1. (фебруар 2020) Дате су праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ и $q: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

а) (5п) Применом мешовитог производа доказати да су дате праве мимоилазне

б) (5п) Одредити једначину заједничке нормале n датих правих

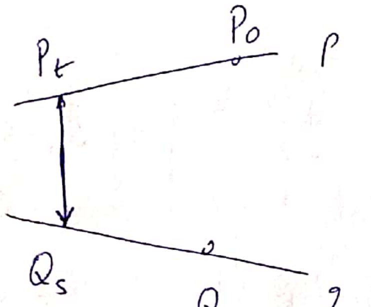
в) (5п) Одредити једначину равни α која садржи n и p

г) (5п) Одредити једначину равни β која је нормална на раван α и садржи праву n.

а) $\vec{p} = (1,2,1)$ $\quad P_0(1,1,-1)$ $\quad \vec{q} = (-1,1,1)$ $\quad Q_0(2,1,0)$

$\overrightarrow{P_0Q_0} = (1,0,1)$

$$[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{P_0Q_0}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\cdot(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{мимоилазне су}$$

б) 

$$P \in p: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t-1 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

$P_t(t+1, 2t+1, -t-1)$

$$Q \in q: \begin{cases} x = -s+2 \\ y = s+1 \\ z = s \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}$$

$Q_s(-s+2, s+1, s)$

$\overrightarrow{P_tQ_s} = (-s-t+1, s-2t, s+t+1)$

$\vec{p} \cdot \overrightarrow{P_tQ_s} = 0 \Rightarrow 0 = (1,2,1) \cdot (-s-t+1, s-2t, s+t+1)$

$0 = -s-t+1+2s-4t+s+t+1$

$$\boxed{0 = 2s - 4t + 2}$$

173

$\vec{q}\cdot\overrightarrow{P_tQ_s}=0 \Rightarrow 0=(-1,1,1)\cdot(-s-t+1,\ s-2t,\ s+t+1)=$

$= s+\cancel{t}-1+s-\cancel{2t}+s+\cancel{t}+1$

$\boxed{0=3s} \Rightarrow s=0$

$t=\frac{1}{2}$

$P\left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)$ и $S(2,1,0)$ одређују нормалу n:

$$n: \frac{x-2}{\frac{3}{2}-2}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-0}{-\frac{3}{2}-0}$$

$$n: \frac{x-2}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3/2} \qquad /-2$$

$$n: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$$

3) α.

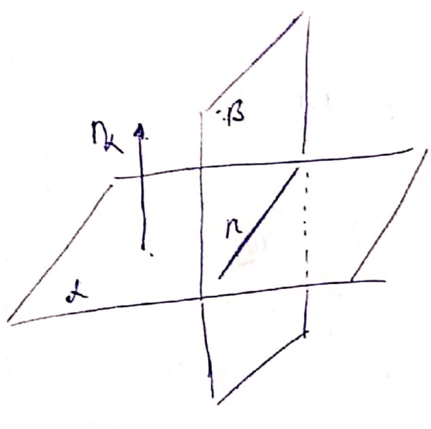
$$\vec{n}_\alpha=\vec{n}\times\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-4,4,4)=4\cdot(-1,1,1)$$

$\alpha: -1\cdot(x-2)+1\cdot(y-1)+1\cdot z=0$

$\alpha: -x+y+z+1=0$

4)



$$\vec{n}_\beta=\vec{n}\times\vec{n}_\alpha=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-5,-4,-1)$$

$$=-(5,4,1)$$

$\beta: 5\cdot(x-2)+4\cdot(y-1)+1\cdot z=0$

$5x+4y+z-14=0$

2. (Јул 2019) Дата је раван $\alpha: 3x+2y-z-22=0$ и тачка $A(-1,2,-3)$. Одредити:

а) 5б растојање тачке A од равни α

б) 5б једначину праве p која садржи тачку A и нормална је на раван α

в) 5б пресек равни α и праве p.

а) $$d(A,\alpha)=\frac{|3\cdot(-1)+2\cdot 2-(-3)-22|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-18|}{\sqrt{14}}=\frac{18\sqrt{14}}{14}=\frac{9}{7}\sqrt{14}$$

б) $\vec{p}=\vec{n}_\alpha=(3,2,-1)$ $$p: \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}$$

в) $$p: \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+2 \quad t\in R \\ z=-t-3 \end{cases} \qquad P_t\in p \Rightarrow P_t(3t-1,\ 2t+2,\ -t-3)$$

$$S=\alpha\cap p \qquad 3\cdot(3t-1)+2(2t+2)-(-t-3)-22=0$$
$$9t-3+4t+4+t+3-22=0$$
$$14t=18 \qquad t=\frac{9}{7}$$

$$S\left(\frac{27}{7}-1,\ \frac{18}{7}+2,\ -\frac{9}{7}-3\right)\Rightarrow S\left(\frac{20}{7},\ \frac{32}{7},\ -\frac{30}{7}\right)$$

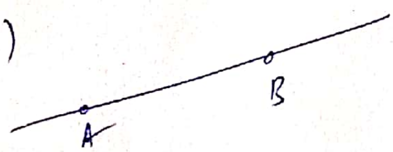
3. (Август 2019) Дате су тачке $A(2,3,-1)$, $B(1,0,2)$, $C(-1,2,3)$ и $D(2,-1,m)$, $m\in R$.

а) 3б Одредити једначину праве a одређене тачкама A и B

б) 5б Одредити растојање тачке C од праве a

в) 7б Одредити вредност параметра $m\in R$ тако да запремина тетраедра $ABCD$ буде $V=\frac{10}{3}$.

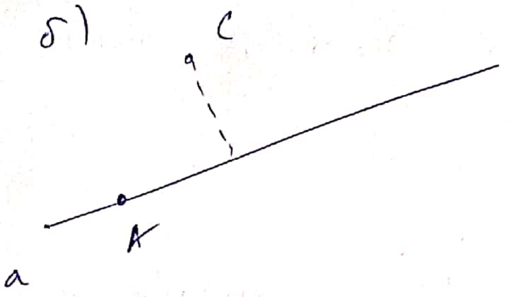
а)



$\vec{AB}=\vec{a}=(-1,-3,3)$

$$a: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{3}$$

б)



$$d(C,a) = \frac{|\vec{AC} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{AC} = (-3,-1,4)$$

$$\vec{AC} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (9,5,8)$$

$$|\vec{AC} \times \vec{a}| = \sqrt{81+25+64} = \sqrt{170} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$$

$$d(C,a) = \sqrt{\frac{170}{19}}$$

в) $\vec{AB} = (-1,-3,3)$

$\vec{AC} = (-3,-1,4)$

$\vec{AD} = (0,-4,m+1)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & m+1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot|8m-12|$$

$$\frac{1}{\cancel{6}_2}|8m-12| = \frac{10}{\cancel{3}}$$

$$|4m-6| = 10 \Rightarrow m_1 = 4, \quad m_2 = -1$$

НАПОМЕНЕ

1. Вратимо се на ПРЗ и праву p задату као пресек две равни $\alpha: x-y-1=0$ и $\beta: z-2x=0$. У ПРЗ. приказали смо 1 начин да дођемо до параметарског облика једначине праве p. То можемо постићи и на други начин – решавањем система

$$x-y-1=0$$
$$-2x+z=0 \Rightarrow z=2x$$
$$y=-1+x$$

$$\begin{cases} x=t\in\mathbb{R} \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases}$$ параметарски облик

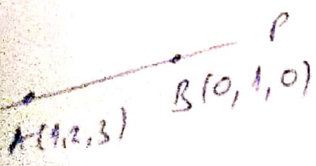
А могли смо и овако поступати:

$$x-y-1=0 \Rightarrow x=y+1$$
$$-2x+z=0 \Rightarrow z=2x$$
$$y=t$$

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$ – и ово је параметарски облик

2. Уколико решавамо задатак ~~...~~ Испитати узајамни положај 2 праве – као у примеру 4 такође се може поћи „другим редом" и покушати најпре да нађемо пресечну тачку па уколико нађемо пресечну тачку (решавамо систем од три једначине са 2 непознате и решење мора да задовољава све 3 једначине) онда се секу, уколико се не секу а нису им пропорционални вектори, онда су мимоилазне.

3. Рекли смо да је права одређена једном својом тачком и вектором правца, али је важно да разумемо да та тачка и вектор нису јединствено одређени.



$$p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-3}, \quad \underbrace{}_{}$$ као тачку изаберемо B

али и $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и $p: \frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{6}$