Предавање 6

Методе израчунавања одређеног интеграла

Видели смо на крају прошлог предавања да се при израчунавању одређеног интеграла користи неодређени интеграл, па се могу користити и методе које смо проучавали за израчунавање неодређеног интеграла.

Т1 (смена код одр. интеграла) Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна функција и $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ непрекидна и има непрекидан први извод на $[\alpha,\beta]$ и ако је $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$ тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt.$$

Доказ: Нека је $F(x)$ примитивна ф-ја за ф-ју $f(x)$ на $[a,b]$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Како је $(F\circ g)'(t)=\big(F(g(t))\big)'=F'(g(t))\cdot g'(t)=f(g(t))\cdot g'(t)$

за $\alpha\le t\le\beta$, то је $F(g(t))$ примитивна ф-ја за $f(g(t))\cdot g'(t)$

и према Њутн-Лајбницовој формули је:

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = F(g(t))\Big|_\alpha^\beta = F(g(\beta))-F(g(\alpha)) =$$
$$= F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Пример 1. Израчунати $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$

Уведимо смену $t=\arcsin\sqrt{x}$ и заменимо границе по x, да бисмо добили границе по t:

$x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{3}{4} \Rightarrow t = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\int_{1/4}^{3/4} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 2t\,dt = 2\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} = \frac{3\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12}$$

Обратите пажњу: Код одређеног интеграла, када смену уврстимо у границе одређеног интеграла, нема „враћања смене" као код неодређеног интеграла.

ПР2. а) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ б) $\int_{-9}^{-4} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

а) $$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x},\ x = t^2,\ dx = 2t\,dt \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \\ x = 9 \Rightarrow t = 3 \end{bmatrix} = \int_2^3 \frac{2t\,dt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{t-1+1}{t-1}\,dt =$$

$$= 2\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 2\left(t + \ln|t-1|\right)\Big|_2^3 = 2(3 + \ln 2 - 2 + \ln 1)$$
$$= 2(1+\ln 2)$$

Питање: може ли се користити смена $t = -\sqrt{x}$? Проверити резултат ако може.

б) Подинтегрална ф-ја $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ овде није дефинисана на интервалу интеграције (деф. за $x \geq 0$, $x \neq 1$), па овај интеграл не постоји.

За вежбу: $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$, $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$, $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$,

$\int_1^2 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$, $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

T_2 (МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ)

Нека су $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ и $v'(x)$ непрекидне функције на $[a,b]$.
Тада је

$$\int_a^b u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot du(x). \qquad (*)$$

Доказ: Како је $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, то по Њутн-Лајбницовој формули добијамо:

$$\int_a^b (u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x))\,dx = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b,$$ па је

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b (u'(x)\cdot v(x))\,dx,$$ односно $(*)$

ПРИМЕР 3: $$\int_1^2 \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u(x)=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx \\ v=\int dx = x & \end{bmatrix} =$$

$$= x\cdot\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\cdot\ln 2 - 1\ln 1 - x\Big|_1^2 =$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

Следеће својство интеграције парних, односно непарних, функција на симетричном интервалу $[-a,a]$ у односу на нулу често се може искористити за брже решавање одр. инт.:

- $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx$ ако је f парна ф-ја, тј. $f(-x)=f(x)$;

- $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ако је f непарна ф-ја, тј. $f(-x)=-f(x)$.

Доказ – покушајте за вежбу

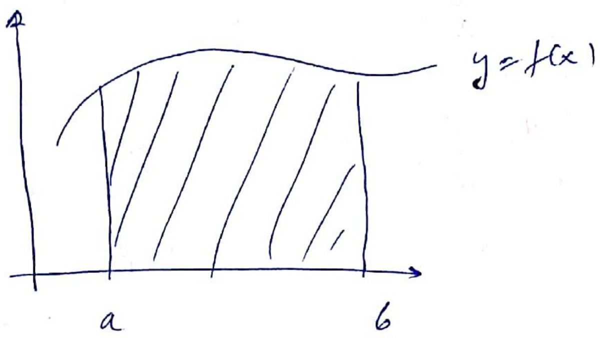
пр4. $\int_{-2}^{2} \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx = 0$ $\quad f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ је непарна! Проверите!

ПРИМЕНА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

С обзиром на начин извођења предавања ове године, причу о примени одређеног интеграла покушаћемо да интуитивно објаснимо, формално математички изведемо неке делове, а неке ћемо и изоставити, као основни појам — када је нека фигура мерљива.

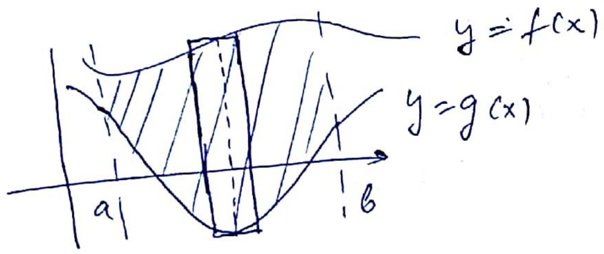
1. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНЕ РАВНОГ ЛИКА

Донекле смо се овом темом бавили и кроз саму деф. одређеног интеграла — видели смо да је геометријска интерпретација одређеног интеграла површина криволинијског трапеза



$$P_{\square} = \int_a^b f(x)\,dx \quad (*)$$

Посматрајмо сад површину области у равни која се налази између две криве (прет. $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$)



На потпуно исти начин као код одређивања површине криволинијског трапеза, делећи $[a,b]$ на подинтервале $(\mathcal{P}, c)$ и избором истакнутих тачака видимо да ће овде правоугаоници имати основицу Δx_i, а висину $f(c_i) - g(c_i)$, па ће површина бити:

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(f(c_i) - g(c_i)\right) \cdot \Delta x_i = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx \quad (**)$$

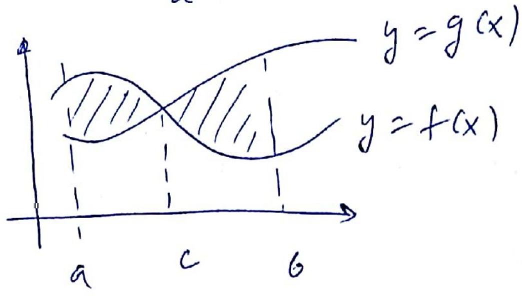
НАПОМЕНЕ:

1. Уколико у (**) заменим $g(x)=0$ и претпоставимо да је $f(x)=0$ из (**) добијамо (*).

2. Уколико је $f(x)=0$, $x\in[a,b]$ онда из услова $f(x)\geq g(x)$ за $x\in[a,b]$ добијамо да је $g(x)\leq 0$ за $x\in[a,b]$ и из (**) добијамо да се одговарајућа површина израчунава као

$$P=-\int_a^b g(x)\,dx$$

3.



У овом сл. површина је:

$$P=\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx+\int_c^b (g(x)-f(x))\,dx$$

или $$P=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

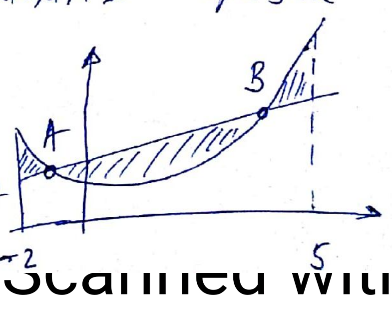
ПР1. Одредити површину равне фигуре ограничене графиком функције $f(x)=\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$ за $x\in[\frac{1}{e},1]$.

$f(x)\geq 0$, $x\in[\frac{1}{e},1]$, па је $P=\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx=$

$$=\int_{1/e}^{1}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx=\left[\begin{array}{ll} t=1+\ln x & ,\ x=1/e \Rightarrow t=0 \\ dt=\frac{1}{x}dx & ,\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^1 \sqrt{t}\,dt=\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

ПР2. Одредити површину одређену графицима кривих $y=2x^2+10$, $y=4x+16$, $x=-2$ и $x=5$.



У питању су парабола и права које се секу у A и B

Најпре одредимо тачке A и B, у њима је $2x^2+10 = 4x+16$

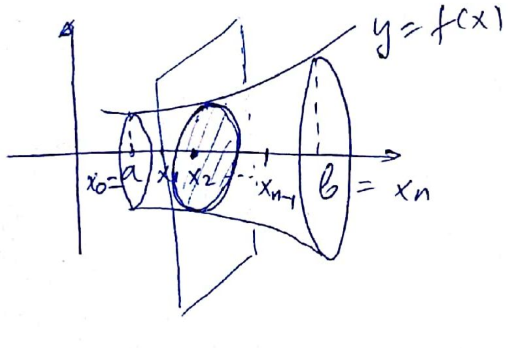
$$2x^2-4x-6=0 \Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=3$$

$$P = \underbrace{\int_{-2}^{-1}\left(2x^2+10-(4x+16)\right)dx}_{\text{од } -2 \text{ до } -1 \text{ парабола је изнад праве}} + \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(4x+16-(2x^2+10)\right)dx}_{\text{између } A \text{ и } B \text{ права је изнад параболе}} + \int_{3}^{5}\left(2x^2+10-(4x+16)\right)dx = \frac{142}{3}$$

За вежбу:

1. Израчунати површину елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (реш. $ab\pi$)
2. Израчунати површину равне фигуре ограничене параболом $y=2x-x^2$ и правом $x+y=0$.
3. Израчунати површину равне фигуре ограничене параболама $y^2=4x$ и $x^2=4y$.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ЗАПРЕМИНЕ РОТАЦИОНИХ ТЕЛА



Посматрамо непрекидну ф-ју $y=f(x)$ на $[a,b]$. Обртањем око x-осе крива $y=f(x)$ описује површ која са равнима $x=a$ и $x=b$ ограничава тело запремине V (ротационо тело)

Ротационо тело може настати ротацијом око праве у општем положају, али у овом курсу посматраћемо само ротације око једне од координатних оса

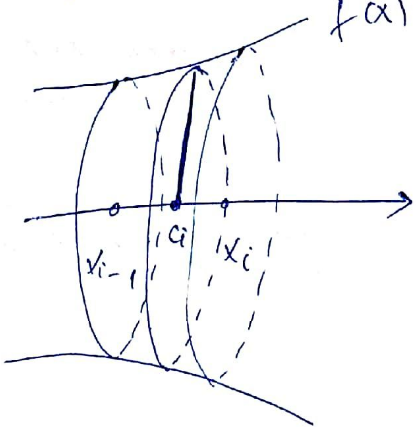
Као и код површине крив. трапеза, поделимо $[a,b]$:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$

и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ је дужина i-тог подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$

Замислимо у свакој од тачака x_i раван нормалну на x осу (на слици је раван кроз x_2).

Запремина тела једнака је збиру запремина делова тела који се налазе између равни у тачкама x_i. Ако даље у сваком $[x_{i-1}, x_i]$ изаберемо тачку c_i онда се запремине делова тела могу апроксимирати запремином ваљка основе $B(c_i)$ и висине Δx_i



$V_i = B(c_i) \cdot \Delta x_i$, а

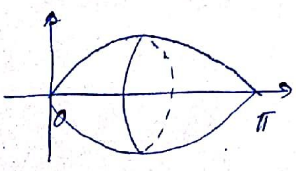
$B(c_i)$ је круг полупречника $f(c_i)$, па је $B(c_i) = (f(c_i))^2 \pi$

$$V = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} B(c_i) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f^2(c_i) \cdot \pi \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda(P) \to 0} \pi \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i) \cdot \Delta x_i}_{\sigma(f^2, P, c) \text{ - претходно предавање}} =$$

$$= \pi \int_a^b f^2(x)\, dx .$$

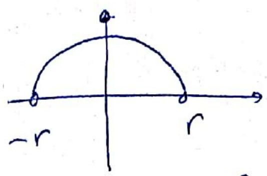
ПР3. Наћи запремину тела које настаје обртањем око x осе дела синусоиде $y = \sin x$ за $x \in [0, \pi]$.



$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

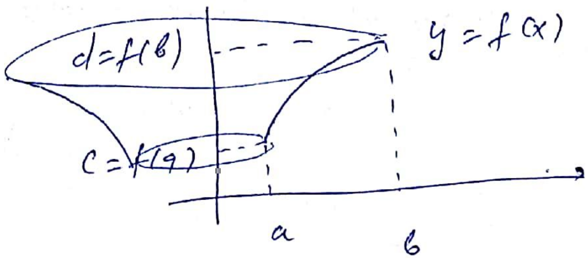
ПР4. Одредити запремину лопте полупречника r.



Посматрамо полукруг $y=\sqrt{r^2-x^2}$ чијом ротацијом око x осе настаје лопта полупречника r.

$$V=\pi\int_{-r}^{r} y^2(x)\,dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\cdot\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r}=\frac{4}{3}r^3\pi.$$

Уколико посматрамо ротацију око y осе, потребно је да функцију напишемо у облику $x=x(y)$ и посматрамо границе по y оси:

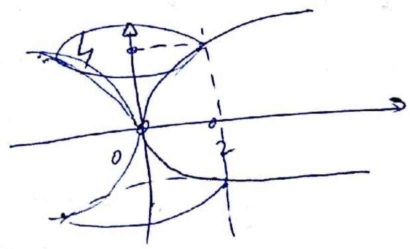


$y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$

$$V=\pi\int_{c}^{d} g^2(y)\,dy \quad \text{или}$$

$$V=\pi\cdot 2\int_{a}^{b}|x|\cdot f(x)\,dx \quad \text{(без извођења)}$$

ПР5. Одредити запремину тела које настаје ротацијом криве $y^2=8x$ за $x\in[0,2]$ око y осе



$$\frac{V}{2}=2\pi\cdot\int_0^2|x|\cdot\sqrt{8x}\,dx=$$

$$=2\pi\cdot\sqrt{8}\int_0^2 x\cdot\sqrt{x}\,dx=4\pi\sqrt{2}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{64\pi}{5}\Rightarrow V=\frac{128}{5}\cdot\pi$$

II начин $V=\pi\int_c^d g^2(y)\,dy$

$y^2=8x \Rightarrow x=\frac{y^2}{8}$

$x\in[0,2]$ $\quad y\in[0,4]$

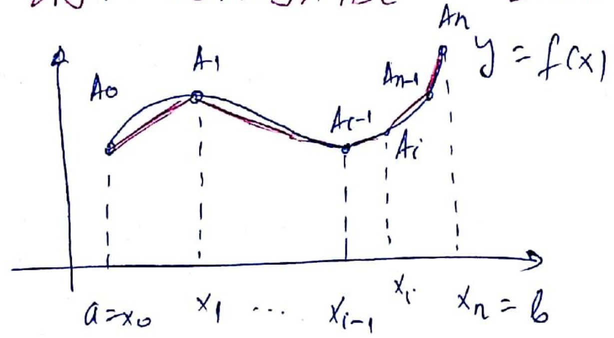
$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^4\frac{y^4}{8^2}\,dy=\frac{64\pi}{5}\Rightarrow V=\frac{128\pi}{5}$$

ЗА ВЕЖБУ:

4. Одредити запремину тела које настаје ротацијом криве $y = \arcsin x$ око x осе. (сами одредите границе)

5. Одредити запремину тела које настаје обртањем око y осе фигуре ограничене параболама $y^2 = 8x$ и $x^2 = y$.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ДУЖИНЕ ЛУКА КРИВЕ У РАВНИ



Нека крива l у xOy равни представља график функције $f(x)$, $x \in [a, b]$ и нека је f непр. и диференц., и f' непрекидна.

Посматрамо поделу $\mathcal{P} = (\overset{a}{\overset{\parallel}{x_0}}, x_1, \dots, \overset{b}{\overset{\parallel}{x_n}})$ и конструишимо полигоналну линију са теменима $A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)), \dots, A_n(x_n, f(x_n))$.

Дужина те полигоналне линије једнака је:

$$s(A_0 A_1 \dots A_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Интуитивно је јасно да уколико поделу лука на делове правимо тако да посматрани сегменти буду све мањи, апроксимација дужине лука дужином полигоналне линије биће све прецизнија и са мањом грешком ...

Посматрамо сада одсечак $[x_{i-1}, x_i]$: на њему је f непр. и дифер. и испуњени су услови за примену Лагранжове теореме: постоје тачке $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ такве да је

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$$

$$\Rightarrow f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$ па је

$$s(A_0A_1\dots A_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i)(x_i - x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \cdot (1 + f'(c_i)^2)} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

А претходни израз представља интегралну суму за функцију $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ на $[a,b]$ при подели $\mathcal{P}$ са истакнутим тачкама c.

Ако сада посматрамо $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}$ претходне суме добијамо

$$s(\ell) = \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'(c_i)}\,(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

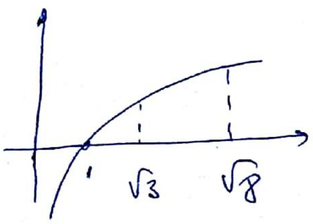
и претходна формула користиће нам за изр. дужине лука криве.

Уколико је крива задата параметарски са $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$

тада се њена дужина лука може изр. као

$$s(\ell) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

ПР 6. Нађи дужину лука криве одређене са $y = \ln x, \ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$



$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

Како је f непр. и диф., f' непр. то је

$$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\underbrace{x}_{|x|=x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x^2+1} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2 \\ x = \sqrt{8} \Rightarrow t = 3 \end{bmatrix}$$

јер $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

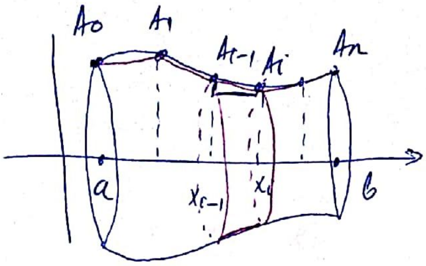
$$s = \int_2^3 t \frac{t\,dt}{t^2 - 1} = \int_2^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1}\,dt = \left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

ЗА ВЕЖБУ:

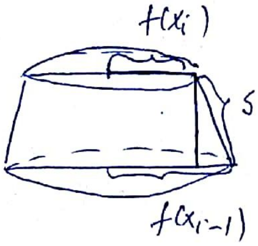
6. Одредити дужину лука криве одређене са:

а) $y = \arcsin e^{-x}, \ x \in [0, 1]$ б) $y = \ln(\cos x), \ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

ПОВРШИНА РОТАЦИОНОГ ТЕЛА



Слично као код одређивања запремине ротационог тела, код проблема одређивања површине омотача ротационог тела апроксимираћемо тело помоћу зарубљених купа полупречника основа $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ и изводнице



$$s=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

Омотач зарубљене купе израчунава се по формули $M=\pi(r_1+r_2)\cdot s$, па омотач ротационог тела добијамо као збир омотача зарубљених купа:

$$M(T)=\sum_{i=1}^{n}\pi\cdot(f(x_{i-1})+f(x_i))\cdot\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

Даље, као код израчунавања дужине лука на $f(x_i)-f(x_{i-1})$ применимо Лагранжову теор. $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(c_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$.

Потребна нам је и следећа особина непр. ф-је: постоји $d_i\in[x_{i-1},x_i]$ тако да је $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}=f(d_i)$. Добијамо

$$M(T)=2\pi\cdot\sum_{i=1}^{n}f(d_i)\cdot\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot\Delta x_i$$

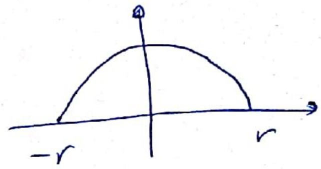
Када дужине подсегмената $\Delta x_i\to 0$ тачке d_i и c_i мало се разликују и можемо узети да је $d_i\approx c_i$, па је

$$M(T)=2\pi\cdot\sum f(c_i)\cdot\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\cdot\Delta x_i\xrightarrow{\lambda(P)\to 0}2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$M(T)=2\pi\int_a^b\underbrace{|f(x)|}_{\text{у случају да је } f \text{ негативна на } [a,b]}\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

ПР7. Одредити површину лопте полупречника r.

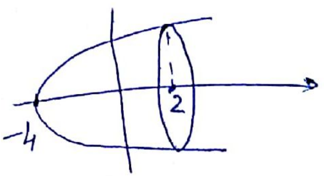
$f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$



$$P = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 2\pi r \cdot x \Big|_{-r}^{r} = 4r^2\pi$$

ПР8. Одредити површину тела које настаје ротацијом параболе $y^2 = 4 + x$ око x осе од темена до $x = 2$.



$P(T) = M(T) + B(T)$

$B(T)$ је база, а овде је то круг са полупречником $y = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$, дакле

$$B = \sqrt{6}^2 \cdot \pi = 6\pi$$

$M(T) = 2\pi \int_{-4}^{2} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, а $f(x) = \sqrt{4+x}$, па је

$$M(T) = 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{4+x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{4+x}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{4+x} \cdot \sqrt{\frac{4x+17}{4(4+x)}}\, dx = \pi \cdot \int_{-4}^{2} \sqrt{4x+17}\, dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+17)^{3/2}}{3/2} \Big|_{-4}^{2} = \frac{62}{3}\pi$$

$$P(T) = B(T) + M(T) = 6\pi + \frac{62}{3}\pi = \frac{80\pi}{3}$$

За вежбу: 7. Одредити $P(T)$ ако тело настаје ротацијом дела криве $y = \cos x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.