Интеграли облика $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

За рационалне ф-је $R(x_1, x_2)$ и интеграл $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, постоје смене којима се рачунање почетног интеграла своди на рачунање интеграла рационалне ф-је.
Кад кажемо да је R рационална функција то значи да се $R(\cos x, \sin x)$ добија тако што (коначно много пута) применимо 4 основне рачунске операције на $\sin x$ и $\cos x$.

Постоје 4 смене.

1. УНИВЕРЗАЛНА СМЕНА:

Зове се тако јер може да се примени без обзира на то каква је ф-ја R

Смена: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$$x = 2\operatorname{arctg} t \qquad \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \qquad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$1+t^2 = 1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \qquad = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 2t\,\frac{1}{1+t^2}$$

Ради враћања смене, потребно је t изразити користећи само $\cos x$ и $\sin x$.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{\cos x + 1}.$$

Користили смо да је $\sin 2\alpha = 2\sin x\cos x$ и

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

Пример: $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} =$

$\displaystyle = c_1 - 2\frac{1}{t+1} = c_1 - 2\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x} = c_1 - 2\,\frac{1+\cos x+\sin x-\sin x}{1+\cos x+\sin x}$

$\displaystyle = c_1 - 2 + \frac{2\sin x}{1+\cos x+\sin x} = C + \frac{2\sin x}{1+\cos x+\sin x}.$

Универзалном сменом се интеграл $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ може свести на интеграл рационалне функције, без обзира на то каква је рационална ф-ја R. У неким ситуацијама, кад R задовољава неке додатне услове, могуће је сменом, другачијом од универзалне, паметније интеграл свести на интеграл рационање ф-је.

2. У случају да је R непарна по првој координати, тј. $R(-x_1, x_2) = -R(x_1, x_2)$. Тада је $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$. Сменом $\sin x = t$ се $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ своди на интеграл рационалне ф-је.

Пример: $I = \int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x}$. $R(\cos x, \sin x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$$R(-\cos x, \sin x) = \frac{-\cos x}{1+\sin x} = -R(x\cos x, \sin x)$$

$$\boxed{\text{смена: } \sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt}$$

$$I = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln|1+\sin x| + C =$$

$$= \ln(1+\sin x) + C$$

Наравно, могли смо применити и универзалну смену:

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \ x = 2\operatorname{arctg} z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2} \\ &\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \ z = \frac{\sin x}{1+\cos x} \end{aligned}}$$

$$I = \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} \frac{2\,dz}{1+z^2} = 2\int \frac{1-z^2}{(z^2+1)(z+1)^2}\,dz = \ldots$$

3. У случају да важи $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, почетни интеграл се сменом $\cos x = t$ може свести на интеграл рационалне ф-је.

Пример: $I = \int \sin^3 x\,dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array}\right]$

$= -\int (1 - t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

Наравно, могли смо применити и универзалну смену. Тада бисмо добили интеграл са другом рационалном ф-јом.

смена:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2} \;\Big|\; \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \; z = \frac{\sin x}{1+\cos x}}$$

$I = \int \sin^3 x\,dx = \int \frac{8z^3 \cdot 2dz}{(1+z^2)^3} = \ldots$ потребно је урадити две парцијалне да би се степен у имениоцу смањио за два: $u = -4z^2 \quad v = \frac{1}{(1+z^2)^2} \ldots$

Завршити за вежбу.

4. У случају да R испуњава услов $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, могуће је почетни интеграл свести на интеграл рационалне ф-је смени

смена:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ 1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \;\Big|\; \sin x = \operatorname{tg} x \cos x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}}$$

Пример: $I_1 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

$$R(-\cos x, -\sin x) = \frac{-\sin x-(-\cos x)}{-\sin x + (-\cos x)} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = R(\cos x, \sin x)$$

смена: $\operatorname{tg} x = t$, $-$

$$I_1 = \int \frac{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)}{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right)}\, dx = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \int \frac{t+t^2-t^2-1}{(t+1)(t^2+1)}\, dt = \int \frac{t+t^2}{(t+1)(t^2+1)}\, dt - \int \frac{t^2+1}{(t+1)(t^2+1)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t\, dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+1}{(t+1)^2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos^2 x}} + C = C - \ln|\sin x + \cos x|$$

Ако бисмо исти интеграл решавали примењујући универзалну смену, добили бисмо

$$-2\int \frac{t^2+2t-1}{(t^2-2t-1)(t^2+1)}\, dt$$

Показаће се да се овај интеграл може решити на много једноставнији начин. О томе касније.
Сад ћемо урадити још један пример.

$$I_2 = \int \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx \qquad R(\cos x, \sin x) = \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$R(-\cos x, -\sin x) = \frac{6(-\sin x)^2}{(-\cos x)^4} = \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x} = R(\cos x, \sin x)$$

СМЕНА: $\operatorname{tg} x = t \ldots$

$$I_2 = 6\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\overset{dt}{\frac{dx}{\cos^2 x}} = 6\int 1-(t^2+1)\,dt = 2t^3 + C =$$

$$= C + 2\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$$

Универзалном сменом $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ би се ~~овај~~ овај интеграл свео на $I_2 = 24\int \frac{z^2(1+z^2)}{(1-z^2)^4}\,dz$, који, очигледно, тежи од претходног.

У овој лекцији постоји неколико важних напомена.

НАПОМЕНА 1: Функције $\cos x$ и $\sin x$ су равноправне у следећем смислу: Ако у другој смени свако појављивање $\cos x$ и $\sin x$ замене места, добија се исправан резон.

Тачније, добија се тешка смена. Зато је логично питање, да ли би биле добре смене које се добију из прве и четврте, тако што у њима cos и sin замене места. Одговор је да је тај поступак добар. Конкретно

1a) смена: $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = t$ је такође универзална.

$$\Downarrow$$

$$x = 2\operatorname{arcctg} t \Rightarrow dx = \frac{-2\,dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$t = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

На пример, интеграл који смо решили у првом примеру $I = \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$, овом сменом се своди на сличан интеграл

$$I = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{-2\,dt}{1+t^2} = C + 2\frac{1}{t+1} =$$

$$= C + 2\frac{1}{\frac{1+\cos x}{\sin x}+1} = C + \frac{2\sin x}{1+\cos x+\sin x}$$

Слично, у случају да важи услов за четврту смену, тј. да важи

$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, може се применити смена

$$\boxed{\text{смена: } \operatorname{ctg} x = t \Rightarrow dx = \frac{-dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$I_1 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{1-t}{1+t} \, \frac{-dt}{1+t^2} =$$

$$= \dots = \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+1}{(t+1)^2} + c = c - \ln|\sin x + \cos x|$$

$$I_2 = 6 \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = 6 \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}} \, \frac{-dt}{1+t^2} = \int \frac{-6}{t^4}\, dt$$

$$= c + \frac{2}{t^3} = c + 2\,\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$$

Напомена 2: У претходним примерима, када се десило да интеграл може да се реши и универзалном и неком другом сменом, бивало је теже решавање ако се уведе универзална смена. Ово би могло некога да наведе на помисао да је то увек ситуација, што није тачно. Штавише, Некад се интеграл решава једноставније не примењујући тригонометријске смене.

У следећим примерима ћемо неке интеграле решити на више начина

1. $I_1 = \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$. Већ смо га решили универзалном сменом. Сад ћемо га решити много другачије.

$$I_1 = \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x + \left[\begin{array}{l}\cos x = t\\ d(\cos x) = dt\end{array}\right.$$

$$+ \int \frac{dt}{t^{-2}} = tg\,x - \frac{1}{t} + c = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + c$$

За вежбу показати да је $c_1 + \frac{2\sin x}{1+\cos x+\sin x}$ исто што и $c + \frac{\sin x - 1}{\cos x}$ (хинт: проширити први разломак са $1 - (\cos x + \sin x)$ или други са $1 + \cos x + \sin x$)

$I_2 = \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$. Урађен смјеном $t = \sin x$ и остављен за вјежбу да се уради универзалном смјеном. Најлакше се ради смјеном $1+\sin x = t$.

$I_3 = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$. У претходним примјерима је обиљежен као I_1 и урађен четвртом смјеном. За вјежбу да завршити универзалном смјеном.

Трећи начин је најлакши, а то је да се примијети да се извод имениоца и бројиоца разликују за знак.

смјена: $\sin x + \cos x = t$

$d(\sin x + \cos x) = dt$

$(-\cos x + \sin x)\,dx = dt$

$-(\sin x - \cos x)\,dx = dt$

$$I_3 = \int \frac{-dt}{t} = C - \ln|t|$$

$$= C - \ln|\sin x + \cos x|$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\,dx$$

1. начин универзалном смјеном!

$tg\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{(1+t^2)^3}{2t(1-t^2)^3}\,dt = \left[\begin{array}{c}\text{смјена}\\ t^2 = w\end{array}\right]$$

Завршити

2. начин $R(\cos x, \sin x) = \dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$$

смена: $\boxed{\sin x = t \Rightarrow d(\sin x) = dt \Rightarrow \cos x\,dx = dt}$

$$I_4 = \int \frac{\cos x}{\sin x \cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(1-\cos^2 x)^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t(1-t^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2(1-t^2)^2} \left[\begin{matrix} \text{смена: } t^2 = w \\ \text{или} \\ 1-t^2 = z \end{matrix}\right] =$$

$$= \dots = C + \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x|$$

3. начин $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ -

смена: $\cos x = t$ За вежбу

4. начин: $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$

смена: $\boxed{\begin{matrix} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{matrix}}$

$$I_4 = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{t}\,dt = \int \frac{dt}{t} + \int t\,dt$$

$$= C_1 + \ln|t| + \frac{1}{2}t^2 = C_1 + \ln|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Показати једнакост са претходним решењима

За вкъщи смени $\cos^2 x = t$ и $\sin^2 x = w$

$$I_5 = \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$$

$$I_6 = \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}\, dx$$

$$I_7 = \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x}\, dx$$

$$I_8 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$$

$$I_9 = \int \frac{\cos^2 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$