Дејан Илић

Полиноми и рационалне ф-је више променљивих

Полином $P(x)$ је сваки израз који се може добити тако што се на бројеве и променљиву x коначно много пута примене три рачунске операције: сабирање, множење и одузимање*.

Рационална функција $R(x)$ је свака функција која се може добити тако што на бројеве и променљиву x применимо све четири основне рачунске операције. Наравно, уместо $P(x) = 6x\cdot x\cdot x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}x\cdot x + 3x - 2$ пишемо $P(x) = 6x^3 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}x^2 + 3x - 2$, што практично значи да користимо степен променљиве. То се поклапа са нашом дефиницијом док год је у питању степен ~~променљиве~~ коме је експонент природан број (или нула). То је, заправо, алтернативна дефиниција. Моном је израз облика $a_i x^{n_i}$, при чему је $a_i \in \mathbb{R}$ и $n_i \in \mathbb{N}_0$, а

---

* Заправо је довољно користити сабирање и множење, јер уместо да нешто одузмемо, можемо га помножити са (-1) и сабрати, али пошто не мења дефиницију, додајемо и одузимање.

полином је збир монома. Слично, рационална функција се може дефинисати као количник два полинома.

Појам полинома и рационалне функције се може уопштити. За дате променљиве $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, полином са тим променљивим је сваки израз који се може добити тако што се на бројеве и променљиве $x_1, \dots, x_k$ коначно много пута примене рачунске операције сабирања, множења и одузимања. Означавамо их са $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Q(x_1, \dots x_k)$ итд.
Рационална функција $R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ се конструише тако што се на бројеве и променљиве $x_1, x_2, x_3, \dots$ и x_k примењују све четири рачунске операције.

Примери: $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sqrt{3}\, x_1^2 x_2^7 x_5^6 - \pi^e x_4^4 x_5^7 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} x_2^2$,

$R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2^2 + x_3^7 + x_5 \cdot x_4 \cdot x_2^2$,

$P_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1$ су полиноми.

~~Приметимо да се не јављају све променљиве~~

Приметимо да не мора свака променљива да се јавља у сваком полиному.

$$R_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}{Q(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}$$

$$R_2(x_1,\dots,x_5) = \frac{P(x_1,\dots,x_5)}{1} = P(x_1,\dots,x_5)$$

$$R_3(x_1,\dots,x_5) = \frac{1}{Q(x_1,\dots,x_5)}$$

$$R_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{\pi x_1 x_2^3}{x_3} x_4^{-7}$$

Ово су примери рационалних функција.

Приметимо, као што је илустровано функцијом R_2, да је сваки полином уједно и рационална функција.

Израз $\pi x_1 x_2^3 x_4^{-7}$ није полином јер има негативан степен. $e^{\pi^{\sqrt{2}}} x_1^2 x_2^{1/2} x_3$ није ни полином ни рационална функција, јер има степен у ком експонент није цео број.

Израз $2x_1 \cdot \sin x_2 + x_5^3$ није ни полином ни рационална ф-ја јер поред рачунских операција користи ф-ју $\sin$.

Колико променљивих има полином или рационална функција види се из контекста.

Кад причамо о интеграцији рационалне функције, мислимо на рационалну функцију једне променљиве.

Рационалне функције више променљивих ћемо нарочито да користимо да конструишемо специјалне типове функција за које имамо изграђене технике решавања.

На пример, ако је $R(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{x_1 \cdot x_3}{x_2^3 - x_4^7}$, онда се $R(x, \sqrt{x+1}, \sqrt[3]{x+1}, \sqrt[6]{x+1})$ добија тако <u>што</u> свако појављивање променљиве x_1 заменимо променљивом x, свако појављивање променљиве x_2 заменимо кореном $\sqrt{x+1}$, свако појављивање променљиве x_3 заменимо кореном $\sqrt[3]{x+1}$ и свако појављивање променљиве x_4 заменимо кореном $\sqrt[6]{x+1}$.

Тада је $R(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}^{\,3} - \sqrt[6]{x+1}^{\,7}}$

Тако знамо да је интеграл $\displaystyle\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}^{\,3} - \sqrt[6]{x+1}^{\,7}}\,dx$

облика $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где

је $k=3$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=6$, $a=1$, $b=1$, $c=0$, $d=1$

па је један од начина решавања увођење

смене $\sqrt[6]{x+1} = t$