За решавање разних типова интеграла израђене су различите технике. Треба знати да неки интеграли припадају различитим типовима, па се могу рачунати на различите начине. Неки од тих начина су знатно краћи, па је, за практичну примену, добро при увежбавању сваки интеграл решити на што више начина. Пример једног таквог интеграла је $I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx$.

1. начин: С обзиром да је ово интеграл облика $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})\,dx$, један начин решавања је увођење смене $x = a\,tg\,t$.

смена: $x = tg\,t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ *

$dx = d(tg\,t) = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$ $\qquad x^2+1 = tg^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$

$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{|\cos t|} \overset{*}{=} \frac{1}{\cos t}$ $\qquad \sin t = tg\,t \cdot \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$I = \int \frac{1}{\cos t}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,dt \overset{**}{=} \int \frac{\cos t\,dt}{(1-\sin^2 t)^2} = \left|\begin{array}{l}\text{смена: } \sin t = \\ \cos t\,dt = dz\end{array}\right.$$

** Ово је интеграл облика $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$

па се он сам може свести на интеграл рацио-
налне функције коришћењем две смене.

Једна је $\sin t = z$ и њу ћемо сад искористити.

Друга је $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = z$ и она је остављена за вежбање

$$I = \int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \int \frac{1-z^2+z^2}{(1-z^2)^2}\,dz = \int \frac{1}{1-z^2}\,dz + \frac{1}{2}\int \underset{u}{z}\, \underbrace{\frac{2z\,dz}{(1-z^2)^2}}_{dv}$$

$$\overset{\text{парцијална}}{\underset{\text{интеграција}}{=}} \int \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z^2} - \int \frac{dz}{1-z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{1}{2}\,\frac{z}{1-z^2}$$ → где је нестала апсолутна в.?

$$\overset{(***)}{=} \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}$$

2. начин: Применом парцијалне интеграције, исти интеграл се решава у мање корака.

$$I = \int\sqrt{x^2+1}\,dx \overset{\text{ПИ}}{=} x\sqrt{x^2+1} - \int x\,d\left(\sqrt{x^2+1}\right) = x\sqrt{x^2+1} -$$

$$- \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} -$$

$$- \int\sqrt{x^2+1} + \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - \underline{I} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) +$$

Повезујући почетак и крај, добија се, наравно, исто решење као и малопре.

Претходна два начина су довољно добра да се илустрије како на решавање интеграла утиче избор методе, али нису једини.

3. начин: Метод Остроградског.

$$☆ \quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \lambda \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

Диференцирањем крајње леве и крајње десне стране добијамо

$$\sqrt{x^2+1} = A\sqrt{x^2+1} + (Ax+B)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Big/ \sqrt{x^2+1}$$

$$x^2+1 = Ax^2 + A + Ax^2 + Bx + \lambda$$

$A = \frac{1}{2}$ $\quad B = 0$ $\quad \lambda = \frac{1}{2}$. Када се врати у ☆, добија се, наравно, исто решење.

4. начин: С обзиром да је ово интеграл облика $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, интеграл се Ојлеровим сменама може свести на интеграл рационалне ф-је. Те смене су

4.1. $\sqrt{x^2+1} = t + x$

4.2. $\sqrt{x^2+1} = t - x$

4.3. $\sqrt{x^2+1} = tx - 1$

$\sqrt{x^2+1} = tx + 1$

4.2. У овом начину ће бити лакше решити интеграл него вратити смену.

смена: $\sqrt{x^2+1} = t - x \quad /^2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+1} = t - \frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t} = \frac{t^2+1}{2t}$

$$x^2+1 = t^2 - 2xt + x^2$$

$$t = \sqrt{} + x \qquad 2xt = t^2 - 1$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t^2}\,dt$$

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2^3t^2} + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{8}\left((\sqrt{x^2+1}+x)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)^2\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1}+x| + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left((\sqrt{x^2+1}+x)^2 - (\sqrt{x^2+1}-x)^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

Потребно је врати смену. То ће бити знатно теже ако се прво саберу разломци $t^2 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^4-1}{t^2}$. Уместо тога, боље је вратити смену, рационалисати и онда средити.

где је нестала заграда за апсолутну вредност?

4.3. СМЕНА:

$$\sqrt{x^2+1} = tx - 1 \Rightarrow x^2+1 = t^2x^2 - 2xt + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2\,\frac{t}{1-t^2} \Rightarrow dx = -2\,\frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$$

$$\sqrt{x^2+1} = tx - 1 = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx = -2\int \frac{(t^2+1)^2}{(t^2-1)^3}\,dt = -2\int \frac{(t^2-1)^2+4t^2}{(t^2-1)^3}\,dt$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2-1} + 2\int t\,\frac{-4t\,dt}{(t^2-1)^3}$$

$$u = t \qquad v = \frac{1}{(t^2-1)^2}$$

$$\overset{\text{пи}}{=} -2\int \frac{dt}{t^2-1} + 2\,\frac{t}{(t^2-1)^2} + 2\int \frac{t^2-1-t^2}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2-1} + 2\,\frac{t}{(t^2-1)^2} + 2\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \underset{u}{t}\,\underbrace{\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}}_{dv}$$

$$= \frac{2t}{(t^2-1)^2} + \frac{t}{t^2-1} - \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{t^2-1}\,\frac{t^2+1}{t^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C \overset{*}{=}$$

$$= \frac{t}{t^2-1}\,\frac{t^2+1}{t^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1} + \frac{2t}{t^2-1}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + C$$

$$* \quad \ln\frac{t+1}{t-1} = \ln\frac{(t+1)^2}{(t-1)(t+1)} = \ln\frac{t^2+1+2t}{t^2-1}$$

Последња смена је $t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Мотив за ову смену је таблични интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Смена:

$$t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow e^t = x+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = e^t - x \,/^2$$

$$x^2+1 = e^{2t} - 2xe^t + x^2 \Rightarrow 2xe^t = e^{2t}-1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = e^t - \frac{e^t-e^{-t}}{2} = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$dx = \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int \left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-2t} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$