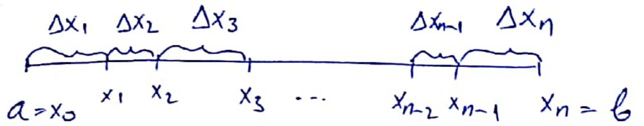
Одређени интеграл

У наредих пар часова упознаћемо са појмом, дефиницијом и основним особинама одређеног интеграла. Због специфичног начина извођења наставе у овим околностима, неке формалне дефиниције биће изостављене а неке „препричане" да би било разумљивије.

Посматрајмо затворен интервал $[a,b]$. Коначан скуп тачака $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ такав да је $a=x_0<x_1<x_2 \dots <x_n=b$ називамо подела интервала $[a,b]$.



Са Δx_i означимо

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i=1,\dots,n$$

Параметар поделе P означићемо са $\lambda(P)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$

У сваком подинтервалу $[x_{i-1},x_i]$ изаберимо по једну тачку и означимо је са c_i, $i=1,\dots,n$. Означимо $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ низ изабраних тачака. Тако добијамо поделу са истакнутим тачкама (P,c) интер. $[a,b]$.

Деф1 Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и нека је (P,c) подела са истакнутим тачкама интервала $[a,b]$. Збир

$$\sigma(f,P,c)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

назива се интегрална сума функције f за дату поделу (P,c).

Деф2: Кажемо да је I гранична вредност интегралне суме $\sigma(f,P,c)$ ф-је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ кад $\lambda(P)\to 0$ $\left(\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,c)=I\right)$ ако за свако $\varepsilon>0$, постоји $\delta>0$, такво да за сваку поделу са истакнутим тачкама (P,c) интервала $[a,b]$ важи

$$|\sigma(f,P,c)-I|<\varepsilon \quad \text{кад год је} \quad \lambda(P)<\delta.$$

Уколико $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,c)$ постоји и коначан је, онда кажемо да је ф-ја f интеграбилна у Римановом смислу на $[a,b]$, а број $I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,c)$ назива се Римановим интегралом(*) ф-је f на $[a,b]$ и записује се $I = \int_a^b f(x)dx$.

a и b – доња и горња граница интеграла

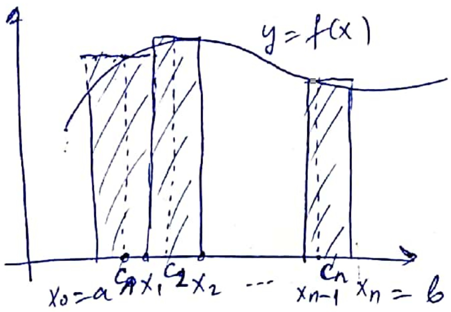
$f(x)$ – подинтегрална ф-ја или интегранд одређеног интеграла

Напомена 1. Приметите да је појам одређеног интеграла суштински различит од појма неодређеног интеграла (скуп примитивних функција)

Напомена 2. Често се у литератури уз дефиницију одређеног интеграла уводе и појмови доње и горње Дарбуове суме. Више о томе можда ћемо приказати у оквиру неког додатка на ову основну теорију – за студенте који желе да знају више у наредним недељама.

Пример 1. Површина криволинијског трапеза

У овом примеру показаћемо геометријски смисао интегралних сума.



Под криволинијским трапезом подразумева се фигура ограничена кривом $y=f(x)$, правама $x=a$, $x=b$ и x-осом, као на слици.

Направимо поделу (P,c) са истакнутим тачкама интерв. $[a,b]$.

$$\sigma(f,P,c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\cdot\Delta x_n$$

и видимо да инт. сума σ представља збир површина правоугаоника чије су основице Δx_i и $f(c_i)$.

На основу дефиниције Римановог интеграла и геометријске интерпретације интегралних сума видимо да $\int_a^b f(x)\,dx$ за непрекидну и ненегативну ф-ју $f(x)$ на $[a,b]$ геометријски представља површину криволинијског трапеза.

(*) Постоје и друге деф. интеграла, али их не помињемо у овом курсу

Деф3: За ф-ју $f(x)$ која има одређени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ у смислу деф2 кажемо да је интеграбилна на $[a,b]$.

У наставку ћемо, без извођења доказа, навести формулације неколико теорема које говоре под којим условима је ф-ја интеграбилна.

T_1 Потребан услов да ф-ја буде интеграбилна на $[a,b]$ јесте да буде ограничена на $[a,b]$.

Претходна теорема тврди да је интеграбилна ф-ја ограничена, као и да ф-ја која није ограничена на $[a,b]$ није ни интеграбилна на $[a,b]$. Међутим, постоје ограничене ф-је које нису интеграбилне, као на пример позната Дирихлеова ф-ја:

Пример 2: Ф-ја $f(x) = \begin{cases} 1, & x\in Q \\ 0, & x\notin Q \end{cases}$, Q - скуп рационалних бр.

је очигледно ограничена. Покажимо да није интеграбилна у смислу дефиниције 2 на $[a,b]$. Изаберимо 2 скупа истакнутих тачака $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ тако да $c_i\in Q$ за $i=1,\dots,n$ и скуп $c'=(c_1', c_2', \dots, c_n')$ тако да $c_i'\notin Q$, $i=1,\dots,n$. Добијамо:

$$\sigma(f,P,c) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1\cdot\Delta x_i = \Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n = b-a$$

$$\sigma(f,P,c') = \sum_{i=1}^n f(c_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0\cdot\Delta x_i = 0$$

Закључујемо да f није интеграбилна на $[a,b]$.

T_2 Ако је ф-ја f непрекидна на $[a,b]$, онда је и интеграбилна на $[a,b]$.

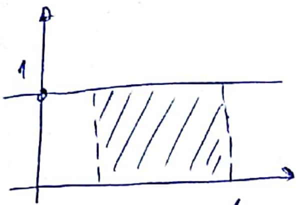
Важи и нешто општија теорема:

T_3 Ако је ф-ја f ограничена на $[a,b]$ и непрекидна у свим, осим евентуално у коначном броју тачака тог интервала, онда је f и интеграбилна на $[a,b]$.

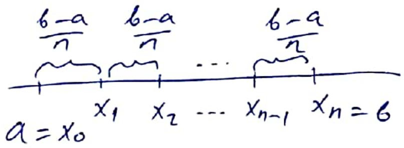
T_4 Монотона ф-ја f на $[a,b]$ је интеграбилна на $[a,b]$.

(41) У два наредна примера показаћемо израчунавање одређеног интеграла према дефиницији 2:

ПРИМЕР 3: Показати да је $\int_a^b dx = b-a$.



У овом случају подинтегрална ф-ја је $f(x)=1$, која је непрекидна према томе на основу T_2 можемо закључити да $\int_a^b dx$ постоји, па је довољно наћи $\sigma(f,P,c)$ за један низ подела коме дијаметар поделе тежи нули. Поделимо $[a,b]$ на n једнаких подинтервала: $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

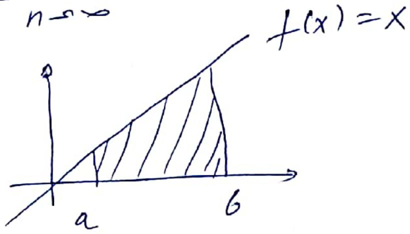


Како је за сваки избор $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ $f(c_i)=1$, важи:

$$\int_a^b dx = \int_a^b 1\cdot dx = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\cdot\Delta x_i = \lim \sum_{i=1}^n 1\cdot\frac{b-a}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\dots+\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{b-a}{n} = b-a$$

ПРИМЕР 4: $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$



$f(x)=x$ и непрекидна је па из разматрања као у Пр3.

бирамо поделу: $a=x_0$, $x_1 = a+\frac{b-a}{n}$, $x_2 = a+2\cdot\frac{b-a}{n}, \dots, x_i = a+i\cdot\frac{b-a}{n}$

и $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ $i=1,\dots,n$

и за c_i бирамо x_i, па је даље

$$\sigma(f,P,c) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(c_i)}_{c_i}\cdot\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right)\cdot\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\cdot\left(n\cdot a+\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^n i\right)$$

Како је $\sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, добијамо даље

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0}\left((b-a)\cdot a+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) = b\cdot a-a^2+\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$$

СВОЈСТВА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

T_5 Нека су f и g интеграбилне на $[a,b]$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада су и $f \pm g$ и $\alpha \cdot f$ интеграбилне на $[a,b]$ и важи:

1) $$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Докази следе из особина граничних вредности и следећег:

$$\sigma(\alpha f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \cdot \sigma(f, P, \xi)$$

$$\sigma(f \pm g, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \Delta x_i =$$
$$= \sigma(f, P, \xi) \pm \sigma(g, P, \xi)$$

T_6 Нека су f и g интеграбилне ф-је на $[a,b]$. Тада су и $f \cdot g$, $|f|$ интегр. на $[a,b]$, а уколико је $\frac{1}{g(x)}$ ограничена на $[a,b]$ онда је и $\frac{f}{g}$ интеграбилна на $[a,b]$. (без доказа)

T_7 Ако је f интеграбилна на $[a,c]$ и $[c,b]$ таквом да је $a < c < b$ тада је f интеграбилна и на $[a,b]$ и важи

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказ: Формирамо инт. суму $\sigma(f, P, \xi)$ такву да при подели интервала $[a,b]$ на подинтервале тачка ξ припадне рубу једног од тих подинтервала, рецимо $\xi = x_m$ за неко m. Тада је

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

и даље се доказ директно изводи применом деф. 2. ■

Доказ следеће T_8 остављамо за вежбу студентима (углавном је елементаран уз примену $T_5 - T_7$)

T8 Нека је ф-ја f интеграбилна на $[a,b]$. Тада:

1) Ф-ја $|f|$ је такође интеграбилна на $[a,b]$ и важи

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

2) Ако је f и ненегативна на $[a,b]$, тада $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

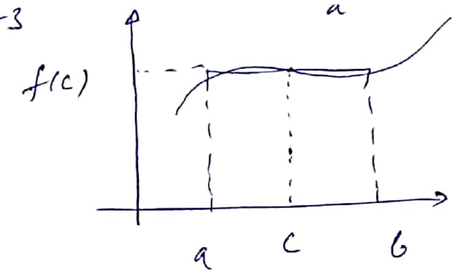
3) Ако је и g интеграбилна на $[a,b]$ и важи $f(x) \le g(x)$ за $x \in [a,b]$, тада је и $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Теореме о средњој вредности одређеног интеграла

T9 (Прва теорема о средњој вредности)

Ако је ф-ја $f(x)$ непрекидна на $[a,b]$, онда постоји $c \in [a,b]$ таква да важи $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Доказ



Ако је $f(x) = C$ доказ следи из T5 и примера 3.

Ако је $f(x) \ne const$ на $[a,b]$ тада f као непрекидна ф-ја достиже на $[a,b]$ минимум $m = f(c_1)$ и максимум $M = f(c_2)$ за неке две тачке $c_1, c_2 \in [a,b]$. Како је $m \le f(x) \le M$, из T8 (3) важи

$$\int_a^b m\cdot dx \le \int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b M\cdot dx, \text{ тј.}$$

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad /: b-a$$

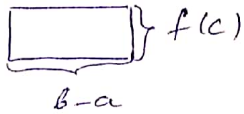
$$m = f(c_1) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M = f(c_2)$$

Како је $f(x)$ непрекидна на $[a,b]$, то она узима све вредности између $f(c_1)$ и $f(c_2)$, па постоји $c \in [c_1, c_2]$ ако је $c_1 \le c_2$ или $c \in [c_2, c_1]$ ако је $c_2 < c_1$ такво да је

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Геометријска интерпретација T_9:

Постоји $c \in [a, b]$ такво да је површина криволинијског трапеза = површини правоугаоника



T_9 је специјални случај општије теореме коју наводимо без доказа:

T_{10} (Друга теорема о средњој вредности)

Ако су ф-је $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне на $[a, b]$ и $g(x) \geq 0$ за $x \in [a, b]$ (или $g(x) \leq 0$ за $x \in [a, b]$). Тада постоји $c \in [a, b]$ такво да је

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

Веза између одређеног интеграла и извода

T_{11} Ако је ф-ја f непрекидна на $[a, b]$, тада је ф-ја $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in [a, b]$ примитивна ф-ја за ф-ју $f(x)$.

Доказ: Најпре приметимо да како је f непрекидна, то је на основу T_2 и интеграбилна, па је $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ деф. за свако $x \in [a, b]$. Даље је за $x, x+\Delta x \in [a, b]$, $\Delta x \neq 0$:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt}{\Delta x} =$$

$$\overset{T_9}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot (x + \Delta x - x)}{\Delta x} = f(x)$$

за неко $c \in [x, x+\Delta x]$, па кад $\Delta x \to 0$, $c \to x$ + f непр.

Сада смо стигли до познате Њутн-Лајбницове формуле која нам служи за израчунавање одређеног интеграла јер смо уводели из Примера 3 и Примера 4 да израчунавање по дефиницији баш и није згодно.

T_{12} (Њутн-Лајбницова формула)

Нека је f непр. на $[a,b]$ и нека је $F(x)$ њена примитивна ф-ја, тј. $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$. Тада важи:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказ: Нека је $F(x)$ прим. ф-ја за f на $[a,b]$. Према T_{11} знамо да је и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ такође једна примитивна ф-ја за f на $[a,b]$. Сетимо се да се две примитивне ф-је за исту ф-ју разликују за константу C, па је

$$\Phi(x) - F(x) = C, \text{ тј. } \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \quad \text{за } x \in [a,b]$$

Заменимо $x = a$: $0 = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$

Заменимо $x = b$: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$ ∎

Скраћено записујемо $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Пример 5: а) $\int_1^2 x^5 dx$ б) $\int_0^1 e^x dx$ в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

а) $\int_1^2 x^5 dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_1^2 = \frac{1}{6}(2^6 - 1^6) = \frac{1}{6}(64-1) = \frac{21}{2}$

б) $\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

Задаци за вежбу:

1. По дефиницији израчунати $\int_0^1 e^x\,dx$

помоћ: $x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n},\ \dots,\ x_n=1,\ \Delta x=\frac{1}{n}$ и одаберите за c_i леве крајеве подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$.

2. По дефиницији израчунати $\int_0^b x^2\,dx$, $b>0$.

помоћ: Изаберите поделу као у 1. зад. али за c_i узмите десне крајеве подинтервала и подсетите се чему је једнака сума $1^2+2^2+\dots+n^2$.

3. Применом Њутн-Лајбницове формуле израчунати:

а) $\int_{-1}^{1} x\,dx$ б) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ в) $\int_{-1}^{1} |1-x|\,dx$

Уочене грешке у материјалу:

1. стр. 17 уместо $\frac{9}{4}\int\frac{4t-1+1-\frac{4}{6}}{2t^2-t+1}dt$ треба $\frac{9}{4}\int\frac{4t-1+1+\frac{2}{3}}{2t^2-t+1}$ и на даље се због тога мало мењају бројеви

2. стр 25 пр3: Уместо $1-\frac{1}{x^2}=t^2$ треба да пише $t^2=\frac{1}{x^2}-1$ због $|x|<1$

3. предавање 3 – решења задатака за вежбу – у последњем реду другог задатка недостаје двојка – треба да пише $2\cdot\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{6}}$