9 – нумерација се наставља на претходно предавање

МАТЕМАТИКА 2

27. март 2020.

Предавања за ову недељу више ће представљати додатак на прошлонедељну причу о интеграцији рационалних функција, да бисмо сачекали да вежбе стигну предавања.

Најпре ћу вам урадити неколико задатака са колоквијума.

1. $$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x(1+\ln^2 x)^2} = \begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = \begin{bmatrix} u=t, & du=dt \\ v=\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \int\frac{dt}{1+t^2}\right) = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+\ln^2 x)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\ln x + C$$

2. $$\int \frac{3x-6}{(x+1)^2(x^2+2)} = I$$

$$\frac{3x-6}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \quad \Big/ (x+1)^2(x^2+2)$$

Решите систем за вежбу. Добија се: $A=-1$, $B=-3$, $C=1$, $D=2$

$$I = \int\left(\frac{-1}{x+1} + \frac{-3}{(x+1)^2}\right)dx + \int\frac{x\,dx}{\underbrace{x^2+2}_{t}} + 2\int\frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}\right| + \frac{3}{x+1} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

3. $$\int \frac{x\cdot\sin^4(\ln\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}dx = \begin{bmatrix} t=\ln\sqrt{x^2+1} \\ dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx \end{bmatrix} = \int\sin^4 t\,dt =$$

$$= \int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \dots$$ даље као што смо радили на часу

10

4. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(2x^2+4x+5)^2}\,dx$ — није са испита

$$\frac{3x+1}{(2x^2+4x+5)^2} = \frac{Ax+B}{2x^2+4x+5} + \frac{Cx+D}{(2x^2+4x+5)^2} \quad !!! \text{ ВАЖНО}$$

Ово не треба да радите јер из самог облика рац. ф-је одмах видите да је $A=B=0$, $C=3$, $D=1$. А ово често виђамо код израде задатака овог типа на испиту.

Како треба?

$$\int \frac{3x+1}{(2x^2+4x+5)^2}\,dx = 3\cdot\int \frac{x+\frac{1}{3}}{(2x^2+4x+5)^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x+\frac{4}{3}}{(2x^2+4x+5)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{4x+4-4+\frac{4}{3}}{(2x^2+4x+5)^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x+4}{(\underbrace{2x^2+4x+5}_{t})^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(2x^2+4x+5)^2}$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2} - 2I = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+4x+5} - 2I$$

I је заправо интеграл типа $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ и видели смо на прошлим „предавањима", а затим и на вежбама које асистент оставља, како се ради. Подсетимо се:

$$I = \int \frac{dx}{(2x^2+4x+5)^2} \ \overset{\text{најпре извлачимо коеф. 2 уз } x^2}{=} \ \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left((x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}$$

Даље задатак можете (уз евентуалну смену $t=x+1$) решавати парцијалном интеграцијом, а можемо и сменом:

$$x+1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}\,t, \quad \text{тада је} \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}, \quad t = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 t+\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{9}{4}}\int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}\int \cos^2 t\,dt$$

$$= \ldots$$

11 Претходна смена је згодан увод у наредно градиво које треба да савладамо, а тиче се интеграције ирационалних функција (функција које имају и корен ...)

ИНТЕГРАЦИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Радићемо неколико метода за интеграцију ирационалних ф-ја. Оне се углавном своде на то да препознате ког је типа дата ирационална функција и да увођењем одговарајућих смена задатак сведете на интеграцију рационалних функција. Дакле, подвлачим, за даље је неопходно да савладате интегр. рационалних функција (уз материјал са предавања за то вам је неопходно и да детаљно прођете кроз задатке које ће оставити асистент наредне недеље).

Такође је врло важно да сте добро увежбани да решавате интеграле типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

који се сменом $t = x + \frac{b}{a\cdot 2}$ своде на интеграле облика

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm \alpha^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm \alpha^2}\right| + C \qquad (\text{за } a > 0)$$

или

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} \qquad (\text{за } a < 0)$$

Обавезно прорадите задатке из вежби на ову тему.

Да се вратим на смену $x = a\,tg\,t$. За ово предавање још ћу вам показати како се користећи неке тригонометријске смене можемо решити корена (а често помажу и кад нема корена, као у $I_n = dx/(x^2+a^2)^n$). Више о томе, за пар недеља...

12 На даље ћемо са R означавати рационалну функцију.

За интеграле облика:

1. $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ (значи рац. ф-ја од x и $\sqrt{a^2-x^2}$, на прим. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{x+\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$, ...)

згодно је користити смену $x = a\sin t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

или $x = a\cos t,\ t\in(0,\pi)$

$$\sqrt{a^2-x^2} \underset{}{\overset{x=a\sin t}{=\!=}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = \sqrt{a^2\cdot\cos^2 t} \overset{a>0}{\underset{t\in(-\pi/2,\pi/2)}{=\!=}} a\cdot\cos t$$, дакле решили смо се корена

$x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\cdot dt$ и $t = \arcsin\frac{x}{a}$

2. $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$

смена $x = \frac{a}{\sin t}$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ или $x = \frac{a}{\cos t}$, $t\in(0,\pi)$

Тада је $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)} \overset{a>0,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=\!=}$

$= a\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = a\cdot\frac{\cos t}{|\sin t|}$, дакле решили смо се корена опет

$x = \frac{a}{\sin t} \Rightarrow dx = -\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}$, $\sin t = \frac{a}{x} \Rightarrow t = \arcsin\frac{a}{x}$

3. $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$

смена $x = a\cdot \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t} \overset{a>0}{=} a\cdot\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}} = a\cdot\frac{1}{\cos t}$$

13 Применимо сада претходне смене на решавање неких задатака

1. $$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=3\sin t\\ dx=3\cos t\,dt\end{bmatrix} = \int\sqrt{\underbrace{9-9\sin^2 t}_{9(1-\sin^2 t)=9\cos^2 t}}\cdot 3\cos t\,dt =$$

$$= \int 3\cdot\underbrace{\cos t}_{\text{за } t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\ \cos t>0}\cdot 3\cdot\cos t\,dt = 9\cdot\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\underbrace{\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)}_{\text{вежба за заинтересоване — средити ово ...}} + C$$

Напомена: Исти интеграл на вежбама је урађен преко парцијалне и можете упоредити решења као помоћ за вежбу за заинтересоване.

2. $$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x=\frac{1}{\sin t}\\ dx=\frac{-\cos t}{\sin^2 t}\,dt\end{bmatrix} = \int\frac{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt}{\frac{1}{\sin t}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}}$$

прет. да је све позит. = да не пишемо | |

$$= \int\frac{-\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}} = -t+C = -\arcsin\frac{1}{x}+C$$

II начин $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \overset{\text{за } x>0}{=} \int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} -\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin\frac{1}{x}+C$$

3. $$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+16}} = \begin{bmatrix} x=4\,tg\,t\\ dx=\frac{4}{\cos^2 t}\cdot dt\end{bmatrix} = \int\frac{\frac{4\,dt}{\cos^2 t}}{4^2\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sqrt{16\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}} =$$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} \underset{ds=\cos t\,dt}{\overset{s=\sin t}{=}} \frac{1}{16}\int\frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s}+C$$

$$= -\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)}+C$$

За вежбу: $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$, $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\sqrt{1+x+x^2}\,dx$

2 начина:
1. парц.
2. триг. смена

следећи пут ћемо видети и III начин