +\infty)$ и на њему дефинисану и интеграбилну (у обичном смислу) на сваком подсегменту облика $[a, b]$ функцију f.



Посматрајмо $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Дефинишемо несвојствени интеграл прве врсте са

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

и кажемо да он конвергира уколико лимес постоји, а у супротном да дивергира.

Са слике видимо да је геометријска интерпретација датог интеграла заправо површина неограничене области у равни. Уколико та површина има коначну меру онда кажемо да интеграл конвергира, у супротном да дивергира.

Слично се дефинише интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.

Задатак 42. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$;

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

д) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$;

ђ) $\displaystyle\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+8}$;

е) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 3x\,dx$.

Решење:

а) Да би срачунали овакве интеграле прво рачунамо $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, па онда пустимо лимес.

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Одатле је

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

б) Како је

$$\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^b = 2\left(\sqrt{b} - 1\right),$$

то је

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\left(\sqrt{b} - 1\right) = +\infty.$$

в) Како је

$$\int_1^b \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} t = \operatorname{arctg} x & x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} & x = b \Rightarrow t = \operatorname{arctg} b \end{array} \right\} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} b} t\,dt$$
$$= \frac{t^2}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} b} = \frac{1}{2}\left((\operatorname{arctg} b)^2 - \frac{\pi^2}{16}\right),$$

то је

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left((\operatorname{arctg} b)^2 - \frac{\pi^2}{16}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{3\pi^2}{32}.$$

г) Како је

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - e^{-b},$$

то је

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1.$$

д) Како је

$$\int_1^b \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^b \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\,dx = (\ln x - \ln(x+1))\,\Big|_1^b$$
$$= \ln b - \ln(b+1) + \ln 2 = \ln\left(\frac{b}{b+1}\right) + \ln 2,$$

то је

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{b}{b+1}\right)+\ln 2\right)$$
$$= \ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$$

Приметимо да у претходном примеру нисмо ,,спојили" логаритме у један, добили би лимес облика $" + \infty - (+\infty)"$, а који није одређен.

ђ) Како је

$$\int_5^b \frac{dx}{x^2-6x+8} = \int_5^b \frac{dx}{(x-3)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\Bigg|_5^b$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{b-4}{b-2}\right| - \ln\frac{1}{3}\right),$$

то је

$$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8} = \lim_{b\to+\infty}\int_5^b \frac{dx}{x^2-6x+8} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{b-4}{b-2}\right| - \ln\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 3}{2}.$$

е) Како је

$$\int_0^b e^{-2x}\sin 3x\,dx - = \frac{e^{-2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)}{13}\Bigg|_0^b$$
$$= -\frac{1}{13}\left(e^{-2b}(2\sin 3b + 3\cos 3b) - 3\right),$$

то је

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 3x\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}\sin 3x\,dx\\ &= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{13}\left(e^{-2b}(2\sin 3b+3\cos 3b)-3\right)=\frac{3}{13}.\end{aligned}$$

Задатак 43. Испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ у зависности од реалног параметра p.

Нека је $p\neq 1$. Тада је

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^b=\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}.$$

Одатле следи да је

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p<1\end{cases},$$

јер је $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}=0$ ако је $1-p<0$, однсоно $p>1$, а $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}=+\infty$ ако је $1-p>0$, односно $p<1$.

Ако је $p=1$ имамо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty.$$

Из свега видимо да интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ конвергира ако и само ако је $p>1$.

Претпоставимо сада да је функција $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ неограничена у близини тачке $x=b$ и за свако $\varepsilon>0$ интеграбилна на сегменту $[a,b-\varepsilon]$.

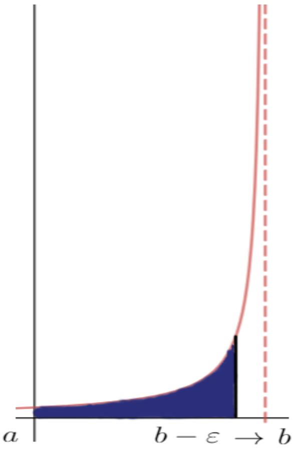
Помсматрајмо $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Дефинишемо несвојствени интеграл друге врсте са

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

и кажемо да он конвергира ако лимес постоји, а у супротном да дивергира.

Ако је функција неограничена у близини тачке $x = a$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$



Задатак 44. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$; в) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$; ђ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$; е) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$.

Решење:

а) Функција $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ није ограничена у близини тачке $x = 0$. Имамо да је

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Одатле је

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

б) Функција $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ је неограничена у околини тачке $x = 0$. Имамо да је

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1 = 1 - \frac{1}{\varepsilon}.$$

Одатле је

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\infty.$$

в) Функција $f(x) = \ln x$ није ограничена у близини тачке $x = 0$. Имамо да је

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\, dx = (x\ln x - x)\big|_\varepsilon^1 = \varepsilon - 1 + \varepsilon \ln \varepsilon.$$

Одатле је

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon - 1 + \varepsilon\ln\varepsilon) = -1,$$

јер је $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$, што се решава применом Лопиталове теореме јер је $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, а последњи лимес је облика "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

г) Функција $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ није ограничена у близини тачке $x = 0$. Имамо да је

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|\,\Big|_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| - \ln|\ln\varepsilon|\,.$$

Одатле је

$$\int_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| - \ln|\ln\varepsilon|\right) = -\infty,$$

јер је $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \ln|\ln\varepsilon| = +\infty$.

д) Функција $f(x) = \operatorname{tg} x$ није ограничена у близини тачке $x = \dfrac{\pi}{2}$. Имамо да је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right| = -\ln|\sin\varepsilon|\,.$$

Одатле је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln|\sin\varepsilon| = +\infty.$$

д) Функција $\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ није ограничена у близини тачке $x = 1$. Имамо да је

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2)\,\Big|_{1+\varepsilon}^{2}$$
$$= \arcsin 0 - \arcsin(\varepsilon-1) = -\arcsin(\varepsilon-1).$$

Одатле је

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(\varepsilon-1)$$
$$= -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

За вежбу показати да интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ конвергира ако и само ако је $p < 1$.

Бета и Гама функција

Нека су $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Гама функција је функција $\Gamma : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ дефинисана са

$$\Gamma(\alpha) \stackrel{\text{деф}}{=} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx.$$

Бета функција је функција $B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ дефинисана са

$$B(\alpha, \beta) \stackrel{\text{деф}}{=} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Основна својства:

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$;
2. $\Gamma(n+1) = n!$ за $n \in \mathbb{N}_0$;
3. Ако је $\alpha \in (0,1)$, онда је $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$;
4. $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Из особине 3. имамо да је $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$, одакле је $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Из особине 2. имамо да је $\Gamma(1) = \Gamma(0+1) =$

$0! = 1$, а из особина 3. и 4. да је $B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, ако је $\alpha \in (0,1)$.

Напоменимо да када надаље будемо уводили смене, са $x = +\infty$ и слично, ћемо краће означавати заправо да x у лимесу тежи бесконачности.

Израчунајмо колико је нпр. $\Gamma(\frac{9}{2})$.

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$= \cdots = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}.$$

Задатак 45. Ирачунати:

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x+1)e^{-\sqrt{x}}\sqrt[4]{x}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} (x-1)^{\frac{3}{2}}e^{-x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx$.

Решење:

а) Како је у дефиницији гама функције у интегралу стоји e^{-x}, то се намеће да смена буде $t = \sqrt{x}$, односно $x = t^2$.

$$\int_0^{+\infty} (x+1)e^{-\sqrt{x}}\sqrt[4]{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} x = t^2 & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = 2t\,dt & x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \end{array} \right\}$$
$$= 2\int_0^{+\infty} (t^2+1)e^{-t}t\sqrt{t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}}(t^2+1)e^{-t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^{\frac{7}{2}}e^{-t}\,dt$$
$$+ 2\int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}}e^{-t}\,dt = 2\left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{9}{2}-1}e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}-}e^{-t}\,dt\right)$$
$$= 2\left(\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right) = 2\left(\frac{105\sqrt{\pi}}{16} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\right) = \frac{117\sqrt{\pi}}{8}.$$

б) Овде видимо да нам доња граница не креће од нуле, па морамо негде да уведемо смену $t = x - 1$, а то се и намеће.

$$\int_1^{+\infty} (x-1)^{\frac{3}{2}}e^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} t = x-1 & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ dt = dx & x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-(1+t)}\, dt = e^{-1} \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{1}{e}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4e}.$$

в) Сменом $t = \ln x$, односно $x = e^t$ итеграл сводимо на гама функцију.

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{cc} x = e^t & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ dx = e^t\, dt & x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-t}\, dt$$
$$= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Задатак 46. Израчунати:

а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}$, $n \geqslant 2$;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + x^4)^2}\, dx$.

Решење:

а)

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{\Pi}{4}}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2!} = \frac{\pi}{8}.$$

б)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}} = \left\{ \begin{array}{cc} t = x^n \Rightarrow x = t^{\frac{1}{n}} & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n}\, dt & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\}$$
$$= \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{-\frac{1}{n}}\, dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

јер је $\dfrac{1}{n} \in (0,1)$ за $n \geqslant 2$.

в) Овај тип задатака се своди на бета функцију сменом $t = \dfrac{1}{1 + x^4}$

одакле је $x = \sqrt[4]{\dfrac{1-t}{t}}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} x = \sqrt[4]{\frac{1-t}{t}} & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ dx = -\frac{(1-t)^{-\frac{3}{4}}}{4t^{\frac{5}{4}}}\,dt & x = +\infty \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\}$$
$$= -\frac{1}{4}\int_1^0 (1-t)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} t^2 (1-t)^{-\frac{3}{4}} t^{-\frac{5}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(2\right)} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{16}$$
$$= \frac{1}{16}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Задатак 47. Израчунати:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^{10} x\,dx;$ б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{11}{2}} x\,dx.$

Решење:

Овакав тип задатака се своди на бета функцију сменом $t = \sin^2 x$.

а)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^{10} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x \cos^9 x \sin x \cos x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{9}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{9}{2}} \sin x \cos x\,dx$$
$$= \left\{ \begin{array}{cc} t = \sin^2 x & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ 2\sin x \cos x\,dx = dt & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1-t)^{\frac{9}{2}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma\left(11\right)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{10!} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 \pi}{10!}.$$

Део под б) урадити за вежбу.

Вежбе планиране за 14.5.2020.

Диференцијална једначина која раздваја промењиве

Диференцијална једначина облика

$$y' = f(x)g(x)$$

је диференцијална једначина која раздваја промењиве. Решава се тако што се прво извод напише у диференцијалном облику $y' = \dfrac{dy}{dx}$ па онда све што има x ,,одлази"уз dx, а све што има y уз dy и на крају се ти изрази интеграле засебно по x и по y. Дакле,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \ \Big/ \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C - \textbf{Опште решење}.$$

Приметимо да сму у решавању ове једначине делили изразом $g(y)$. Све то смо радили под претпоставком да он није идентички једнак нули. Решења једначине $g(y) = 0$ ће бити кандидати за **сингуларна решења**, односно решења која се не могу добити из општег за неку вредност константе C.

Задатак 48. Решити диферецијалне једначине:

а) $y' = e^{x+y}$;

б) $(1+e^x)yy' = e^x$;

в) $y' - x^2 = y(x^2y + x^2 - 2y')$;

г) $y' = \dfrac{\sqrt[3]{1+y^3}}{(1+x^2)^2}$;

д) $y(1-x^2)dy = x(1-y^2)dx$;

ђ) $y' - \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$.

Решење:

а)

$$y' = e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int e^x\,dx$$

$$\Rightarrow -e^{-y} = e^x + C - \text{опште решење}.$$

Решење можемо оставити у овом облику, а можемо и мало средити.

$$e^{-y} = -(e^x + C) \Rightarrow -y = \ln(-e^x - C) \Rightarrow y = -\ln(-e^x - C)\,.$$

Дата диф. једначина нема сингуларних решења зато што је $g(y) = e^y \neq 0$.

б)

$$\begin{aligned}(1+e^x)yy' = e^x \Rightarrow y' = \frac{e^x}{y(1+e^x)} = \frac{1}{y}\frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{e^x}{1+e^x}\\ \Rightarrow y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx\\ \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C - \text{опште решење.}\end{aligned}$$

Једначина нема сингуларних решења зато што је $g(y) = \dfrac{1}{y} \neq 0$.

в) Прво трансформишимо мало дату једначину.

$$\begin{aligned}&y - x^2 = y(x^2y + x^2 - 2y') = x^2y^2 + x^2y - 2y'y \Rightarrow y' + 2y'y\\ &= x^2y^2 + x^2y + x^2 \Rightarrow y'(1+2y) = x^2(y^2+y+1)\\ &\Rightarrow y' = x^2\frac{y^2+y+1}{2y+1}.\end{aligned}$$

Одатле је

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx} = x^2\frac{y^2+y+1}{2y+1} \Rightarrow \frac{dy}{\frac{y^2+y+1}{2y+1}} = x^2\,dx \Rightarrow \int\frac{2y+1}{y^2+y+1}\,dy = \int x^2\,dx\\ &\Rightarrow \ln\left(y^2+y+1\right) = \frac{x^3}{3} + C - \text{опште решење.}\end{aligned}$$

Једначина нема сигнуларних решења јер је $g(y) = \dfrac{y^2+y+1}{2y+1} \neq 0$ зато што је $y^2+y+1 \neq 0$.

г)

$$\begin{aligned}y' = \frac{\sqrt[3]{1+y^3}}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{1+y^3}}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt[3]{1+y^3}} = \frac{dx}{(1+x^2)^2}\\ \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt[3]{1+y^3}} = \int\frac{dx}{(1+x^2)^2} + C.\end{aligned}$$

Остаје да решимо дате интеграле. Од раније је познато да је

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)}^{2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}.$$

Срачунајмо интеграл по y.

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{1+y^3}} = \int (1+y^3)^{-\frac{1}{3}}\, dy = \left\{ \begin{array}{c} y^3 = t \Rightarrow y = t^{\frac{1}{3}} \\ dy = \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{3}\, dt \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}(1+t)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int t^{-1}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{3}} dt = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1+t}{t} = z^3 \Rightarrow t = \frac{1}{z^3-1} \\ dt = -\frac{3z^2}{(z^3-1)^2}\, dz \end{array} \right\}$$

$$= -\int (z^3-1)z^{-1}\frac{z^2}{(z^3-1)^2}\, dz = -\int \frac{z}{z^3-1}\, dz = \frac{1}{3}\int \frac{z-1}{z^2+z+1}\, dz$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{6}\ln\left(z^2+z+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln|z-1|$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{y^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}} + 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}} - 1\right|.$$

Према томе, опште решење је дато са

$$\frac{1}{6}\ln\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{y^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}} + 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}} - 1\right| = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C.$$

Приметимо да ово важи ако је $g(y) = \sqrt[3]{1+y^3} \neq 0$, односно $y \neq -1$. Константна функција $y = -1$ јесте решење дате диф. једначине у шта се непосредно уверавамо заменом у једначину. Заиста, лева страна једначине је $y' = (-1)' = 0$, а десна је $\dfrac{0}{(1+x^2)^2} = 0$, што значи да је лева једнака десној и једнакост важи, односно функција $y = -1$ јесте решење дате диф. једачине. Да је оно сингуларно уверавамо се тако што функцју $y = -1$,,убацимо"у опште решење.

После убацивања и краћег сређивања добијамо

$$0 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C \Rightarrow -C = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}.$$

Лева страна једнакости је константа, а десна је променљива, па не могу бити једнаке (овде је јако битно напоменути да НЕ ТРАЖИМО РЕШЕЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ, него једнакост посматрамо као једнакост две функције на неком интервалу, јер x заправо припада неком интервалу и мења се, а C се не мења!). То значи да је решење $y=-1$ сингуларно решење.

д) У овом примеру диф. једначина је дата у диференцијалном облику. Из тог облика видимо да је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)} = \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{1-y^2}{y}.$$

Одатле имамо да је

$$\begin{aligned}
\frac{y}{1-y^2}\,dy = \frac{x}{1-x^2}\,dx \Rightarrow & \int \frac{y}{1-y^2}\,dy = \int \frac{x}{1-x^2}\,dx \\
& \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| + C \\
& \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-y^2}{1-x^2}\right| = C \Rightarrow \left|\frac{1-y^2}{1-x^2}\right| = e^{-2C} \\
& \Rightarrow \frac{1-y^2}{1-x^2} = \pm e^{-2C} = C_1 \\
& \Rightarrow 1-y^2 = C_1(1-x^2) - \text{опште решење.}
\end{aligned}$$

Ово важи за $g(y) = \frac{1-y^2}{y} \neq 0$, односно за $y \neq 1$ и $y \neq -1$. Лако се проверава да су функције $y = \pm 1$ заиста решења дате диф. једначине. Ако заменимо $y = \pm 1$ у опште решење, добијамо да је

$$0 = C_1(1-x^2),$$

одакле видимо да ће ова једнакост важити, за све x из интервала дефинисаности, ако и само ако је $C_1 = 0$. То значи да дата решења нису сингуларна јер се могу добити за конкретно C_1!

ђ) Дата диф. једначина је еквилвалетна са

$$y' = \sin\frac{x+y}{2} + \sin\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\cos\frac{y}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\cos\frac{y}{2}} = 2\int \sin\frac{x}{2}\,dx + C.$$

Решавамо интеграле:

$$2\int \sin\frac{x}{2}\,dx = -4\cos\frac{x}{2}.$$

$$\int \frac{dy}{\cos\frac{y}{2}} = \int \frac{\cos\frac{y}{2}}{1-\sin^2\frac{y}{2}}\,dy = \ln\left|\frac{1-\sin\frac{y}{2}}{1+\sin\frac{y}{2}}\right|.$$

Према томе, опште решење је дато са

$$\ln\left|\frac{1-\sin\frac{y}{2}}{1+\sin\frac{y}{2}}\right| = -4\cos\frac{x}{2} + C.$$

Ово смо радили под претпоставком $\cos\dfrac{y}{2} \neq 0$, однсоно $y \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Лако се види да су функције облика $y = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ решења дате диф. једначине. Заменом у опште решење добијамо

$$\ln\left|\frac{1-\sin(\pi+k\pi)}{1+\sin(\pi+k\pi)}\right| = -4\cos\frac{x}{2} + C,$$

односно

$$0 = -4\cos\frac{x}{2} + C.(*)$$

Одавде закључујемо да су сва решења облика $y = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ сингуларна, јер не постоји констатна C за коју је испуњена једнакост (*) за свако x из интервала дефинисаности.

Задатак 49. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y' = xye^x$ које задовољава услов $y(0) = 1$.

Решење:

Овакав тип задатака је познат као Кошијев проблем, односно налажење решења диф. једначине које задовољава одређени услов. Тај услов још зовемо и почетни услов. Решавамо га тако што прво решимо једначину неким методама, а затим из општег решења одређујемо конретно решење које задовољава тај услов, односно бирамо конкретну криву која пролази кроз ту тачку, у овом случају тачку $(0,1)$. Понекад се може десити и да је то решење неко од сингуларних, али то је ређи случај. Дакле, прво решимо дату једначину.

$$y' = xye^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xye^x \Rightarrow \frac{dy}{y} = xe^x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xe^x\,dx + C$$
$$\Rightarrow \ln|y| = xe^x - e^x + C - \text{опште решење.}$$

Ово важи за $y \neq 0$. Приметимо да функција $y = 0$ не задовољава почетни услов (јер је константна и увек има вредност 0). Дакле, посматрамо само опште решење. Почетни услов нам каже да за $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Заменом добијамо

$$\ln 1 = 0e^0 - e^0 + C \Rightarrow 0 = -1 + C \Rightarrow C = 1.$$

Дакле, тражено решење које задовољава почетни услов $y(0) = 1$ је дато (у имплицитном облику) са

$$\ln|y| = xe^x - e^x + 1.$$

Хомогена диференцијална једначина

Диференцијална једначина облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

је хомогена диф. једначина и сменом $z = \dfrac{y}{x}$ се своди на једначину која раздваја променљиве. Заиста, из $z = \dfrac{y}{x}$ следи да је $y = zx$, па је $y' = z'x + zx' = z'x + z$. Заменом у једначину добија се

$$z'x + z = f(z) \Rightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x},$$

а ова једначина раздваја променљиве. Кандидати за сингуларна решења биће решења једначине $f(z) - z = 0$. Напоменимо да су решења ове једначине, ако постоје, увек решења полазне диф. једначине, односно ако $z = z_0$ решење једначине $f(z) - z = 0$, тада је функција $y = z_0x$ решење полазне диф. једначине.

Задатак 50. Решити диференцијалне једначине:

а) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

б) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-2xy}$;

в) $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y$;

г) $xy' = xe^{\frac{y}{x}}+y+x$;

д) $xy'-y = (x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)$.

Решење:

а) За $x \neq 0$ имамо

$$y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{x(1+\frac{y}{x})}{x(1-\frac{y}{x})} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Уводимо смену $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = z'x+z$, па једначина постаје

$$\begin{aligned}
z'x+z = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow z'x = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z} \Rightarrow z' = \frac{1+z^2}{x(1-z)} \\
\Rightarrow \frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{dx}{x} + C \\
\Rightarrow \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) = \ln|x| + C.
\end{aligned}$$

Одатле добијамо опште решење

$$\operatorname{arcctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + C.$$

Диф. једначина нема сингуларна решења јер једначина $f(z)-z=0$, тј. једначина $\dfrac{1+z^2}{1-z}=0$ нема реална решења.

б) За $x \neq 0$ је

$$y' = \frac{x^2+y^2}{x^2-2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{2y}{x}}.$$

Смена $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = z'x+z$, па се једначина своди на

$$\begin{aligned}
z'x+z = \frac{1+z^2}{1-2z} \Rightarrow z'x = \frac{1+z^2-z+2z^2}{1-2z} = \frac{3z^2-z+1}{1-2z} \\
\Rightarrow \frac{1-2z}{3z^2-z+1}\,dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1-2z}{3z^2-z+1}\,dz = \int \frac{dx}{x} + C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{6z-1}{\sqrt{11}}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(3z^2 - z + 1\right) = \ln|x| + C.$$

Опште решење је дато са

$$\frac{4}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{3y}{x}-1}{\sqrt{11}}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1\right) = \ln|x| + C.$$

Диф. једначина нема сингуларна решења јер једначина $f(z)-z=0$, тј. једначина $\dfrac{3z^2-z+1}{1-2z} = 0$ нема реална решења.

в) Претпоставмо да је $x > 0$ (слично се ради и кад је $x < 0$). Имамо

$$xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y = x\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + y \Rightarrow y' = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}.$$

Уводимо смену $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = z'x + z$ и једначина постаје

$$z'x + z = \sqrt{1-z^2} + z \Rightarrow z'x = \sqrt{1-z^2} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \arcsin z = \ln x + C.$$

Из свега, опште решење је облика

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln x + C.$$

Ово важи за $z \neq \pm 1$, односно $y \neq \pm x$. Ако је $y = x$, заменом у опште решеје добијамо

$$\arcsin 1 = \ln x + C \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \ln x + C \Rightarrow \frac{\pi}{2} - C = \ln x,$$

па имамо једнакост константне функције $\dfrac{\pi}{2} - C$ и променљиве $\ln x$ што се не може остварити ни за једну вредност C, па је решење $y = x$ сингуларно решење. Слично је и за $z = -1$, односно $y = -x$.

г) За $x \neq 0$ је

$$xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y + x \Rightarrow y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1.$$

Уводимо смену $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = z'x + z$ и једначина постаје

$$z'x + z = e^z + z + 1 \Rightarrow z'x = e^z + 1 \Rightarrow \frac{dz}{e^z+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{e^z+1} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Интеграцијом, уз смену $e^z + 1 = t$ добијамо да је

$$\int \frac{dz}{e^z+1} = z - \ln\left(e^z+1\right),$$

па је опште решење дато са

$$\frac{y}{x} - \ln\left(e^{\frac{y}{x}} + 1\right) = \ln|x| + C.$$

Диф. једначина нема сингуларна решења јер једначина $e^z + 1 = 0$ нема реална решења.

д) За $x \neq 0$ имамо

$$xy' - y = (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \Rightarrow xy' = y + (x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$$
$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right).$$

Уводимо смену $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = z'x + z$ и једначина постаје

$$z'x + z = z + (1+z)\ln(1+z) \Rightarrow z'x = (1+z)\ln(1+z)$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Интеграцијом, уз смену $\ln(1+z) = t$, добијамо

$$\int \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \ln\left|\ln(1+z)\right|.$$

Одатле добијамо опште решење

$$\ln\left|\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)\right| = \ln|x| + C.$$

Можемо мало средити ово решење.

$$\ln\left|\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)\right| = \ln|x| + C \Rightarrow \ln\left|\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)\right| - \ln|x| = C$$
$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{x}\right| = C \Rightarrow \left|\frac{\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{x}\right| = e^C = C_1$$
$$\Rightarrow \frac{\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{x} = \pm C_1 = C_2 \Rightarrow 1 + \frac{y}{x} = e^{C_2 x}$$

$$\Rightarrow y = xe^{C_2 x} - x.$$

Ово смо радили под претпоставком да је $(1+z)\ln(1+z) \neq 0$. Сингуларна решења могу бити решења једначине $(1+z)\ln(1+z) = 0$, односно $z=-1$ или $1+z=1 \iff z=0$, односно $y=-x$ или $y=0$.

Ако убацимо $y=-x$ у опште решење добијамо $-x = xe^{C_2 x} - x \iff 0 = xe^{C_2 x}$. Ако је $x>0$ (однсоно x припада неком интервалу (а,б) који је десно од нуле) и пустимо да $C_2 \to -\infty$, добићемо да је последња једнакост задовољена.

Ако убацимо $y=0$ у опште решење добијамо $0 = xe^{C_2 x} - x$ што је тачно за $C_2 = 0$.

Из свега видимо да функције $y=-x$ и $y=0$ потпадају под опште решење, па нису сингуларна.

Задатак 51. Решити диференцијалне једначине:

а) $y' = \dfrac{-7x+3y+7}{3x-7y-3}$; б) $y' = -\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$.

Ова два примера су диф. једначине облика

$$y' = f\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right),$$

а које се своде на хомогену у зависности од тога какви су a,b,c,d. Ако је $ad-bc \neq 0$, онда сменом $x=u+\alpha,\ y=v+\beta$, где α и β одабирамо погодно, једначину сводимо на хомогену. Други случај је $ad-bc=0$, па се сменом $ax+by+d=z$ једначина своди на једначину која раздваја променљиве.

а) Овде је $a=-7,\ b=3,\ c=3,\ d=-7$, па је $ad-bc=40\neq 0$. Уводимо смену

$$\begin{aligned} x &= u+\alpha \\ y &= v+\beta. \end{aligned}$$

Морамо сада да изразимо y' у терминима u и v.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+\beta)}{d(u+\alpha)} = \frac{dv}{du} = v'.$$

Када убацимо смене у једначину добијамо

$$v' = \frac{-7(u+\alpha)+3(v+\beta)+7}{3(u+\alpha)-7(v+\beta)-3} = \frac{-7u+3v-7\alpha+3\beta+7}{3u-7v+3\alpha-7\beta-3}.$$

Ако би коефицијенти у имениоцу и бројиоцу били једнаки нули, једначина би била хомогена. Зато тек одавде можемо да видимо како да одаберемо α и β. Решавамо систем

$$\begin{aligned} -7\alpha+3\beta+7&=0\\ 3\alpha-7\beta-3&=0. \end{aligned}$$

Решење је $\alpha=1,\ \beta=0$, односно наше смене су

$$\begin{aligned} x&=u+1\\ y&=v. \end{aligned}$$

Једначина сада постаје

$$v' = \frac{-7u+3v}{3u-7v} = \frac{u\left(-7+\frac{3v}{u}\right)}{u\left(3-\frac{7v}{u}\right)} = \frac{-7+\frac{3v}{u}}{3-\frac{7v}{u}}.$$

Ово је хомогена једначина уз ознаке да је u је независна, а v је зависна променљива. Уводимо смену $z=\dfrac{v}{u}$ где је $z=z(u)$, а одатле је (исто као кад имамо x и y) $v'=z'v+z$, па се једначина своди на

$$\begin{aligned} z'u+z=\frac{-7+3z}{3-7z} &\Rightarrow z'u=\frac{-7+3z-3z+7z^2}{3-7z}=\frac{7z^2-7}{3-7z}\\ &\Rightarrow \frac{3-7z}{7z^2-7}\,dz=\frac{du}{u} \Rightarrow \int\frac{3-7z}{7z^2-7}\,dz=\int\frac{du}{u}+C\\ &\Rightarrow -\frac{5\ln|z+1|+2\ln|z-1|}{7}=\ln|u|+C\\ &\Rightarrow -\frac{5\ln\left|\frac{v}{u}+1\right|+2\ln\left|\frac{v}{u}-1\right|}{7}=\ln|u|+C. \end{aligned}$$

Одатле је опште решење облика

$$-\frac{5\ln\left|\frac{y}{x-1}+1\right|+2\ln\left|\frac{y}{x-1}-1\right|}{7}=\ln|x-1|+C.$$

Може се показати (после сређивања израза) да се решења $z=\pm1$, односно $y=\pm(x-1)$ могу добити из општег, па нису сингуларна.

б) Приметимо да овде имамо други случај који је напоменут пре задатка. Уводимо смену $z = x + y + 1 \iff x + y = z - 1$, односно $y = z - x - 1 \Rightarrow y' = z' - 1$. Убацивањем у једначину добијамо

$$\begin{aligned} z' - 1 = -\frac{z}{2z-3} \Rightarrow z' = -\frac{z}{2z-3} + 1 = \frac{-z+2z-3}{2z-3} = \frac{z-3}{2z-3} \\ \Rightarrow \frac{2z-3}{z-3}\,dz = dx \Rightarrow \int \frac{2z-3}{z-3}\,dz = \int dx + C \\ \Rightarrow 2z + 3\ln|z-3| = x + C. \end{aligned}$$

Одатле је опште решење дато са

$$2(x+y+1) + 3\ln|x+y-2| = x + C.$$

Ово је рађено под претпоставком да је $z - 3 \neq 0$. После сређивања општег решења добијамо

$$(x+y-2)^3 = C_1 e^{-2(x+y+1)+x},$$

па видимо да се је $z = 3$, однсно $y = 2 - x$ решење једначине које се добија за вредност $C_1 = 0$ те стога није сингуларно.

Линеарна диференцијална једначина

Линеарна диференцијална једначина је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где су $p(x), q(x)$ непрекидне функције и $q(x) \neq 0$ (јер у супротном добијамо једначину која раздваја промењљиве). Опште решење линеарне диф. једначине је дато са

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx\right).$$

Напоменимо да линеарна диф. једначина нема сингуларна решења. Такође, често ће се јављати да је $\displaystyle\int p(x)\,dx = \ln|A|$. У задацима ћемо писати логаритам без апсолутне вредности, односно $\displaystyle\int p(x)\,dx = \ln A$. Разлог је у томе што се добија исти облик решења и за $|A| > 0$ и $|A| < 0$. Заиста, ако је $|A| < 0$ имамо

$$y = e^{-\ln(-A)}\left(C + \int e^{\ln(-A)} q(x)\,dx\right) = -\frac{1}{A}\left(C - \int Aq(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{A}\left(-C + \int Aq(x)\,dx\right) = \frac{1}{A}\left(C_1 + \int Aq(x)\,dx\right),$$

где је $-C = C_1$ опет нека константа. Исти облик решења се добија и ако је $|A| > 0$. У овом показивању смо користили особине експоненцијалне и логаритамске функције $e^{\ln x} = x$ и $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$.

Задатак 52. Решити диференцијалне једначине:

а) $xy' = y + x\ln x$;

б) $xy' + xy = 3x^2e^{-x} - y$;

в) $y' - \dfrac{2y}{\sin 2x} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{(1x^2)\ln x}$;

г) $y' = \dfrac{y}{x^2+3x+2} + \dfrac{(x+1)\sin 2x}{(x+2)(\cos^2 x + 2)^2}$;

д) $y' + \left(\dfrac{1-x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x\ln x}\right)y = \dfrac{1-x}{(x^2+1)\ln x}$;

ђ) $y'(x\cos y + \sin 2y) = 1$.

Решење:

а) Дељењем једначине са $x \neq 0$ добијамо

$$y' = \frac{y}{x} + \ln x, \text{ односно } y' - \frac{1}{x}y = \ln x.$$

Из овог облика видимо да је $p(x) = -\dfrac{1}{x}$, $q(x) = \ln x$. Рачунамо одговарајуће интеграле који се појављују у општем решењу.

$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x.$$

$$\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Коначно, опште решење је

$$y = e^{\ln x}\left(C + \frac{\ln^2 x}{2}\right) = x\left(C + \frac{\ln^2 x}{2}\right).$$

б) Дељењем са $x \neq 0$ добијамо

$$y' + y = 3xe^{-x} - \frac{y}{x},\ \text{односно} y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = 3xe^{-x}.$$

Видимо да је $p(x) = 1 + \dfrac{1}{x},\ q(x) = 3xe^{-x}$. Рачунамо

$$\int p(x)\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln x.$$

$$\int e^{\int p(x)\, dx} q(x)\, dx = \int e^{(x+\ln x)} 3xe^{-x}\, dx = \int 3x^2\, dx = x^3.$$

Опште решење је

$$y = \frac{e^{-x}}{x}\left(C + x^3\right).$$

в) Из облика једначине одмах видимо да је $p(x) = -\dfrac{2}{\sin 2x},\ q(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x + \sqrt{1+x^2}}$. Рачунамо

$$\int p(x)\, dx = -\int \frac{2}{\sin 2x}\, dx = \left\{ \begin{array}{cc} t = tgx \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t & \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} & \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right\}$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln t = -\ln\left(\operatorname{tg} x\right).$$

$$\int e^{\int p(x)\, dx} q(x)\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{x + \sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{x + \sqrt{1+x^2}} = (*).$$

У последњем интегралу уводимо прву Ојлерову смену $\sqrt{1+x^2} = t - x$ и интеграл се своди на

$$\int \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t^3}\right) dt = \frac{\ln t}{2} - \frac{1}{4t^2} = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2} - \frac{1}{4(x + \sqrt{1+x^2})^2}.$$

Враћањем у $(*)$ добијамо

$$(*) = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2} - \frac{1}{4(x + \sqrt{1+x^2})^2},$$

па је опште решење дато са

$$y = \operatorname{tg} x \left(C + \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{2} - \frac{1}{4(x + \sqrt{1+x^2})^2}\right).$$

г) Једначина је еквивалентна са

$$y' - \frac{y}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)\sin 2x}{(x+2)(\cos^2 x+2)^2},$$

па је $p(x) = -\frac{1}{x^2+3x+2}$, $q(x) = \frac{(x+1)\sin 2x}{(x+2)(\cos^2 x+2)^2}$. Рачунамо потребне интеграле.

$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = -\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$
$$= -\left(\ln(x+1) - \ln(x+2)\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

$$\begin{aligned}\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx &= \int \frac{x+2}{x+1}\frac{(x+1)\sin 2x}{(x+2)(\cos^2 x+2)^2}\,dx \\ &= \int \frac{\sin 2x}{(\cos^2 x+2)^2}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{(\cos^2 x+2)^2}\,dx \\ &= \left\{ \begin{array}{c} t = \cos^2 x + 2 \\ dt = -2\sin x\cos x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x+2}.\end{aligned}$$

Опште решење је

$$y = \frac{x+1}{x+2}\left(C + \frac{1}{\cos^2 x+2}\right).$$

д) Из облика једначине видимо да је $p(x) = \frac{1-x}{1+x^2} + \frac{1}{x\ln x}$, $q(x) = \frac{1-x}{(1+x^2)\ln x}$. Рачунамо

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{1-x}{1+x^2} + \frac{1}{x\ln x}\,dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \ln(\ln x)$$
$$= \operatorname{arctg} x - \left(\ln\sqrt{1+x^2} - \ln(\ln x)\right) = \operatorname{arctg} x - \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln x}\right).$$

$$\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx = \int e^{\operatorname{arctg} x} e^{-\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln x}\right)} \frac{1-x}{(1+x^2)\ln x}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} t \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right\} = \int e^t \frac{1-\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\, dt \\
&= \int e^t (\cos t - \sin t)\, dt = e^t \cos t = e^{\operatorname{arctg} x} \cos(\operatorname{arctg} x) \\
&= \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}
$$

Опште решење је

$$
y = \frac{e^{-\operatorname{arctg} x}\sqrt{1+x^2}}{\ln x} \left(C + \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} \right).
$$

ђ) У овом примеру једначина није линеарна ако гледамо по y и не можемо је решити неком од прећашних метода. Зато ћемо искористити следећи идентитет (под претпоставком да функција $y(x)$ има инверзну).

$$
y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}.
$$

Једначина се сада своди на

$$
\frac{1}{x'}(x \cos y + \sin 2y) = 1, \text{ односно } x' - x\cos y = \sin 2y.
$$

Ово је сада линеарна једначина по x! Одговарајуће функције су $p(y) = -\cos y,\ q(y) = \sin 2y$. Рачунамо интегале који су нам потребни.

$$
\int p(y)\, dy = -\int \cos y\, dy = -\sin y.
$$

$$
\begin{aligned}
\int e^{\int p(y)\, dy} q(y)\, dy &= \int e^{-\sin y} \sin 2y\, dy = 2\int e^{-\sin y} \sin y \cos y\, dy \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \sin y \\ dt = \cos y\, dy \end{array} \right\} = 2\int t e^{-t}\, dt = -2(t+1)e^{-t} \\
&= -2(\sin y + 1)e^{\sin y}.
\end{aligned}
$$

Опхте решење је облика

$$
x = e^{\sin y}\left(C - 2(\sin y + 1)e^{-\sin y}\right) = Ce^{\sin y} - 2(\sin y + 1).
$$

Задаци за вежбу:

Вежбе планиране за 21.5.2020.

Бернулијева диференцијална једначина

Бернулијева диференцијална једначина је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0 \text{ и } \alpha \neq 1.$$

За $\alpha = 0$ једначина је линеарна, а за $\alpha = 1$ једначина која раздваја промењљиве. Ако је $\alpha > 0$ функција $y = 0$ је решење једначине (може бити сингуларно, а може и да потпада под опште). Ако једначину помножимо са $y^{-\alpha} \neq 0$ добијамо

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Одавде нам је природно да уведемо смену $z = y^{1-\alpha}$. Кад диференцирамо по x добијамо $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, јер је $y = y(x)$ функција која зависи од x, па морамо да применимо правило за извод сложене функције! Када уврстимо смену добијамо

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x),$$

а после множења једначине са $1 - \alpha$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x) \ - \ \text{линеарна по } z.$$

Једначину смо свели на линеарну, а знамо како се она решава. На крају се само врати смена.

Задатак 53. Решити диференцијалне једначине:

а) $y' + 2xy = -2x^3y^3$;

б) $xy' + y - y^2 \ln x = 0$;

в) $(x^2-1)y' + 2xy^2 - xy = 0$;

г) $y' + \dfrac{2y\sin x}{\cos x} = \dfrac{2\sqrt{y}\cos x}{\sin^2 x}$.

а) Множећи једначину са y^{-3} и $y \neq 0$ добијамо

$$y^{-3}y' + 2xy^{-2} = -2x^3.$$

Уводимо смену $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$, па једначина постаје

$$-\frac{1}{2}z' + 2xz = -2x^3 \Rightarrow z' - 4xz = 4x^3.$$

Сада радимо линеарну по z где су $p(x) = -4x$ и $q(x) = 4x^3$. Рачунамо интеграле који улазе у опхте решење

$$\int p(x)\,dx = \int -4x\,dx = -2x^2,$$

$$\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx = \int e^{-2x^2} 4x^3\,dx = (t = -2x^2 ...) = -\frac{e^{-2x^2}(2x^2+1)}{2}.$$

Опште решење је

$$z = e^{2x^2}\left(C-\right) - \frac{e^{-2x^2}(2x^2+1)}{2},$$

односно када вратимо смену

$$y^{-2} = e^{2x^2}\left(C-\right) - \frac{e^{-2x^2}(2x^2+1)}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{e^{2x^2}\left(C - \frac{e^{-2x^2}(2x^2+1)}{2}\right)}.$$

На крају проверавамо да ли је $y = 0$ сингуларно или није. Увршта-вањем у опште решење добијамо

$$0 = \frac{1}{e^{2x^2}\left(C - \frac{e^{-2x^2}(2x^2+1)}{2}\right)},$$

што добијамо за $C \to +\infty$, па није сингуларно.

б) Дељењем са $x \neq 0$ једначина се своди на

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \ln x}{x}.$$

Множимо једначину са y^{-2}, $y \neq 0$ и добијамо

$$y^{-2}y' + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Сменом $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$ једначина се своди на

$$-z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Имамо
$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x,$$
$$\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx = -\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = (t = \ln x ...) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$
Опште решење је
$$z = x\left(C + \frac{\ln x + 1}{x^2}\right) = Cx + \ln x + 1,$$
а после враћања смене
$$y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}.$$
Решење $y = 0$ добијамо за $C \to +\infty$, па није сингуларно.

в) Дељењем са $x^2 - 1 \neq 0$ добијамо
$$y' + \frac{2xy^2}{x^2-1} - \frac{xy}{x^2-1} = 0 \Rightarrow y' - \frac{xy}{x^2-1} = -\frac{2xy^2}{x^2-1}.$$
Можимо са $y^{-2},\ y \neq 0$
$$y^{-2}y' - \frac{xy^{-1}}{x^2-1} = -\frac{2x}{x^2-1}.$$
Сменом $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$ добијамо једначину
$$-z' - \frac{xz}{x^2-1} = -\frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow z' + \frac{xz}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$
$$\int p(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) = \ln\sqrt{x^2-1},$$
$$\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx = \int \frac{2x\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -2\sqrt{x^2-1}.$$
Опште решење је
$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(C - 2\sqrt{x^2-1}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(C - 2\sqrt{x^2-1}\right)}.$$
Решење $y = 0$ добијамо за $C \to +\infty$, па није сингуларно.

д) Једначину помножимо са $y^{-\frac{1}{2}},\ y \neq 0$ и добијамо

$$y^{-\frac{1}{2}}y' + \frac{2y^{\frac{1}{2}}\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos x}{\sin^2 x}.$$

Уводимо смену $z = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z' = \dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$, па се једначина своди на

$$2z' + \frac{2z\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow z' + \frac{z\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right),$$

$$\int e^{\int p(x)\,dx}q(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Опште решење је

$$z = \cos x\,(C - \operatorname{ctg} x) \Rightarrow y = \cos^2 x\,(C - \operatorname{ctg} x)^2.$$

Видимо да решење $y = 0$ не може да се добије ни за једну вредност константе C, па је сингуларно решење.

Једначина са тоталним диференцијалом

Једначина облика

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

је једначина тоталног диференцијала ако је задовољен услов

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Опште решење има облик

$$u(x,y) = C,$$

где је функција u дата са

$$u(x,y) = \int P\,dx + \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)dy,$$

или у дуалном облику

$$u(x,y) = \int Q\,dy + \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dy\right)dx.$$

Напоменимо да ако функцију интегралимо по x онда је све што зависи од y константа, и обрнуто.

Задатак 54. Решити дференцијалне једначине:

а) $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$;
б) $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0$.

Решење:

а) Проверавамо да ли је једначина са тоталним диференцијалом.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

па једначина јесте са тоталним диференцијалом. Сада тражимо функцију u.

$$\int P\,dx=\int\left(x^3+xy^2\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}\right)=x^2y,$$

$$\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)dy=\int(x^2y+y^3-x^2y)\,dy=\int y^3\,dy=\frac{y^4}{4}.$$

Опште решење је

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C.$$

б) Проверавамо услов да ли је једначина са тоталним диференцијалом.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2x-\frac{1}{x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2x-\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\int P\,dx=\int\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx=y\sqrt{1+x^2}+yx^2-y\ln x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{1+x^2}+yx^2-y\ln x\right)=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x,$$

$$\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)dy=\int 0\,dy=0.$$

Опште решење је

$$u(x,y)=y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=C.$$

Интеграциони фактор

Претпоставимо да једначина $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ није једначина тоталног диференцијала, односно није испуњен услов $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Ако постоји функција $\lambda=\lambda(x,y)$ таква да једначина

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx+\lambda(x,y)Q(x,y)dy=0$$

јесте једначина са тоталним диференцијалом, тада се функција $\lambda=\lambda(x,y)$ назива интеграционим фактором полазне једначине. Ми ћемо разматрати случај када је интеграциони фактор облика $\lambda=\lambda(z),\ z=z(x,y)$. У том случају интеграциони фактор се добија из једначине

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial z}{\partial x}-P\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Када одредимо интеграциони фактор, тада једначину $\lambda Pdx+\lambda Qdy=0$ решавамо као једначину тоталног диференцијала по формули из претходног одељка уз ознаке $P_1=\lambda P,\ Q_1=\lambda Q$.

Задатак 55. Доказати да једначина

$$\left(y\ln y+\frac{xy(2x+1)}{1-x^3}\right)dx+x\ln x dy=0$$

има интеграциони фактор облика $\lambda=\lambda(z),\ z=xy$, па затим решити дату једначину.

Решење:
Имамо да је $P=y\ln y+\dfrac{xy(2x+1)}{1-x^3},\ Q=x\ln x,\ z=xy$. Даље је

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\ln y+1+\frac{x(2x+1)}{1-x^3},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\ln x+1$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

Замнењујемо све у једначину

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial z}{\partial x}-P\frac{\partial z}{\partial y}},$$

и добијамо

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\ln y+\frac{x(2x+1)}{1-x^3}-\ln x}{xy\ln x-xy-\frac{x^2y(2x+11)}{1-x^3}}\,dz=\frac{\ln y-\ln x+\frac{x(2x+1)}{1-x^3}}{-xy\left(\ln y-\ln x+\frac{x(2x+1)}{1-x^3}\right)}\,dz$$
$$=-\frac{dz}{xy}=-\frac{dz}{z}.$$

Дакле, добили смо једначину

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{dz}{z},$$

одакле следи да је $\lambda=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{xy}$.

Сада решавамо једначину $\lambda P dx+\lambda Q dy=0$, и означавамо са $P_1=\lambda P,\ Q_1=\lambda Q$, односно

$$P_1=\frac{\ln y}{x}+\frac{2x+1}{1-x^3},\ Q_1=\frac{\ln x}{y}.$$

Рачунамо потребне интеграле

$$\int P_1\,dx=\int\left(\frac{\ln y}{x}+\frac{2x+1}{1-x^3}\right)dx=\ln x\ln y-\ln|1-x|$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\int P_1\,dx=\frac{\ln x}{y},$$
$$\int\left(Q_1-\frac{\partial}{\partial y}\int P_1\,dx\right)\,dy=\int 0\,dy=0.$$

Опште решење је

$$\ln x\ln y-\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=C.$$

Задатак 56. Доказати да једначина

$$\cos x dx+\left(\frac{1}{e^{2y}-e^y+1}+y+\sin x\right)dy=0$$

има интеграциони фактор $\lambda=\lambda(y)$, па затим решити дату једначину.

Решење:

Приметимо да нам је $z = y$, јер смо рекли да је $\lambda = \lambda(z)$. Рачунамо шта је потребно.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Постављамо једначину за инт. фактор

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-\cos x}{-\cos x}dz = dz = dy \Rightarrow \lambda = e^y.$$

$$P_1 = e^y \cos x,\ Q_1 = \frac{e^y}{e^{2y} - e^y + 1} + ye^y + e^y \sin x$$
$$\int P_1\,dx = e^y \sin x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\int P_1\,dx = e^y \sin x$$
$$\int \left(Q_1 - \frac{\partial}{\partial y}\int P_1\,dx\right) dy = \int \left(\frac{e^y}{e^{2y} - e^y + 1} + ye^y\right) dy$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^y - 1}{\sqrt{3}} + e^y(y-1).$$

Опште решење је

$$e^y \sin x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^y - 1}{\sqrt{3}} + e^y(y-1) = C.$$

Задатак 57. Доказати да једначина

$$\left(2x^2 + (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right) dx + 2xydy = 0$$

има интеграциони фактор $\lambda = \lambda(x^2+y^2)$, па затим решити дату једначину.

Решење:

У овом задатку нам је $z = x^2 + y^2$. Рачунамо потребне изводе и постављамо једначину

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\ln(x^2+y^2) + 2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{\lambda} &= \frac{2y\ln(x^2+y^2)}{4x^2y-(4x^2y+2y(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2))}\,dz\\
&= \frac{2y\ln(x^2+y^2)}{2y\left(2x^2-2x^2-(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right)}\,dz = -\frac{dz}{x^2+y^2} = -\frac{dz}{z}\\
&\Rightarrow \lambda = \frac{1}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Посматрамо нове функције $P_1 = \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2),\ Q_1 = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. У овом задатку ћемо искористити дуалне формуле за одређивање општег решења једначине са тоталним диференцијалом, односно

$$u(x,y) = \int Q\,dy + \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dy\right)\,dx,$$

зато што је много лакше наћи интеграл од Q_1 него од P_1! Рачунамо

$$\begin{aligned}
&\int Q_1\,dy = \int \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy = x\int\frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = x\ln(x^2+y^2)\\
&\frac{\partial}{\partial x}\int Q_1\,dy = \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\\
&\int\left(P-\frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dy\right)\,dx = \int 0\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Опште решење је

$$x\ln(x^2+y^2) = C.$$

Клероова и Лагранжова диференцијална једначина

Клероова и Лагранжова диф. једначина су специјални случајави једначина које се не могу решити по првом изводу, односну не могу се написати у облику $y' = f(x,y)$. Њих ћемо решавати параметризацијом.

Клероова диференцијална једначина је једначина облика

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

где је φ нека диференцијабила функција. Једначину решавамо параметризацијом. Уводимо параметар $p = y'$. Одавде следи да је $\dfrac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx$. Једначина се сада своди на

$$y = xp + \varphi(p).$$

Даље, урадимо диференцијал једначине и замењујемо добијену везу између диференцијала $dxidy$. Приметимо да ако је ираз са десне стане једнакости функција од две промењливе x и p. Диференцијал функције две промењливе $u(s,t)$ је дат са $du = u'_x dx + u'_y dy$.

$$\begin{aligned}
&dy = (xp)'_x dx + (xp)'_p dp + \varphi'(p)dp \Rightarrow \\
&dy = pdx + xdp + \varphi'(p)dp \Rightarrow \\
&pdx = pdx + xdp + \varphi'(p)dp \Rightarrow \\
&0 = (x + \varphi'(p))dp.
\end{aligned}$$

Опште решење добијамо из једнакости

$$dp = 0 \Rightarrow p = C,$$

одакле следи да је опште решење дато са

$$y = Cx + \varphi(C).$$

Сингуларно решење добијамо решавањем система

$$\begin{aligned}
&x + \varphi'(p) = 0 \\
&y = xp + \varphi(p).
\end{aligned}$$

Задатак 58. Решити диференцијалне једначине:

а) $y - xy' - y'^2 = 0$; б) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

Решење:

а) Дата једначина је еквивалента једначини

$$y = xy' + y'^2.$$

Радимо параметрзиацију $y' = p$ и искористићемо одмах изведене формуле. Имамо да је $\varphi(p) = p^2 \Rightarrow \varphi'(p) = 2p$. Опште решење је дато са

$$y = Cx + C^2,$$

а сингуларно тражимо из система

$$\begin{aligned}
&x + 2p = 0 \\
&y = px + p^2.
\end{aligned}$$

Из прве једначине имамо $p = -\dfrac{x}{2}$, па заменом у другу добијамо да је $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{4} = -\dfrac{x^2}{4}$ сингуларно решење.

б) Уводимо параметризацију $y' = p$. Опште решење је дато са

$$y = Cx + \sqrt{1 + C^2},$$

а сингунарлно добијамо из система

$$\begin{aligned} x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} &= 0 \\ y = xp + \sqrt{1+p^2}&. \end{aligned}$$

Одавде не можемо да изразимо p преко x, али можемо обрнуто. Имамо да је $x = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, а одатле $y = -\dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. Дакле, сингуларно решење је дато у параметарском облику

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \end{aligned}$$

Приметимо да је $x^2 + y^2 = 1$, а $y > 0$, што значи да је сингуларно решење заправо горњи део јединичне кружнхице.

Диференцијална једначина облика

$$y = x\psi(y') + \varphi(y'),\ \psi \neq y'$$

је Лагранжова диференцијална једначина. Она се такође решава параметризацијом $y' = p \Rightarrow dy = pdx$ и поступак је исти као и код Клероове једначине. Увођењем параметризације, Лагранжова једначина се своди на линеарну диф. једначину.

Задатак 59. Решити диференцијалну једначину $y = 2xy' + y'^2$.

Ово је Лагранжова диф. једначина јер је $\psi(y') = 2y' \neq y'$. Уводимо параметризацију $y' = p \Rightarrow dy = pdx$. Једначина се своди на

$$y = 2xp + p^2.$$

Одатле је

$$dy = 2pdx + 2xdp + 2pd \Rightarrow pdx = 2pdx + 2xdp + 2pd$$
$$\Rightarrow 0 = pdx + (2x + 2p)dp \Rightarrow -pdx = (2x + 2p)dp \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2x + 2p}{p}$$
$$\Rightarrow x' = -\frac{2x}{p} - 2 \Rightarrow x' + \frac{2x}{p} = -2 - \text{линеарна по } x.$$

Решење ове једначине је

$$x = x(p) = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}.$$

Заменом у $y = 2xp + p^2$ добијамо да је

$$y = y(p) = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

Коначно, опште решење једначине у параметарском облику је

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$$
$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$