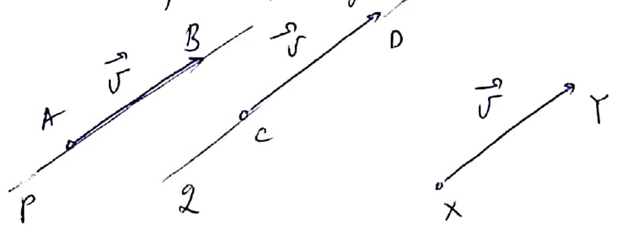
ВЕКТОРИ

Величине као што су дужина, површина, температура ... изражавају се бројем, док је за описивање неких других величина као што су на пример брзина, убрзање, ... потребно знати и правац и смер. Као што вам је познато, прву групу величина називамо скаларним, а другу векторским величинама.

Вектори су важан појам у елементарној геометрији и физици. Везани су за правац, смер и интензитет па их интуитивно поистовећујемо са „усмереним дужима".

Деф: Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер и интензитет.



$|\overrightarrow{AB}|$ – растојање између тачака A и B је дужина или интензитет.
Права p одређена тачкама A и B и све њој паралелне праве – правац $\overrightarrow{AB}$.

У том смислу кажемо да су $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ еквивалентни ако:

1. $|AB| = |CD|$ (дужи AB и CD су једнаке дужине)
2. $p \parallel q$ (имају исти правац)
3. имају исти смер

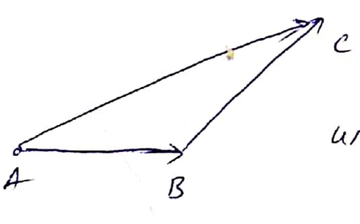
Основни појмови:

- Нула вектор $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, $|\vec{0}| = 0$
- Јединични вектор за вектор $\vec{v}$ је $\vec{v}_0 = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
- Колинеарни вектори су вектори који имају паралелне праве
- Копланарни (или компланарни) вектори су вектори који припадају једној равни

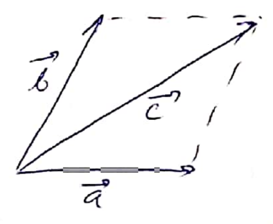
Операције са векторима

1. Сабирање вектора

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$



или



— $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

— $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ —

МНОЖЕЊЕ ВЕКТОРА СКАЛАРОМ $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\alpha\cdot\vec{a}=\vec{b}$ где је $\vec{b}$ вектор који има:

- правац исти као вектор $\vec{a}$
- интензитет $|\vec{b}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$
- смер исти као $\vec{a}$ за $\alpha>0$, односно супротан од $\vec{a}$ за $\alpha<0$

Сада можемо дефинисати разлику вектора као $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$

Особине:

- $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ $\quad\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}+\alpha\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ $\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})=\beta\cdot(\alpha\vec{a})=(\alpha\beta)\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Деф: Ако су $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ вектори и $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ скалари онда $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_k\vec{v}_k$ представља линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$.

Деф: Кажемо да су вектори $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ линеарно независни ако релација $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ важи само за $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$. У супротном, ако постоји n-торка $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ у којој је бар један од фактора $\alpha_i\neq 0$, вектори $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ се називају линеарно зависним.

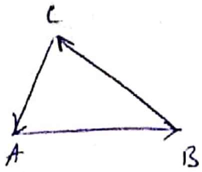
Т: а) Нека вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако су колинеарни.

б) У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора у равни су линеарно зависна.

в) У простору постоје три линеарно независна вектора, а свака четири вектора су линеарно зависна.

Ако скуп свих вектора означимо са V онда V са операцијама сабирања вектора и множења скаларом представља векторски простор.

ПР1. Вектори одређени страницама троугла су лин. зависни. 145



$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

Деф: База векторског простора је максималан скуп линеарно независних вектора.

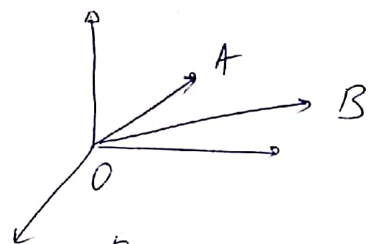
Ми ћемо се у оквиру овог курса углавном бавити векторима у простору V^3. Базу простора V^3 представљају три линеарно независна вектора, рецимо $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$.

Координате вектора $\vec{v}$ у бази $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ су (v_1, v_2, v_3) ако је:

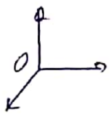
$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e_1} + v_2 \cdot \vec{e_2} + v_3 \vec{e_3}, \quad v_i \in \mathbb{R}.$$

Ако бази $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ придружимо фиксирану тачку O коју називамо координатни почетак, онда $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ чине координатни систем Oe.

Деф: Координате тачке A у коорд. систему Oe дефинишемо као координате вектора $\vec{OA}$ у бази $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.



Специјална база са којом смо се сретали у досадашњем школовању је сте



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – јединични вектори, међусобно ортогонални

O – координатни почетак

$$\vec{a} = \vec{OA} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \qquad \vec{b} = \vec{OB} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

(a_1, a_2, a_3) су и координате тачке A

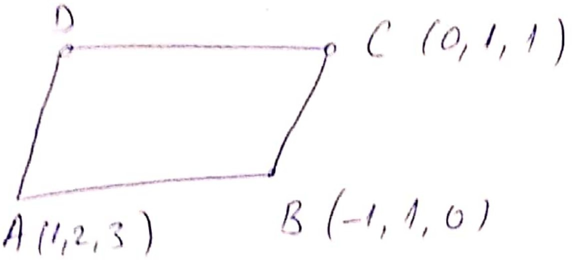
$$\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON} = \vec{ON} - \vec{OM} = (n_1 - m_1, n_2 - m_2, n_3 - m_3)$$

$N(n_1, n_2, n_3)$ и $M(m_1, m_2, m_3)$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ – сабирање вектора у коорд.

$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$ – множење скалара у координатама

ПР2. Тачке $A(1,2,3)$, $B(-1,1,0)$ и $C(0,1,1)$ су три темена паралелограма $ABCD$. Нађи координате темена D.



$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0) - (1,2,3) = (-2,-1,-3)$$
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (-2,-1,-3)$$
$$D = (-2,-1,-3) + (0,1,1) = (-2,0,-2)$$

ПР3. Испитати линеарну зависност вектора:

а) $\vec{a} = (1,2,0)$ $\quad \vec{b} = (0,1,-1)$ $\quad \vec{c} = (2,0,1)$

б) $\vec{a} = (1,2,3)$ $\quad \vec{b} = (1,0,-1)$ $\quad \vec{c} = (0,2,4)$

а) $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b} + \alpha_3 \cdot \vec{c} = \vec{0}$

$\alpha_1 \cdot (1,2,0) + \alpha_2 \cdot (0,1,-1) + \alpha_3 \cdot (2,0,1) = (0,0,0)$

$\alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 = 0$

$2\alpha_1 + \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0$ $\quad$ има решење $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

$0 \cdot \alpha_1 - 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$ $\quad$ па су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно независни

б) Како је $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, то важи $-1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$

па су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно зависни.

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД ДВА ВЕКТОРА

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{a}, \vec{b})$$

Одавде добијамо да је $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$

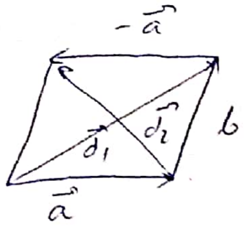
Као и формулу за угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (односно између правца вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$) под условом да су $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$$\cos \measuredangle (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

особине скаларног производа

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \cdot \vec{b})$ $\quad \alpha \in R$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$
5. За $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ − услов ортогоналности два вектора

ЗАД 1. Доказати да су дијагонале ромба нормалне.



$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} \qquad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$
$$\vec{d_2} = \vec{b} - \vec{a}$$
$$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} =$$
$$= |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$$

Из услова ортогоналности закључујемо да је $\vec{d_1} \perp \vec{d_2}$.

ЗАД 2. Ако је $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ и $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$ и ако је $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, одредити $|\vec{a}|$.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{q}) = \vec{p} \cdot \vec{p} - 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 4\vec{q} \cdot \vec{q} =$$
$$= |\vec{p}|^2 - 4|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) + 4|\vec{q}|^2 =$$
$$= 4 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot 3 = 16 - 6 = 10$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{10}$$

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД У ОРТОНОРМИРАНОЈ БАЗИ

Свака база $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ за коју је $|\vec{e_i}| = 1$, $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ зове се ортонормирана база. Специјално таква је и нама позната $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ база у $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{– проверити за вежбу}$$

Даље је $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

ЗАД 3. За дате векторе $\vec{a} = (1, -2, 2)$ и $\vec{b} = (-3, 0, 4)$ у ортонормираној бази одредити:

а) $|\vec{a}|$ $\qquad$ б) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

а) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

б) $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{(1,-2,2)\cdot(-3,0,4)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}} =$

$= \dfrac{-3+0+8}{3\cdot 5} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\dfrac{1}{3}$

Зад 4. Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(0,2,0)$, $\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$. Одредити вредност параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ тако да

а) $\vec{p}\perp\vec{q}$ б) $\vec{p}\parallel\vec{q}$

а) $\vec{p}\perp\vec{q} \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{q}=0$

$\vec{p}\cdot\vec{q} = (\alpha\vec{a}+5\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b}) = 3\alpha\vec{a}\cdot\vec{a} + (15-\alpha)\vec{a}\cdot\vec{b} - 5\vec{b}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = (1,1,1)\cdot(1,1,1) = 1+1+1 = 3$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1,1,1)\cdot(0,2,0) = 0+2+0 = 2$

$\vec{b}\cdot\vec{b} = (0,2,0)\cdot(0,2,0) = 0+4+0 = 4$, па је

$\vec{p}\cdot\vec{q} = 3\alpha\cdot 3 + (15-\alpha)\cdot 2 - 5\cdot 4 = 7\alpha + 10$

$7\alpha+10 = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{10}{7}$

б) $\vec{p}\parallel\vec{q} \Leftrightarrow \vec{p} = k\cdot\vec{q}$ за неко $k\in\mathbb{R}$

$\alpha\vec{a}+5\vec{b} = k\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$

$(\alpha, 10+\alpha, \alpha) = (3k, k, 3k)$

$\begin{aligned} \alpha &= 3k \\ 10+\alpha &= k \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} k &= -5 \\ \alpha &= -15 \end{aligned}$

Зад 5. Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(2,2,1)$ и $\vec{c}=(1,3,-6)$. Одредити вектор $\vec{d}$ који је ортогоналан на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такав да је $\vec{c}\cdot\vec{d}=16$.

$\vec{a}\cdot\vec{d}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{d}=0$, $\vec{c}\cdot\vec{d}=16$ $\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (1,1,1)\cdot(d_1,d_2,d_3) = d_1+d_2+d_3 \\ 0 &= (2,2,1)\cdot(d_1,d_2,d_3) = 2d_1+2d_2+d_3 \\ 16 &= (1,3,-6)\cdot(d_1,d_2,d_3) = d_1+3d_2-6d_3 \end{aligned}\right\} (*)$$

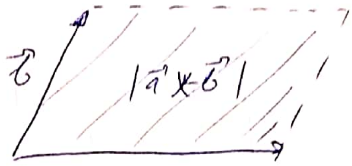
Решавањем система (*) добијамо $\vec{d} = (-8,8,0)$.

ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

Најпре се подсетимо да је база $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ позитивне оријентације ако важи „правило десне руке" – ако испружени кажипрст десне руке представља вектор $\vec{e_1}$, средњи прст вектор $\vec{e_2}$ а палац вектор $\vec{e_3}$ онда је база $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ позитивне оријентације.

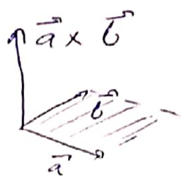
Ако су даље дати вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{a}\times\vec{b}$:

1) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$



геометријски: интензитет векторског производа једнак је површини паралелограма одређеног $\vec{a}$ са $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ је ортогоналан и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$



3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$ је позитивне оријентације

ОСОБИНЕ ВЕКТОРСКОГ ПРОИЗВОДА

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, $\lambda\in R$
4) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

За ортонормирану базу $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ важи

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

ПР. Ако су $\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ и
$\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, тада је

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-b_3a_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

150

$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$

$= a_1 b_1\, \vec{i}\times\vec{i} + a_1 b_2\, \vec{i}\times\vec{j} + a_1 b_3\, \vec{i}\times\vec{k} + a_2 b_1\, \vec{j}\times\vec{i} + a_2 b_2\, \vec{j}\times\vec{j}$

$+ b_3 a_2\, \vec{j}\times\vec{k} + a_3 b_1\, \vec{k}\times\vec{i} + a_3 b_2\, \vec{k}\times\vec{j} + a_3 b_3\, \vec{k}\times\vec{k}$

Користећи табелу са претходне стране после сређивања добија се тражена формула, која се лакше памти у облику:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(ПАЖЊА: НЕ ЗАБОРАВИТЕ НА ЗНАК уз $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ КАДА РАЗВИЈАТЕ ДЕТЕРМИНАНТУ ПО ПРВОЈ ВРСТИ)

Зад 6. Дати су вектори $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-2, -1, 2)$ и $\vec{c} = (1, -1, 2)$

а) Разложити вектор $\vec{c}$ по векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

б) Одредити површину паралелограма које одређују вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

а) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \vec{i}\cdot 1 - \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot 1 = (1, 0, 1)$

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ – треба одредити α, β и γ

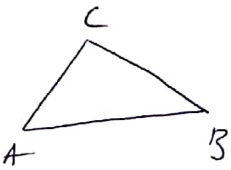
$(1, -1, 2) = (\alpha - 2\beta + \gamma,\ \alpha - \beta,\ -\alpha + 2\beta + \gamma)$

Решавањем система добијамо $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$

б) $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0, 6, 3)$

$P_{\square} = |\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Зад 7. Израчунати површину троугла ABC ако је $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$ и $C = (3, 3, 0)$.



$\vec{AB} = (-1, -3, -1)$, $\vec{AC} = (2, 1, -3)$

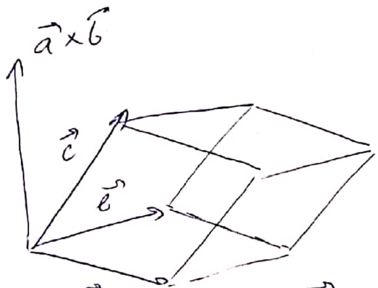
$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (10, -5, 5)$

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + (-5)^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{150}$

МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

Мешовит производ три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ означавамо са $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ и дефинишемо га са

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$



Геометријски $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ представља запремину паралелопипеда одређеног векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Последица $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ су компланарни вектори (припадају једној равни)

Особине мешовитог производа

1) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$

2) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

3) $[\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = \alpha [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + \beta [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$

У ортонормираној бази $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Зад 8. Одредити запремину тетраедра чија су темена:

$A(1,0,0)$, $B(3,4,6)$, $C(0,1,0)$ и $D(1,1,3)$.

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6} V_{парал.} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right|$$

$\vec{AB} = (2, 4, 6)$ $\quad \vec{AC} = (-1, 1, 0)$ $\quad \vec{AD} = (0, 1, 3)$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$V_{тетр} = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

ЗАД 9 Да ли су вектори $\vec{a}=(1,-4,5)$, $\vec{b}=(2,6,-8)$ и $\vec{c}=(-4,2,4)$ компланарни

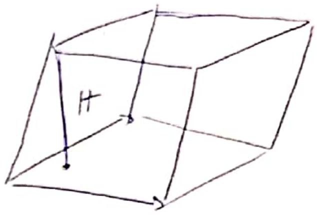
Потребно је да израчунамо $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ и упоредимо га са нулом, ако је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ вектори су компланарни, ако је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\neq 0$ нису компланарни.

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}1 & -4 & 5\\ 2 & 6 & -8\\ -4 & 2 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2) & \cdot 4\end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & -4 & 5\\ 0 & 14 & -18\\ 0 & -14 & 24\end{vmatrix}\neq 0$$

, дакле нису компланарни

ЗАД 10. Одредити запремину и висину паралелопипеда одређеног векторима $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(-2,-2,1)$ и $\vec{c}=(0,4,1)$.

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=-2 \Rightarrow V=|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|=|-2|=2$$



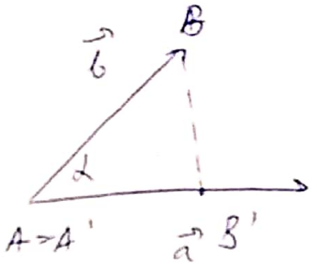
$$V=B\cdot H$$

$$B=|\vec{a}\times\vec{b}|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{matrix}\right\|=|(2,-1,2)|$$

$$B=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$$

$$H=\frac{V}{B}=\frac{2}{3}$$

За крај поменимо појам нормалне пројекције вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$



$pr_{\vec{a}}\vec{b}$ је $|\overrightarrow{A'B'}|$ ако су $\vec{a}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ истог смера, односно $-|\overrightarrow{A'B'}|$ ако су $\vec{a}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ супротног смера

$$pr_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=|\vec{b}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

ВЕКТОРИ – ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

1Г3

1. Одредити јединични вектор $\vec{c}$ који је компланаран са векторима $\vec{a}=(1,-2,2)$ и $\vec{b}=(3,2,6)$ и полови угао између њих.

$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ (пошто су компланарни) $\Rightarrow \vec{c}=(\alpha+3\beta,\ -2\alpha+2\beta,\ 2\alpha+6\beta)$

$|\vec{c}|=1$ (јединични)

$\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\measuredangle(\vec{c},\vec{b}) \Rightarrow \cos\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\cos\measuredangle(\vec{c},\vec{b})$

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} \Rightarrow \frac{\alpha+3\beta+4\alpha-4\beta+4\alpha+12\beta}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{3\alpha+9\beta-4\alpha+4\beta+12\alpha+36\beta}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}$$

$$\frac{9\alpha+11\beta}{3}=\frac{11\alpha+49\beta}{7}$$

$$63\alpha+77\beta=33\alpha+147\beta$$

$$30\alpha=70\beta \Rightarrow \alpha=\frac{7}{3}\beta$$

$$1=|\vec{c}|=\sqrt{(\alpha+3\beta)^2+(-2\alpha+2\beta)^2+(2\alpha+\beta\cdot 6)^2}$$

$$1=\left[\left(\frac{7}{3}+3\right)^2+\left(-\frac{14}{3}+2\right)^2+\left(\frac{14}{3}+6\right)^2\right]\cdot\beta^2$$

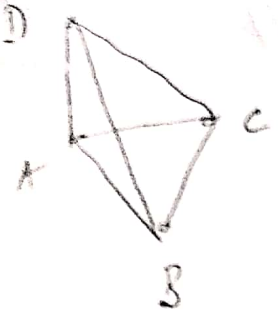
$$1=\left(\frac{256}{9}+\frac{64}{9}+\frac{1024}{9}\right)\beta^2=\frac{1344}{9}\beta^2 \Rightarrow \beta=\frac{\pm 3}{8\sqrt{21}}$$

2. Дате су тачке $A(3,0,6)$, $B(0,3,0)$, $C(1,5,0)$ и $D(1,1,a)$, $a>0$.

а) Одредити a тако да $\overrightarrow{AD}$ буде ортогонално на раван одређену тачкама B, C и D

б) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

а)



$$\left.\begin{array}{l}\vec{AD} \perp \vec{AB} \\ \vec{AD} \perp \vec{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AD} = k \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})$$

154

$\vec{AD} = (-2, 1, a-6)$ $\quad \vec{AB} = (-3, 3, -6)$ $\quad \vec{AC} = (-2, 5, -6)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = (12, -6, -9) = 3 \cdot (4, -2, -3)$$

$$(-2, 1, a-6) = k \cdot (4, -2, -3) = (4k, -2k, -3k)$$

$\Rightarrow k = -\frac{1}{2}$ па је $a - 6 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{15}{2}$

б) $V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right|$ или пошто је $\vec{AD}$ у ствари висина

$V = \frac{1}{3} B \cdot |\vec{AD}|$, $B = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$