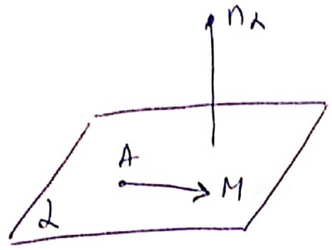
АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У ПРОСТОРУ

ИМПЛИЦИТНА ЈЕДНАЧИНА РАВНИ



Раван α одређена је тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и вектором нормале $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$.

Нека је $M(x,y,z)$ произвољна тачка равни α. Тада

$M(x,y,z) \in \alpha \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{n}_\alpha$, па је из услова ортогоналности

$\vec{AM} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ тј. $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(A,B,C) = 0$

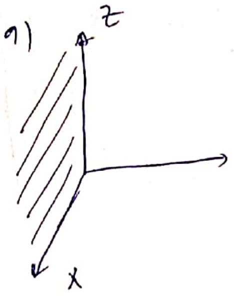
$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz \underbrace{- Ax_0 - By - Cz_0}_{-D} = 0$$

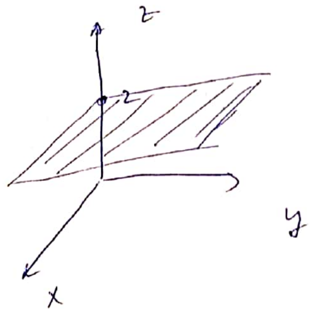
$Ax + By + Cz + D = 0$ – имплицитна једначина равни α

Пр1. Скицирати раван: а) $y=0$ б) $z=2$ в) $x+2y+3z-6=0$

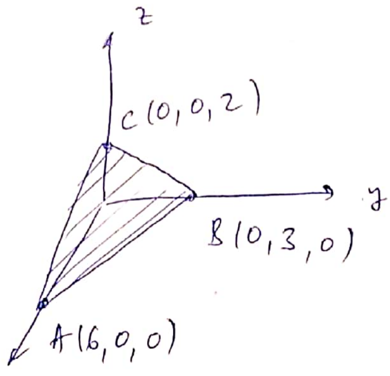
а)



б)

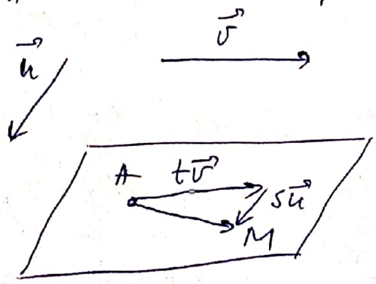


в)



ПАРАМЕТАРСКА ЈЕДНАЧИНА РАВНИ

Раван α одређена је тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и са два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ којима је паралелна.



Произвољну тачку равни $M(x,y,z)$ у овом случају можемо изразити као

$$M = M(t,s) = A + t\vec{v} + s\vec{u}$$

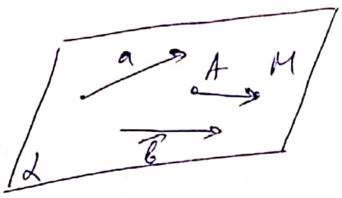
У том случају, изједначавајући одговарајуће координате, добијамо:

$$x = x_0 + t\cdot v_x + s\cdot u_x$$
$$y = y_0 + t\cdot v_y + s\cdot u_y \qquad t, s \in \mathbb{R}$$
$$z = z_0 + t\cdot v_z + s\cdot u_z$$

Из параметарског у имплицитни прелазимо тако што је

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v} \times \vec{u} = (A, B, C)$$
$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -\vec{n}_\alpha \cdot \vec{OA}$$

ПР2. Ако раван α садржи тачку $A(1,0,1)$ и паралелна је векторима $\vec{a} = (1,2,3)$ и $\vec{b} = (-1,1,2)$ написати једначину равни α.



Ако је $M(x,y,z)$ произвољна тачка равни α, приметимо да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{AM}$ компланарни и сетимо се услова компланарности преко мешовитог производа:

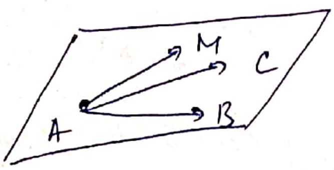
$$0 = [\vec{AM}, \vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(x-1)\cdot 1 - y\cdot 5 + (z-1)\cdot 3 = 0$$

$$\alpha: \ x - 5y + 3z - 4 = 0$$

ЈЕДНАЧИНА РАВНИ ОДРЕЂЕНЕ СА ТРИ НЕКОЛИНЕАРНЕ ТАЧКЕ

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2) \quad C(x_3, y_3, z_3)$$



$$0 = [\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

Зад 1. Написати једначину равни која:

а) садржи тачку $T(-2,7,3)$ и паралелна је равни $\alpha: x-4y+5z-1=0$

б) пролази кроз координатни почетак и нормална је на равнима $\beta: 2x-y+5z+3=0$ и $\gamma: x+3y-z-7=0$

а) $\alpha \parallel \beta$ па можемо изабрати $\vec{n_\beta} = \vec{n_\alpha} = (1,-4,5)$

Дакле, знамо да $T \in \beta$ и знамо $\vec{n_\beta}$, па је

$$\beta: 1\cdot(x-(-2)) - 4\cdot(y-7) + 5\cdot(z-3) = 0$$

$$x - 4y + 5z + 15 = 0$$

б) $\alpha \perp \beta \Rightarrow \vec{n_\alpha} \perp \vec{n_\beta}$ Како је $\vec{n_\alpha}$ ортогонална на два
$\alpha \perp \gamma \Rightarrow \vec{n_\alpha} \perp \vec{n_\gamma}$ дата вектора, то можемо узети

да је $\vec{n_\alpha} = \vec{n_\beta} \times \vec{n_\gamma}$, па је

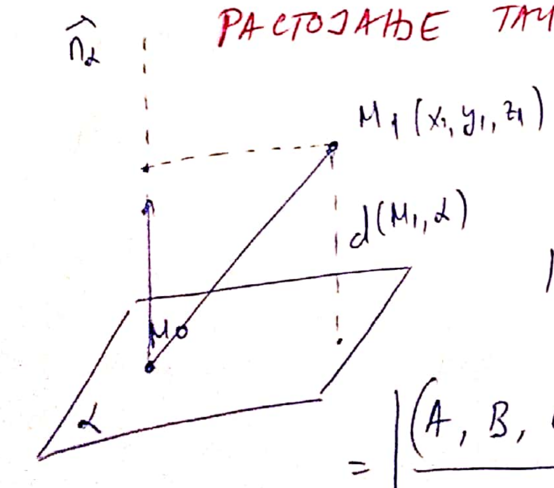
$$\vec{n_\alpha} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-14, -(-7), 7) = 7\cdot(-2,1,1)$$

Како нам интензитет $\vec{n_\alpha}$ није важан за одређивање једначине равни, изабраћемо $\vec{n_\alpha} = (-2,1,1)$. Такође знамо да α пролази кроз координатни почетак, тј. садржи $O(0,0,0)$, па је:

$$\alpha: -2\cdot(x-0) + 1\cdot(y-0) + 1\cdot(z-0) = 0$$

$$-2x + y + z = 0$$

РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД РАВНИ



$M_0 \in \alpha: Ax+By+Cz+D=0$

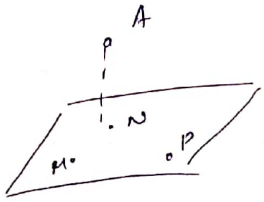
$\Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$$|pr_{\vec{n_\alpha}} \overrightarrow{M_0M_1}| = \left| \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}}{|\vec{n_\alpha}|} \right| = \left| \frac{(A,B,C)\cdot(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)}{|\vec{n_\alpha}|} \right|$$

$$d(M_1,\alpha)=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1\overbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}^{-D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ЗАД 2. Одредити растојање тачке $A(1,8,3)$ од равни одређене тачкама $M(1,2,3)$, $N(2,3,0)$ и $P(-1,0,2)$



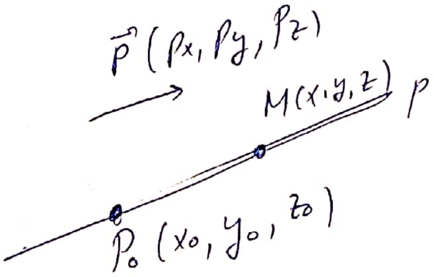
$$\alpha:\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 3-2 & 0-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\alpha:\ -7x+7y-7=0\ /:7 \qquad \vec{n}_\alpha=(-1,1,0)$$

$$-x+y-1=0$$

$$d(A,\alpha)=\frac{|-1+8-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

ПРАВА У ПРОСТОРУ



Права се у простору задаје тачком $P_0(x_0,y_0,z_0)$ која јој припада и вектором правца $\vec{p}(p_x,p_y,p_z)$

Ако је $M(x,y,z)$ произвољна тачка праве и $t\in\mathbb{R}$:

$$M(t)=P+t\cdot\vec{p}$$

Параметарска једначина праве

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+t\cdot p_x \\ y&=y_0+t\cdot p_y \\ z&=z_0+t\cdot p_z \end{aligned}\right\}\ p,\quad t\in\mathbb{R}$$

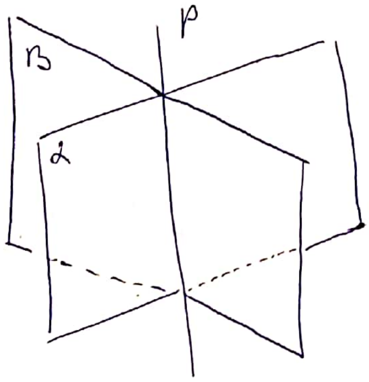
Ако из претходне једначине изразимо t, добијамо

КАНОНСКУ ЈЕДНАЧИНУ ПРАВЕ:

$$\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z} \quad (=t)$$

НАПОМЕНА: У претходном облику једначине праве дозвољавамо запис $\frac{x-x_0}{0} = \ldots$ уколико је $\vec{p} = (0, p_y, p_z)$

ПРАВА КАО ПРЕСЕК ДВЕ РАВНИ



$$\left.\begin{aligned} \alpha &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \beta &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

$\vec{n}_\alpha = (A_1, B_1, C_1)$ $\quad \vec{n}_\beta = (A_2, B_2, C_2)$

$p = \alpha \cap \beta$

$$\begin{aligned} \vec{p} &\perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{p} &\perp \vec{n}_\beta \end{aligned} \Rightarrow \vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$

Тачку P_0 која припада правој p добијамо као било које решење система једначина $(*)$. Приметимо да систем има 3 непознате x, y и z а 2 једначине, према томе можемо произвољно одабрати вредност једне од непознатих.

ПР3. а) Права p је пресек равни $\alpha: x - y - 1 = 0$ и $\beta: z - 2x = 0$. Записати је у каноничком и параметарском облику.

$$\vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2) = -(1, 1, 2)$$

P_0 добијамо као произвољно решење система:

$$\begin{aligned} x - y - 1 &= 0 \\ z - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Ако рецимо изаберемо $z = 0$, из друге једначине одмах добијамо $x = 0$, па је $y = -1$ и $P_0(0, -1, 0)$

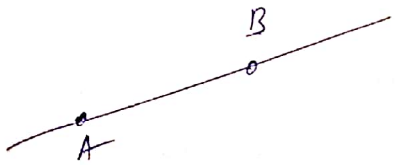
$$p: \frac{x-0}{1} = \frac{y-(-1)}{1} = \frac{z-0}{2} = t$$ – канонска једн. праве

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 0 + t \\ y &= -1 + t \\ z &= 0 + 2t \end{aligned}\right\}$$ параметарска једн. праве

Приметимо да избор тачке P_0 није једнозначан. Могли смо и на пример изабрати $z = 1$, у том сл. добили бисмо $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, дакле $P_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Тада би једн. праве изгледала

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{z-1}{2} = t_1 \ \ldots$$

б) Одредити једначину праве q која садржи тачке $A(1,0,1)$ и $B(1,2,3)$.



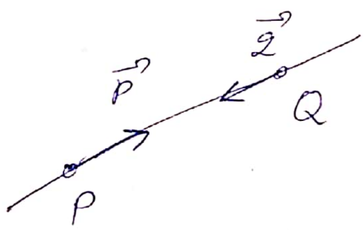
Као вектор $\vec{q}$ можемо изабрати $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 2) = 2 \cdot (0, 1, 1)$$

$$q: \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{1}$$

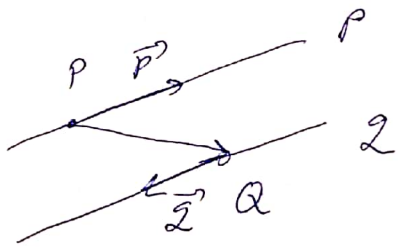
МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈ ДВЕ ПРАВЕ

1) праве се поклапају



у овом случају вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$ су колинеарни

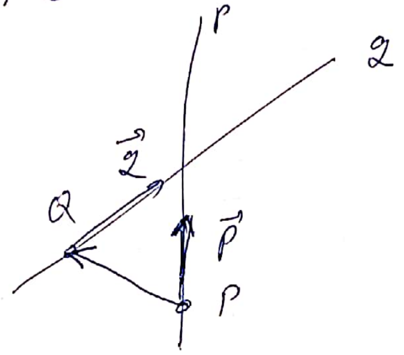
2) праве су паралелне



$\vec{p}$ и $\vec{q}$ су колинеарни,

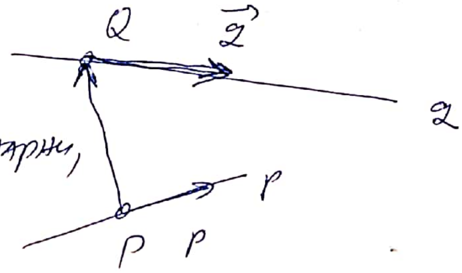
а $\overrightarrow{PQ}$ није колинеаран са њима

3) праве се секу



$\vec p$ и $\vec q$ су неколинеарни, али $\vec p, \vec q$ и $\overrightarrow{PQ}$ су компланарни, дакле $[\vec p, \vec q, \overrightarrow{PQ}] = 0$ и $\vec p \neq k\vec q$

4) праве су мимоилазне



Вектори $\vec p, \vec q$ и $\overrightarrow{PQ}$ су некомпланарни, па је $[\vec p, \vec q, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$

Пр. 4. Одредити међусобни положај правих:

а) $p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{1}$ и $q: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{4}$

$\vec p = (1,5,1)$ $P(2,1,2)$ $\vec q = (2,3,4)$ $Q(1,0,-2)$

$\vec p$ и $\vec q$ очигледно нису колинеарни па се праве p и q секу или су мимоилазне. Да бисмо испитали који је од ова положаја, потребно је израчунати $[\vec p, \vec q, \overrightarrow{PQ}]$.

$\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-4)$

$$[\vec p, \vec q, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 21 - 8 = 13 \neq 0$$

Дакле праве p и q су мимоилазне.

б) $p: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2 \\ z = 2-t \end{cases}$ $q: \begin{cases} x = \frac{s}{2} \\ y = s \\ z = \frac{3s}{2} \end{cases}$

$p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}$ $q: \dfrac{x-0}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{\frac{3}{2}}$

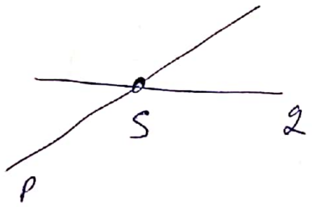
$P(2,2,2)$ $\vec p = (1,0,-1)$ $Q(0,0,0)$ $\vec q = (1,2,3)$

Како $\vec{p}$ и $\vec{q}$ нису колинеарни, израчунавамо $[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}]$

$\vec{PQ} = (-2, -2, -2)$

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} 2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Дакле, у овом случају p и q се секу. Одредимо и координате пресечне тачке S:



$$t + 2 = \frac{s}{2}$$
$$2 = s \Rightarrow t = -1$$
$$2 - t = \frac{3s}{2}$$

$S(1, 2, 3)$

в) $p: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ $\qquad q: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-3}{2}$

$\vec{p} = (1,2,1)$ $\quad P(1,-1,3)$ $\qquad \vec{q} = (2,4,2) = 2\cdot(1,2,1)$

$Q(0,0,3)$

$\vec{p}$ и $\vec{q}$ су колинеарни: $\vec{q} = 2\cdot\vec{p}$, а $\vec{PQ} = (-1, 1, 0)$ није колинеаран са њима, па су праве p и q паралелне.

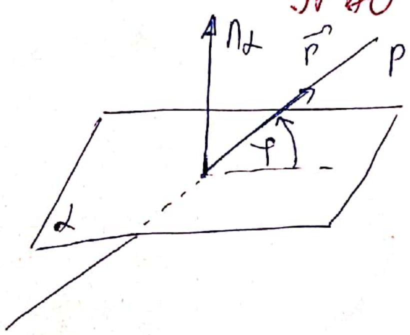
г) $p: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ $\qquad q: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{2}$

$\vec{p} = (1,2,1)$ $\quad \vec{q} = (2,4,2) = 2\cdot(1,2,1)$

$P(1,-1,3)$ $\quad Q(3,3,5)$ $\quad \vec{PQ} = (2,4,2)$

У овом случају $\vec{p}, \vec{q}$ и $\vec{PQ}$ су колинеарне, па се праве p и q поклапају.

УГАО ИЗМЕЂУ ПРАВЕ И РАВНИ

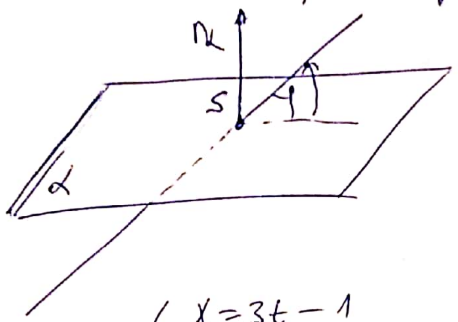


$$\sin\varphi = \cos\measuredangle(\vec{p}, \vec{n_\alpha}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{n_\alpha}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{n_\alpha}|}$$

Зад 3. Одредити тачку продора праве

$p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha: 3x+y+5z-7=0$.

Колики угао права p заклапа са равни α?



У задацима у којима тражимо тачке продора или пресека, најпогодније је посматрати параметарски облик праве.

$$p: \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t-3 \\ z = -4t+5 \end{cases}$$

$$S = p \cap \alpha : \ 3\cdot(3t-1) + 2t-3 + 5(-4t+5) - 7 = 0$$

$$9t - 3 + 2t - 3 - 20t + 25 - 7 = 0$$

$$-t + 9 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow S(3\cdot 1-1, 2\cdot 1-3, -4\cdot 1+5)$$

$$S(2, -1, 1)$$

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n_\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{n_\alpha}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{(3,1,5)\cdot(3,2,-4)}{\sqrt{9+1+25}\cdot\sqrt{9+4+16}} = \frac{9+2-20}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{29}} = \frac{-9}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{29}}$$

МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈИ ПРАВЕ И РАВНИ

Права p и раван α могу да се секу, буду паралелне и да права припада равни.

Зад 4. Одредити међусобни положај праве $p: \frac{x+4}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ и равни $\alpha: x-2y+5z-1=0$

$$\vec{n_\alpha} = (1, -2, 5)$$

$$\vec{p} = (-3, 1, 1) \qquad P(-4, 0, 1)$$

Проверимо најпре да ли $P(-4,0,1)$ припада равни α.

$$-4 - 2\cdot 0 + 5\cdot 1 - 1 = 0$$

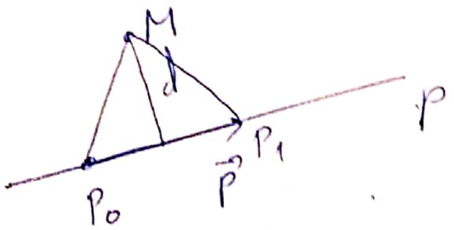
$$0 = 0 \text{ , па } P \in \alpha$$

Дакле, права p или пропада равни α или је продире баш у тачки P. Ако би права p пропадала равни α морало би бити $\vec{n_2} \cdot \vec{p} = 0$. У нашем случају је

$$\vec{n_2} \cdot \vec{p} = (1, -2, 5) \cdot (-3, 1, 1) = -3 - 2 + 5 = 0$$

Дакле права p пропада равни α.

РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД ПРАВЕ



$$P_{\Delta P_0 P_1 M} = \frac{1}{2} |\vec{p}| \cdot d$$

а са друге стране знамо да је

$$P_{\Delta P_0 P_1 M} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_0M} \times \vec{p}| \quad \text{, па је}$$

$$d(M, p) = \frac{|\overrightarrow{P_0M} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}$$

Зад 5. Одредити растојање тачке $M(1, 0, 12)$ од праве

$$p: \begin{cases} x - 1 - y = 0 \\ -2x + z = 0. \end{cases}$$

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2) = -(1, 1, 2)$$

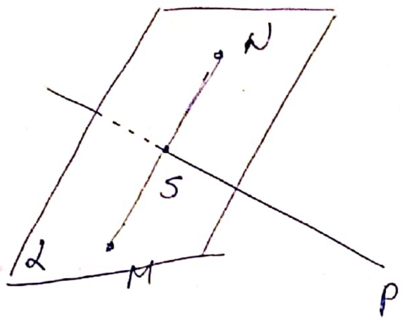
$P_0(0, -1, 0)$ (погледати коментаре у ПР.3)

$$\overrightarrow{P_0M} = (1, 1, 12)$$

$$\overrightarrow{P_0M} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-10, 10, 0)$$

$$d(M, p) = \frac{|\overrightarrow{P_0M} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 10^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{\frac{200}{6}} = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Зад 6. Наћи тачку M која је симетрична тачки $N(2,1,0)$ у односу на праву $p: x+2y-3z-2=0,\ x-y+3z+1=0$



$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3(1,-2,-1)$$

$P:\ z=0:\ \begin{matrix} x+2y=2 \\ x-y=-1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y=1 \\ x=0 \end{matrix}\quad P(0,1,0)$

$p: \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-0}{-1} = t \qquad p: \begin{cases} x=t \\ y=-2t+1 \\ z=-t,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

Одредимо сада једначину равни α која садржи тачку N и нормална је на правој p:

$\vec{n_\alpha} = \vec{p} = (1,-2,-1)$

$\alpha:\ 1\cdot(x-2)-2\cdot(y-1)-1\cdot(z-0)=0$

$\alpha:\ x-2y-z=0$

Сада нађимо продор праве p кроз раван α – тачку S.

$S\in p \Rightarrow S(t,-2t+1,-t)$ за неко $t\in\mathbb{R}$

$S\in\alpha \Rightarrow t-2(-2t+1)-(-t)=0$

$6t-2=0 \qquad t=1/3 \Rightarrow S\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

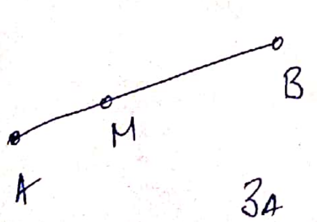
S је средиште дужи MN па је

$x_S = \dfrac{x_M+x_N}{2} \Rightarrow x_M = 2x_S - x_N = 2\cdot\frac{1}{3}-2 = -\frac{4}{3}$

$y_S = \dfrac{y_M+y_N}{2} \Rightarrow y_M = 2y_S - y_N = 2\cdot\frac{1}{3}-1 = -\frac{1}{3}$ $\qquad M\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$z_S = \dfrac{z_M+z_N}{2} \Rightarrow z_M = 2z_S - z_N = 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-0 = -\frac{2}{3}$

Подсећање: Подела дужи у датом односу



Ако је $AM:MB = \lambda:1$, онда је

$x_M = \dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_M = \dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\quad z_M = \dfrac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}$

За $\lambda=1$, M је средиште ...

Зад 7. Одредити једначину праве ℓ која је у односу на раван $\alpha: x-3y+z-45=0$ симетрична са правом $p: x+y+z-1=0,\ 2x-y-z-2=0.$

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0,3,-3) = 3\cdot(0,1,-1)$$

P: овде на примеру израчунавања тачке P хоћемо да укажемо на једну ствар, обратите пажњу! Ако претпоставимо да је $x=0$ за P добијамо систем: $\begin{matrix} y+z=1 \\ -y-z=2 \end{matrix}$ који очигледно нема решења.

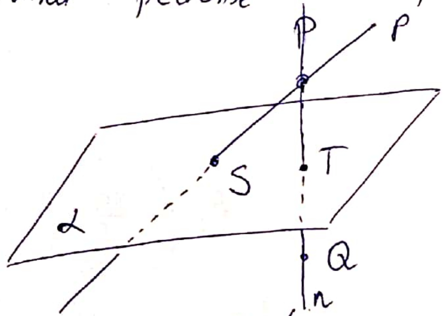
Шта то значи? То НЕ ЗНАЧИ да не можемо наћи коорд. тачке P, већ да ниједна тачка са праве p нема x коорд. једнаку нули.

Покушајмо са рецимо $z=0$.

$$P: z=0,\quad \begin{matrix} x+y=1 \\ 2x-y=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} \qquad P(1,0,0)$$

$$p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-1} = t \Rightarrow p: \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$$

Приметимо да се из параметарског облика једначине праве p види да је за све тачке праве p $x=1$ и зато нисмо добили решење уз претпоставку $x=0$.



Проверимо да ли права p и раван α имају пресек, потражимо $S=p\cap\alpha$

$S\in p \Rightarrow S(1,t,-t)$

$S\in\alpha \Rightarrow 1-3t-t-44=0 \Rightarrow t=-11$

$S(1,-11,11)$

Да бисмо одредили праву ℓ потребна нам је тачка Q симетрична тачки P у односу на раван α.

Одредимо једначину праве n која садржи тачку P и нормална је на α

$$n: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1} = s \qquad n: \begin{cases} x = s+1 \\ y = -3s \\ z = s \end{cases}$$

$$T = n \cap \alpha \Rightarrow s+1-3(-3s)+s-45=0$$

$$11s = 44 \qquad s = 4 \qquad T(5,-12,4)$$

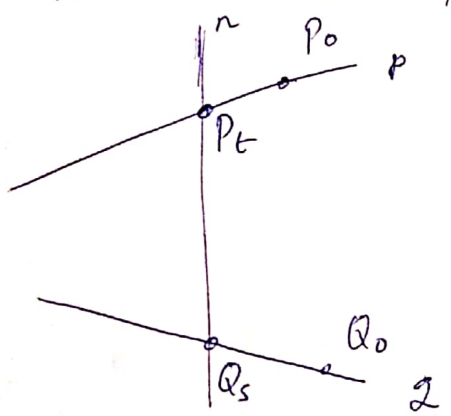
T је средиште од PQ па је $x_T = \frac{x_P + x_Q}{2}$ итд, одакле је $Q(9,-24,8)$.

Сада је права q одређена са две своје тачке Q и T па је:

$$q: \frac{x-1}{9-1} = \frac{y+11}{-24+11} = \frac{z-11}{8-11}$$

МИМОИЛАЗНЕ ПРАВЕ

Две мимоилазне праве имају јединствену заједничку нормалу



Једначину заједничке нормале можемо добити на два начина:

I начин – нормалу можемо одредити као $n = \alpha \cap \beta$ где је

$$\alpha: M \in \alpha \Leftrightarrow [\overrightarrow{P_0M}, \vec{p}, \vec{p} \times \vec{q}] = 0$$

$$\beta: M \in \beta \Leftrightarrow [\overrightarrow{Q_0M}, \vec{q}, \vec{p} \times \vec{q}] = 0$$

II начин

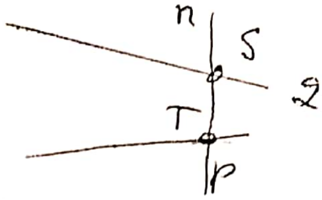
Нека је P_t произвољна тачка праве $p: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases}$

и Q_s произв. тачка праве $q: \begin{cases} x = x_2 + a_2 s \\ y = y_2 + b_2 s \\ z = z_2 + c_2 s \end{cases}$

$\overrightarrow{P_tQ_s}$ зависи од t и s које налазимо из услова

$$\vec{p} \cdot \overrightarrow{P_tQ_s} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{q} \cdot \overrightarrow{P_tQ_s} = 0$$

3. Дате су праве $p: \begin{cases} 4x-y+2z-4=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ и $q: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Показати да су праве p и q мимоилазне, одредити једначину заједничке нормале и растојање између њих.



$$\vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-3) \qquad P(0,2,3)$$

$$\vec{q} = (1,1,1) \qquad Q(0,0,0) \qquad \vec{PQ} = (0,-2,-3)$$

$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] \neq 0 \Rightarrow$ мимоилазне су

Нека је n заједничка нормала и нека сече праву p у тачки T и праву q у тачки S и нека је $\vec{n} = (A, B, C)$

$$S \in q \Rightarrow S(s,s,s) \qquad T \in p \Rightarrow T(t, -2t-2, -3t-3)$$

$$\vec{ST} = (t-s, -2t-2-s, -3t-3-s)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} \perp \vec{p} \\ \vec{n} \perp \vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} = \alpha \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = \alpha \cdot (1,-4,3) \qquad \vec{n} = (1,-4,3)$$

$$\vec{ST} = k \cdot \vec{n} \Rightarrow \begin{array}{l} t-s = 1 \cdot k \\ 2t+s+2 = 4 \cdot k \\ 3t+s+3 = 3k \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2t+s+2 = 4t-4s \\ 3t+s+3 = 3t-3s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2t+5s = -2 \\ 4s = -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -\frac{3}{4} \\ t = -\frac{7}{8} \end{array}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

$$T\left(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right)$$

$$n: \frac{x+\frac{3}{4}}{1} = \frac{y+\frac{3}{4}}{-4} = \frac{z+\frac{3}{4}}{3}.$$

Растојање између p и q једнако је растојању тачака S и T

$$d(p,q) = d(S,T) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)^2}$$

169

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У ПРОСТОРУ

1. Наћи вредност параметра $m \in \mathbb{R}$ тако да се праве

$$p: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-2}{4} \quad и \quad q: \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2} \quad секу.$$

Одредити координате пресечне тачке, угао између њих и једначину равни одређене са p и q.

$P(3,-1,2) \quad \vec{p} = (5, m, 4) \quad Q(8,1,6) \quad \vec{q} = (3,1,-2)$

$\vec{PQ} = (8-3,\ 1-(-1),\ 6-2) = (5,2,4)$

$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = 0$ – услов да се праве секу или буду паралелне,

како $\vec{p} \neq \lambda \cdot \vec{q}$ онда се p и q секу

$$= [\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & m & 4 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow m = 22$$

$p \cap q = S$ – пресечну тачку тражимо из параметарског облика једначине праве

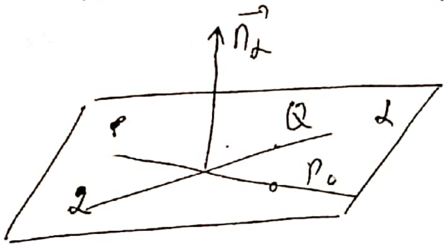
Scanned with Cam

$$p: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{22} = \frac{z-2}{4} = t \Rightarrow p: \begin{cases} x = 5t+3 \\ y = 22t-1 \\ z = 4t+2 \end{cases}$$

$$q: \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2} = s \Rightarrow q: \begin{cases} x = s\cdot 3+8 \\ y = s+1 \\ z = -2s+6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5t+3 &= 3s+8 \\ 22t-1 &= s+1 \\ 4t+2 &= -2s+6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{1}{6} \\ s &= \frac{5}{3} \end{aligned} \qquad S\left(\frac{23}{6}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\measuredangle(p,q): \quad \cos\measuredangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{(5,22,4)\cdot(3,1,-2)}{\sqrt{5^2+22^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}$$

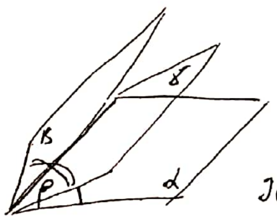


$$\vec{n}_\alpha = \vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 22 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-48, 22, -61)$$

$$\alpha: -48(x-3) + 22\cdot(y-(-1)) - 61\cdot(z-2) = 0$$

2. Наћи једначину симетралне равни за равни $\alpha: 3x-y+7z-4=0$ и $\beta: 5x+3y-5z+3=0$.

Прамен равни чине све равни које садрже једну праву или све равни паралелне са датом равни:



– једначина прамена одређена са α и β је $\gamma = \alpha + \lambda\cdot\beta$ где је λ неки параметар

Симетрална раван припада прамену одређеном са α и β и полови угао између њих.

$$\gamma: \quad 3x-y+7z-4+\lambda\cdot(5x+3y-5z+3) = 0$$

$$(3+5\lambda)x + (-1+3\lambda)y + (7-5\lambda)z + 3\lambda - 4 = 0$$

$$n_\gamma = (3+5\lambda, -1+3\lambda, 7-5\lambda)$$

$$\cos\measuredangle(n_\alpha, n_\gamma) = \cos\measuredangle(n_\beta, n_\gamma) \Rightarrow \frac{\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\gamma}{|\vec{n}_\alpha|\cdot\cancel{|\vec{n}_\gamma|}} = \frac{\vec{n}_\gamma\cdot\vec{n}_\beta}{\cancel{|\vec{n}_\gamma|}\cdot|\vec{n}_\beta|}$$

17/1

$$\frac{(3,-1,7)\cdot(3+5\lambda,-1+3\lambda,7-5\lambda)}{\sqrt{9+1+49}} = \frac{(5,3,-5)\cdot(3+5\lambda,-1+3\lambda,7-5\lambda)}{\sqrt{25+9+25}}$$

$$9+15\lambda+1-3\lambda+49-35\lambda = 15+25\lambda-3+9\lambda-35+25\lambda$$

$$59-23\lambda = 23+59\lambda \Rightarrow 36 = 82\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{36}{82} = \frac{18}{41}$$