(19)

ОЈЛЕРОВЕ СМЕНЕ

Видели смо да интеграле облика $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можемо решавати помоћу метода Остроградског. Још једна погодна смена за решавање интеграла облика $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ јесте Ојлерова смена (3 смене прецизније). Кроз примере ћемо илустровати кад је најпогодније интеграл решавати применом Ојлерових смена. Овде само напомињем да је облик $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ општији од $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, јер покривају и интеграле облика $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$, ...

Прва Ојлерова смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \mp x\cdot\sqrt{a}, \quad \text{за } a>0 \qquad (1)$$

бирамо 1 знак

Потребно је изразити x и dx преко t и dt. Квадрирањем (1) добијамо:

$$\cancel{ax^2}+bx+c = t^2-2tx\sqrt{a}+\cancel{ax^2} \Rightarrow bx+2tx = t^2-c$$

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$$, одакле је диференцирањем

$$dx = 2\cdot\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt$$

Друга Ојлерова смена: за $c>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \mp \sqrt{c}$ (2)

бирамо знак

Из (2) је: $ax^2+bx+\cancel{c} = x^2t^2-2xt\sqrt{c}+\cancel{c}$, одакле је

$(ax+b)x = (xt^2-2t\sqrt{c})x$, па је

$x = \frac{2\sqrt{c}t+b}{t^2-a}$, и диференцирањем $dx = -2\frac{\sqrt{c}t^2+bt+a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}dt$

20 **Трећа Ојлерова смена**

Користи се када ax^2+bx+c има реалне и различите нуле x_1, x_2; тј. када је $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Нека је $x_1 < x_2$. Ако је $a<0$, за $x \in [x_1, x_2]$ смена је

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot(x-x_1) \quad \text{или} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x_2-x)$$

Поступак на даље је исти, па изаберимо смену

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot(x-x_1) \quad /^2$$

$$\underbrace{ax^2+bx+c} = t^2(x-x_1)^2$$

$$a\cancel{(x-x_1)}(x-x_2) = t^2\cdot(x-x_1)^{\cancel{2}}$$

$$ax-ax_2 = t^2x - t^2x_1$$

$$t^2x_1 - ax_2 = (t^2-a)x \Rightarrow x = \frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}, \quad dx = \frac{2a(x_2-x_1)dt}{(t^2-a)^2}$$

За $a>0$ биће $x \in (-\infty, x_1]$ или $x \in [x_2, +\infty)$

Када је у питању решавање задатака применом Ојлерових смена, понекад нам сам задатак "помаже" у избору, а понекад је могуће применити само 1 од смена. Покушаћу то да илуструјем кроз пар примера. Више примера - на вежбама наредних недеља. Део примера решићу до краја, а део до интеграла рационалне функције, што смо, надам се, савладали.

ПР1. $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$ax^2+bx+c = x^2+x+1$ - овај квадратни трином нема реалне нуле, па трећу смену одбацујемо. Како су и $a>0$ и $c>0$, можемо применити прву или другу Ојл. смену:

$$\sqrt{x^2+x+1} = t \pm x \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2+x+1} = xt \pm 1$$

(21) Погледајмо сада подинтегралну функцију:

$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ и у складу са њом одаберимо најпогоднију од претходно понуђених смена.

То је (надам се очигледно) смена

$\sqrt{x^2+x+1} = t-x$, jер је тада $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{t}$. Даље:

$\cancel{x^2}+x+1 = t^2-2tx+\cancel{x^2} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t+1}$, $dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2(t^2+t+1)dt}{(2t+1)^2} = \int\left(\frac{A^{=2}}{t}+\frac{B^{=-3}}{2t+1}+\frac{C^{=-3}}{(2t+1)^2}\right)dt$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t+1| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1} + C \quad \text{за } t = x+\sqrt{x^2+x+1}$$

Пр2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

$ax^2+bx+c = -x^2-2x+1$, $a=-1$, $c=1$, $D=4+4=8$

$-x^2-2x+1 = -(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad x_{1,2} = \frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}$

Овде можемо применити другу или трећу смену. Ако погледамо подинтегралну функцију, $1+\sqrt{1-2x-x^2}$ онда је друга смена (изгледа) бољи избор. За домаћи, пробајте да решите задатак и трећом сменом.

$\sqrt{1-2x-x^2} = tx \pm 1$

Због $1+\sqrt{1-2x-x^2}$ одлучујемо се за знак $-$, па је:

$\sqrt{1-2x-x^2} = tx-1$

$1-2x-x^2 = t^2x^2-2tx+1$

$-x(2+x) = -x(2t-t^2x)$

$x(1+t^2) = 2t-2$

$x = \frac{2t-2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2(1+t^2)-(2t-2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}dt$

$= \frac{-2t^2+4t+2}{\ldots}dt$

22

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{\frac{2(-t^2+2t+1)\,dt}{(1+t^2)^2}}{t\cdot\frac{2(t-1)}{t^2+1}} = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt$$

Напомена: Урадите за зешбу и смену

$\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$. Шта примећујете.

ПР3. $$\int \frac{dx}{2+\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

$a=-1$, $c=-3$ - па овде не можемо применити ни прву ни другу смену. Како је $-x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3)$, за $x\in[1,3]$ дефинисан је $\sqrt{-x^2+4x-3}$ и можемо применити трећу Ојлерову смену:

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = t\cdot(x-1) \quad /^2$$

$$-\cancel{(x-1)}(x-3) = t^2(x-1)^{\cancel{2}}$$

$$-x+3 = t^2x - t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2+3}{t^2+1},\quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}}{2+t\cdot\frac{2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{2(t^2+t+1)}{t^2+1}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+t+1)} = \dots$$

ПР4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, $a>0$, $c>0$ - дакле овде можемо применити све три Ојлерове смене.

За домаћи - решити задатак применом прве и друге смене. Како нас у подинтегралној функцији ништа не упућује

(23) На неку од Ојлерових смена као посебно погодну, овде ћемо задатак решити помоћу треће Ојлерове смене.

За $x>2$ узећемо смену (мора бити $x>2$ или $x<1$ због дефинисаности)

$$\sqrt{x^2-3x+2} = t\cdot(x-1) \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{t^2-1}, \quad dx = \frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\cdot\underbrace{\sqrt{x^2-3x+2}}_{t\cdot(x-1)}} = \int \frac{\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}}{\frac{t^2-2}{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{-1}{t^2-1}} = -2\int\frac{dt}{t^2-2} = \dots$$

БИНОМНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Користи се за решавање интеграла облика $\overbrace{\int x^m (a+bx^n)^p dx}^{(*)}$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Разликујемо 3 случаја у којима је могуће применом следећих смена инт. (*) свести на инт. рац. ф-је:

1) $p\in\mathbb{Z}$ (p је цео број)

Ако је $m=\frac{m_1}{m_2}$ и $n=\frac{n_1}{n_2}$ смена је $x=t^N$, $N=\text{НЗС}(m_2,n_2)$

2) $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$

смена $a+bx^n=t^{p_2}$ $\quad p_2=$ именилац од $p=\frac{p_1}{p_2}$

3) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$

Смена $a+\frac{b}{x^n}=t^{p_2}$ $\quad p_2=$ именилац од p

Пр1) $$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt{x})^2} = \int x^{1/2}(1+x^{1/2})^{-2}dx$$

$m=1/2$, $n=1/2$, $p=-2\in\mathbb{Z}$ па смену налазимо из првог случаја: $x=t^N$ $\quad N=\text{НЗС}(2,2)=2$, јер су имениоци и од m и од n у овом задатку једнаки 2

$x=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$

(24) $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt{x})^2} \overset{x=t^2}{=\!=} \int \frac{t^2\,dt}{(1+t)^2} = \int \frac{t^2+2t+1-2t-1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= \int\left(1 - \frac{2t+2-1}{(t+1)^2}\right)dt = \int\left(1 - \frac{2t+2}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= t - \ln(t+1)^2 - \frac{1}{t+1} + C \quad \text{за} \quad t=\sqrt{x}$$

Пр2 $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x\left(1+x^{2/3}\right)^{-1/2}dx$$

$m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, па проверавамо редом да ли можемо применити смену 2) или 3)

$$\frac{m+1}{n} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \in \mathbb{Z}$$

смена $1+x^{2/3}=t^2$ $\quad p=\frac{-1}{2}$, па је t^2 јер је 2 = именилац од p

Треба даље изразити x у функцији од t:

$$x^{2/3} = t^2-1 \Rightarrow x = (t^2-1)^{3/2}$$

$$dx = \frac{3}{2}(t^2-1)^{1/2}\cdot 2t\,dt = \underline{3t(t^2-1)^{1/2}}\,dt$$

Уколико су смена и све уз смену исправно израчунати, морамо добити рационалну ф-ју од t. Уколико остане неки ирационални израз, тражите грешку у рачуну!

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int \frac{(t^2-1)^{3/2}\cdot 3t(t^2-1)^{1/2}\,dt}{\sqrt{1+t^2-1}} = 3\int \frac{(t^2-1)^2\cdot \cancel{t}}{\cancel{t}}\,dt =$$

$$= 3\int (t^4-2t^2+1)\,dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C =$$

$$= \frac{3}{5}\left(1+x^{2/3}\right)^{5/2} - 2\cdot\left(1+x^{2/3}\right)^{3/2} + 3\cdot\left(1+x^{2/3}\right)^{1/2} + C$$

25

ПР3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6\cdot\sqrt{-x^2+1}} = \int x^{-6}\cdot(-x^2+1)^{-1/2}\,dx = I$

$m=-6,\ n=2,\ p=-1/2 \notin \mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n} = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$, па проверавамо да ли је $\frac{m+1}{n}+p \in \mathbb{Z}$. Како је $\frac{m+1}{n}+p=-3 \in \mathbb{Z}$, то задатак решавамо применом треће смене:

$$1-\frac{1}{x^2}=t^2,\ \text{тј.}\ x^{-2}=1-t^2$$
$$x=(1-t^2)^{-1/2},\quad dx=-\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2t)\,dt$$

$$I=\int (1-t^2)^3\cdot\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right)^{-1/2}\cdot(1-t^2)^{-3/2}\cdot t\,dt=$$
$$=\int (1-t^2)^{3/2}\cdot t\cdot\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)^{-1/2}dt=\int (1-t^2)^{3/2}\cdot t\cdot\frac{(1-t^2)^{1/2}}{t}\,dt$$
$$=\int (1-t^2)^2\,dt=\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+t+C \quad \text{за}$$
$$t=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}$$

За вежбу:

1. (кол.) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1+\sqrt{x^2-x+1}}$

2. (кол.) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{1+\cos^3 x}}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$

5. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}$

8. $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$