III ПРЕДАВАЊЕ – ИНТЕГРАЦИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА – НАСТАВАК

3.4.2020.

1. Метода Остроградског

Ово је доста једноставна метода за решавање интеграла облика $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ где је $P_n(x)$ полином степена n, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Решење интеграла добија се из једнакости

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (*)$$

где је Q_{n-1} непознати полином степена $n-1$, а λ је такође непознати коеф. Коефицијенте полинома $Q_{n-1}(x)$ и вредност за λ добијамо диференцирањем $(*)$ и изједначавањем одговарајућих коефицијената полинома, као у наредним примерима.

Пр1. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$

Будући да x^2+5x+6 је полином другог степена, па у формули $(*)$ уместо $Q_{n-1}(x)$ пишемо произвољан полином првог степена, дакле $Ax+B$. Треба да одредимо $A, B, \lambda\in\mathbb{R}$ тако да важи:

$$\int \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = (Ax+B)\cdot\sqrt{x^2+2x-3} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} \quad \Big/'$$

Диференцирањем претходне једнакости добијамо:

$$\frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}} = A\cdot\sqrt{x^2+2x-3} + (Ax+B)\cdot\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

Множењем са $\sqrt{x^2+2x-3}$, добија се

$$x^2+5x+6 = A\cdot(x^2+2x-3) + (Ax+B)(x+1) + \lambda$$

Сређивањем леве стране добијамо:

$$x^2+5x+6 = Ax^2+2Ax-3A+Ax^2+Ax+Bx+B+\lambda$$

Изједначавањем одговарајућих коефицијената, добијамо

$$\begin{aligned} 1 &= 2A \\ 5 &= 2A+A+B = 3A+B \\ 6 &= B+\lambda \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1/2 \\ B &= 7/2 \\ \lambda &= 5/2 \end{aligned}$$

Остаје још да израчунамо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| + C, \text{ па је}$$

$$\int \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+2x-3} + \frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| + C$$

Пр 2. $\displaystyle\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (Ax^2+Bx+C)\cdot\sqrt{x^2+4} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \quad /'$

$$\frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}} = (2Ax+B)\cdot\sqrt{x^2+4} + (Ax^2+Bx+C)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \quad /\cdot\sqrt{x^2+4}$$

$$\begin{aligned} 3x^3+5 &= (2Ax+B)\cdot(x^2+4) + (Ax^2+Bx+C)\cdot x + \lambda \\ &= 2Ax^3+8Ax+Bx^2+4B+Ax^3+Bx^2+Cx+\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= 3A \\ 0 &= 2B \\ 0 &= 8A+C \\ 5 &= 4B+\lambda \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 0 \\ C &= -8 \\ \lambda &= 5 \end{aligned}$$

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (x^2-8)\cdot\sqrt{x^2+4} + 5\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$$

Пр 3. $\displaystyle\int \sqrt{4-9x^2}\,dx$

За домаћи урадите помоћу парцијалне интеграције, као и користећи тригонометријску смену $3x = 2\sin t$ ...

Сада ћемо задатак решити и на трећи начин, помоћу методе Остроградског. Обратите пажњу, задатак није у облику $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ и да бисмо могли применити методу Остроградског, најпре га морамо довести на тражени облик.

$$\int \sqrt{4-9x^2}\,dx \cdot \frac{\sqrt{4-9x^2}}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{4-9x^2}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx = (Ax+B)\cdot\sqrt{4-9x^2} + \lambda \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} \Big/ '$$

$$\frac{4-9x^2}{\sqrt{4-9x^2}} = A\cdot\sqrt{4-9x^2} + (Ax+B)\cdot\frac{-9x}{\sqrt{4-9x^2}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} \quad \Big/ \cdot \sqrt{4-9x^2}$$

$$4-9x^2 = A\cdot(4-9x^2) + (Ax+B)(-9x) + \lambda = -9Ax^2 + 4A - 9Ax^2 - 9Bx + \lambda$$

$$\begin{aligned} -9 &= -18A \\ 0 &= -9Bx \\ 4 &= 4A + \lambda \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1/2 \\ B &= 0 \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{4-9x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{4-9x^2} + 2\cdot\int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{4-9x^2} + \frac{2}{3}\cdot\arcsin\frac{3x}{2} + C$$

Задаци за вежбу: $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$, $\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{-x^4-2x^2+5}}\,dx$ – најпре мора смена. Размислите.

2. Интеграли облика

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) dx$$

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ такви да је $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, а $r_1, r_2, \ldots, r_k$ су рационални бројеви решавају се сменом

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

где је m најмањи заједнички садржалац за имениоце од $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Објаснићемо на примерима.

Пр1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

У овом примеру $\frac{ax+b}{cx+d}=x$, а $r_1=\frac{1}{2}$ и $r_2=\frac{1}{3}$, па је потребно увести смену $t^m=x$, где је $m=НЗС(2,3)=6$. Дакле, $x=t^6$

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} \overset{x=t^6}{\underset{dx=6t^5dt}{=}} \int \frac{6t^5\,dt}{t^6(1+2\cdot\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6})}=$$

$$=\int \frac{6\,dt}{t(1+2t^3+t^2)}$$

Добили смо интеграл рационалне функције, и као следећи корак треба да факторишемо $2t^3+t^2+1$. Лако је уводити да је $t_1=-1$ нула посматраног полинома па је:

$$2t^3+t^2+1=(t+1)\underbrace{(2t^2-t+1)}_{\text{има негативну дискриминанту, не може се даље разложити}}$$

$$=\int\frac{6\,dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)}=6\cdot\int\left(\frac{\overset{=1}{A}}{t}+\frac{\overset{=-\frac{1}{4}}{B}}{t+1}+\frac{\overset{=-\frac{3}{2}}{C}t+\overset{=\frac{1}{4}}{D}}{2t^2-t+1}\right)dt=$$

$$=6\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+\int\frac{-9t+\frac{3}{2}}{2t^2-t+1}\,dt=$$

$$=6\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|t+1|-9\int\frac{t-\frac{1}{6}}{2t^2-t+1}\,dt=\ln\frac{t^6}{|t+1|^{3/2}}-\frac{9}{4}\int\frac{4t-1+\overbrace{1-\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}}}{2t^2-t+1}$$

$$=\ln\frac{t^6}{|t+1|^{3/2}}-\frac{9}{4}\int\frac{4t-1}{2t^2-t+1}\,dt-\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}=$$

$$=\ln\frac{t^6}{|t+1|^{3/2}}-\frac{9}{4}\ln(2t^2-t+1)-\frac{15}{16}\int\frac{dt}{(t-\frac{1}{4})^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$

$$=\ln\frac{t^6}{|t+1|^{3/2}}-\frac{9}{4}\ln(2t^2-t+1)-\frac{15}{16}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4t-1}{\sqrt{7}}+C$$

за $t=\sqrt[6]{x}$ (Ако приметите грешку јавите, чудни су ми бројеви)

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left[\begin{array}{l} x+1=t^{12} \\ НЗС(3,4)=12 \end{array}\right] = \int \frac{12t^{11}}{t^3+t^4}\,dt =$$

$$= 12\cdot\int \frac{t^8}{t+1}\,dt = 12\cdot\int\left(t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 12\cdot\left(\frac{t^8}{8}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C$$

ЗА $t=\sqrt[12]{x+1}$

3. $$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} \frac{x+1}{x-1}=t^3 & \\ x=\frac{t^3+1}{t^3-1}, & dx=\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{6t^3dt}{(t^3-1)^2}$$

! ОБРАТИТЕ ПАЖЊУ – ОВО ЈЕСТЕ РАЦИОНАЛНА ФУНКЦИЈА, АЛИ ЈЕ НЕЋЕМО ТАКО РЕШАВАТИ, ЈЕР ЈЕ У ИМЕНИОЦУ ПОЛИНОМ ШЕСТОГ СТЕПЕНА, ПА ЋЕМО ПОКУШАТИ ДА НАЈПРЕ ПОМОЋУ ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ СНИЗИМО СТЕПЕН ИМЕНИОЦА

$$= \int 2t\cdot\frac{3t^2dt}{(t^3-1)^2} = \left[\begin{array}{l} u=2t \\ v=\int\frac{3t^2dt}{(t^3-1)^2} \overset{z=t^3-1}{=\!=} \int\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{t^3-1} \end{array}\right]$$

$$= \frac{-2t}{t^3-1} + 2\int\frac{dt}{t^3-1}$$

$$\int\frac{dt}{t^3-1} = \int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}\right)dt = \ldots$$

Претходну идеју покушајте да примените кад год је могуће и кад је степен имениоца у рационалној ф-ји 5, 6, ...

ЗА ВЕЖБУ: $$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}, \quad \int\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\,dx.$$

(НАЈПРЕ МАЛО ТРАНСФОРМИСАТИ ДО ТРАЖЕНОГ ОБЛИКА...)