ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Деф. Функција $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(0 \le i \le n)$, $x \in \mathbb{R}$, представља реалан полином n-тог степена.

Подсетимо се на нека важна својства полинома са којима сте се сретали у средњој школи:

- Полином $Q(x)$ је дељив са $x-a$ акко је $Q(a) = 0$
- Сваки полином степена $n \ge 1$ има тачно n нула (реалних или комплексних, рачунајући вишеструкост). Тако произвољан полином n-тог степена $Q(x)$ можемо записати као:

$$Q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = c_n (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_m)^{k_m}$$

где је $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

У том случају кажемо да је a_1 нула реда k_1, a_2 нула реда k_2, итд.

Пример. $P(x) = (x-1)(x+2)^3 \cdot x^2 \cdot (x^2+1)$ има нуле: $x_1 = 1$ једнострука нула или нула првог реда, $x_2 = 0$ двострука нула, $x_3 = -2$ трострука нула и на крају x^2+1 у скупу $\mathbb{R}$ нема нула, али ако посматрамо и комплексне нуле, онда има и нуле $x_4 = i$ и $x_5 = -i$. Овде би било: $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = k_5 = 1$ и $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 8$, што је степен полинома $P(x)$.

- Сваки полином непарног степена има бар једну реалну нулу.
- Ако је полином $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ са реалним коефицијентима, тј. ако $a_i \in \mathbb{R}$ $(0 \le i \le n)$ и ако је комплексан број $z = \alpha + i\beta$ нула полинома $Q(x)$, онда је и $\bar{z} = \alpha - i\beta$ такође нула полинома $Q(x)$.

Дакле, у том случају полином Q је дељив са

$$(x-z)\cdot(x-\bar{z}) = x^2 - (z+\bar{z})\cdot x + z_1 z_2 = x^2 - 2\alpha \cdot x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$$

Означимо $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$. Тада је $p^2 - 4q < 0$.

записати у облику

$$(*) \quad Q(x) = a_n \cdot (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdots (x-a_p)^{k_p} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \cdots (x^2+b_lx+c_l)^{l_l}$$

где је $n = \underbrace{\deg(Q)}_{\text{степен полинома } Q} = k_1+k_2+\dots+k_p+2\cdot(l_1+l_2+\dots+l_l)$ и

важи $b_j^2 - 4c_j < 0, \quad 1 \le j \le l$.

Деф: Количник два полинома је рационална функција:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

Уколико је $m < n$ онда је $R(x)$ права рационална ф-ја, у супротном је неправа рационална функција и важи да сваку неправу рац. ф-ју можемо представити у облику:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \overset{\text{за } m \ge n}{=\!=\!=} P_{m-n}(x) + \frac{P_k(x)}{P_n(x)} \qquad (m \ge n > k)$$

Деф Простом или елементарном рационалном функцијом називамо функције облика:

1) $\dfrac{A}{x-a}$ 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ 4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$

где $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ и $k \ge 2$ и $b^2 - 4c < 0$.

Следећу теорему наводимо без доказа

T_1 о разлагању рационалне функције (погледати горе на папиру)

Нека је $P(x)$ полином степена мањег од n, а $Q(x)$ облика $(*)$.

Тада се $R(x) = P(x)/Q(x)$ може написати у облику:

$$(**) \quad R(x) = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots +$$

$$+ \frac{A_{p1}}{x-a_p} + \frac{A_{p2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}} + \dots$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l} + \dots + \frac{B_{ll_l}x + C_{ll_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{l_l}}$$

(3) Коефицијенте A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} добијамо методом неодређених коеф. коју ћемо објаснити на следећим примерима:

ПР. 1) $\dfrac{5x+1}{x^2+x-2}$

1. корак: Факторишемо x^2+x-2. Овде је за почетак док се не увежбате корисно израчунати дискриминанту $D=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=9$ и кад је $D\geq 0$ значи да полином другог степена има реалне нуле, па је овде $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

подсећање $ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Дакле $\dfrac{5x+1}{x^2+x-2} = \dfrac{5x+1}{(x+2)(x-1)} \overset{T_1}{=} \dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1} \Big/ \cdot(x+2)(x-1)$

Да бисмо даље одредили A и B помножимо претходну једнакост са $(x+2)(x-1)$. Добијамо

$$5x+1 = A\cdot(x-1)+B\cdot(x+2) = Ax-A+Bx+2B =$$
$$= (A+B)\cdot x + 2B-A$$

Сада A и B добијамо као решења одговарајућег система једначина до кога долазимо изједначавањем одговарајућих коеф. – уз x: са леве стране је 5, са десне $A+B$. Дакле

$$\left.\begin{array}{l} 5 = A+B \\ \text{– слоб. коеф:} \\ 1 = 2B-A \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B=2 \\ A=3 \end{array}$$

, па на крају добијамо

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-1}$$

О интеграцији ћемо нешто касније

ПР 2) $\dfrac{-2x^2+x-2}{x^3-x^2} = \dfrac{-2x^2+x-2}{x^2(x-1)} \overset{T_1}{=} \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}$

Немојте да вас збуни x^2 !!! Он има двоструку реалну нулу

4

$$\frac{-2x^2+x-2}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad / \cdot x^2 \cdot (x-1)$$

$$-2x^2+x-2 = Ax\cdot(x-1) + B\cdot(x-1) + C\cdot x^2 = (A+C)x^2 + (B-A)x - B$$

x^2: $-2 = A+C$ $\quad C=-3$

x: $1 = B-A \Rightarrow A=1$

слоб. : $-2 = -B$ $\quad B=2$

$$\frac{-2x^2+x-2}{x^3-x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x-1}$$

пр3) $$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\underbrace{(x^2+1)^2}} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \quad / \cdot (x-2)(x^2+1)^2$$

нема реалне нуле, зато му у бројиоцу следује $Bx+C$...

Добија се : $A=1$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-3$, $E=-4$. Проверите!

Интеграција простих елементарних рационалних ф-ја

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$ (коме је лакше преко смене, може увести $t=ax+b$ ...)

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} \overset{n\neq 1}{=\!=} \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot(ax+b)^{1-n} + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{Mx+N}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = \frac{x-\alpha}{\beta} \\ dt = \frac{1}{\beta}\cdot dx \end{bmatrix} =$$

$x = t\cdot\beta + \alpha$

$$= \frac{1}{\beta}\cdot\int \frac{M\cdot t\cdot\beta + M\alpha + N}{t^2+1}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot dx = \frac{1}{\beta}\int\left(\frac{M\alpha+N}{t^2+1} + M\cdot\beta\cdot\frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdot(M\alpha+N)\cdot \text{arctg}\, t + M\cdot\int\frac{d(t^2+1)\cdot\frac{1}{2}}{t^2+1} =$$

$$= \frac{M\alpha+N}{\beta}\,\text{arctg}\, t + \frac{M}{2}\cdot\ln(t^2+1) + C =$$

$$= \frac{M\alpha+N}{\beta}\cdot\text{arctg}\,\frac{x-\alpha}{\beta} + \frac{M}{2}\cdot\ln\left(\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right) + C$$

5 НАПОМЕНА: Претходни резултат никако не треба учити напамет, већ само као технику коју примењујемо у сличним задацима

ЗАДАЦИ: 1) $\int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx = \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Решите систем изједначавањем коефицијената и добићете $A=-2$, $B=\frac{3}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, па је:

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \ln \frac{\sqrt{|(x-1)^3(x+1)|}}{x^2} + C$$

2) $\int \frac{x^4}{x^3+1}\,dx$

$\frac{x^4}{x^3+1}$ није права рационална ф-ја, јер је $4 = \deg(x^4) > 3 = \deg(x^3+1)$

па најпре морамо поделити полиноме. Добијамо:

$$x^4 : x^3+1 = x$$
$$\frac{-(x^4+x)}{-x}$$

па је $\frac{x^4}{x^3+1} = x - \frac{x}{x^3+1}$

$$\int \frac{x^4}{x^3+1}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^3+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - I$$

$$I = \int \frac{x}{x^3+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{нема реалне нуле}}}\,dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \right) dx$$

Решавањем система добија се $A = -\frac{1}{3}$, $B = C = -\frac{1}{3}$

(ко има проблема са израчунавањем ових коеф., нека се јави мејлом)

Scanned with CamScanner

6) $$I=\int \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\,dx+\int \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}\,dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+I_1$$

$$I_1=\int \frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{\underbrace{x^2-x+1}}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x+1}{x^2-x+1}\,dx$$

најпре у бројиоцу правимо извод имениоца

$$(x^2-x+1)'=2x-1$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{2x+2}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{6}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{\underbrace{x^2-x+1}_{t}}\,dx+\frac{3}{6}\int \frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}\ln|t|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\underbrace{|x^2-x+1|}+\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

и не мора $|\dots|$ јер је $x^2-x+1>0$

3) $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

Добија се: $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-1$, $E=0$, $F=-1$. Проверите!

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}\,x-I_2$$

$$I_2=\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$ — важан интеграл који нисмо стигли да прођемо код парцијалне интеграције. Обратите пажњу на следећа два начина на која можемо решити интеграле тог, и нешто општијег облика.

7 (*) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Изразити I_n преко I_{n-1}. Затим израчунати I_2. За домаћи I_3 и $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}}{(x^2+a^2)^n}\, dx$$

(прво направимо a^2, па онда a^2+x^2 ...)

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^n}\, dx - \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\, dx}_{J}$$

$$J = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \int x \cdot \frac{x\, dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ v = \int \frac{x\, dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} \\ t = x^2+a^2 \\ v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array} \right]$$

$$= \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-n)} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot I_{n-1}$$, па се вратимо на I_n:

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right)$$

Израчунајмо сад I_2 на исти начин:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \left(\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \underbrace{\int x \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\, dx}_{u = x \quad v = \int \frac{x}{(x^2+a^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+a^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \left(\frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+a^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)$$

(8) II начин да израчунамо I_2 (исто и за I_n)

смена $x = a\,tg\,t$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \begin{bmatrix} x = a\,tg\,t, & t = arctg\,\frac{x}{a} \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}\cdot dt, & \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{\left(a^2 \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + a^2\right)^2} = \frac{a}{a^4}\int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{a^3}\int \frac{dt}{\frac{1}{\cos^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{a^3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(arctg\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sin\left(arctg\,\frac{x}{a}\right)\right) + C \qquad (✿✿)$$

Домаћи: Показати да су (✿) и (✿✿) исти изрази (треба знати мало тригонометрије ...)

Задаци за вежбу:

1. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$, $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx$, $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$, $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

2. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$, $\int \frac{3x-5}{x^2+x+1}\,dx$

3. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \dots = x + \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{-\frac{9}{2}}{x-2} + \frac{\frac{17}{3}}{x-3}\right)dx$

4. $\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$ $\left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{16}{3}\ln|x-2| + C\right)$

5. $\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)x^2(x^2+1)}\,dx$ $\left(-\ln|x-1| + 3\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln(x^2+1) + C\right)$