НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

До сада смо у свим примерима, деф. и теоремама посматрали одређене интеграле на ограниченим интервалима. Такође смо се бавили само ограниченим подинтегралним функцијама. У делу који нам остаје да заокружимо причу о одређеним интегралима, размотрићемо уопштење одређеног интеграла које се односи на ситуације када је услов ограничености било функције, било интервала интеграције, нарушен.

Најпре ћемо се бавити појмом одређеног интеграла на неограниченом интервалу интеграције или несвојственим интегралом прве врсте.

Деф: Нека је ф-ја $f(x)$ дефинисана за $x \geq a$ и интеграбилна на сваком коначном затвореном интервалу $[a,b]$. Нека је $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ за $b \geq a$. Ако ф-ја $\Phi(b)$ има коначну граничну вредност B кад $b \to +\infty$, онда кажемо да несвојствени интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ конвергира, и пишемо:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = B.$$

Ако ф-ја $\Phi(b)$ нема гр. вредност кад $b \to +\infty$ или је та гр. вр. бесконачна, кажемо да $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ дивергира.

Слично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

, при чему је c неки реалан број

Пр. а) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-b} + e^{0} \right) = 1$$

Дакле интеграл конвергира

б) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)$$

$$=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

Приметимо да је у оба случаја важило да подинтегрална ф-ја тежи 0 кад $x\to+\infty$, међутим у следећем примеру видећемо да при истим претпоставкама несв. инт. може и да дивергира.

в) $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty$$

За вежбу 1. Испитати конверг. несвојственог инт. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ у зависности од $\alpha\in\mathbb{R}$. (рез. за $\alpha\leq 1$ див., за $\alpha>1$ конв.)

Други тип несвојствених интеграла јесу неограничене функције на интервалу интеграције, зовемо их и несв. интеграли друге врсте.

Деф. Нека је $f(x)$ интеграбилна ф-ја на $[a,b-\varepsilon]$ за сваки позитиван број ε мањи од $b-a$ и неограничена на сваком интервалу облика $[b-\varepsilon,b]$. Посматрамо ф-ју $\Phi(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$. Ако ф-ја $\Phi(\varepsilon)$ има гр. вредност E кад $\varepsilon\to0^+$ онда кажемо да несвојствени инт. $\int_a^b f(x)dx$ конвергира и пишемо

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=E$$

Уколико $\Phi(\varepsilon)$ нема гр. вр. кад $\varepsilon\to0^+$ или тежи ка бесконачности, кажемо да $\int_a^b f(x)dx$ дивергира

Слично ако је f неограничена на $(a,a+\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,b-a)$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

И на крају, уколико је $f(x)$ неограничена у околини тачке $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ПР2. Испитати конвергенцију несв. инт. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Приметимо да се проблем јавља у $a=0$ јер је у тој тачки подинт. ф-ја недефинисана и важи $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = \infty$.

за $\alpha \neq 1$: $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{-\alpha+1}\right) = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases}$$

за $\alpha = 1$: $$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln x\Big|_\varepsilon^1\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty$$

Дакле, интеграл конвергира за $\alpha < 1$ и диверг. за $\alpha \geq 1$.

ПР3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

Подинтегрална ф-ја је парна, па је $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = 2\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ и применом претходног примера закљ. да $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ дивергира ($\alpha = 2 \geq 1$).

Међутим, да нисмо приметили да је у 0 „проблем" и да смо аутоматски применили Њутн-Лајбницову ф-лу, добили бисмо

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^1 = -2$, што наравно није тачно

Гама функција

Деф: Функцију $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ задату са $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt,\ x > 0$ зовемо Гама функција.

Дефинисана је као несвојствени параметарски интеграл (није огр. у околини $t=0$ и $t=+\infty$) (x фигурише као параметар)

Гама функција има бројне примене – у теорији бројева, посебно у проучавању простих бројева, у теорији вероватноће, ... Ми ћемо извести и користити неке основне особине Γ функције.

Најпре израчунајмо $\Gamma(1)$.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} \cdot e^{-t}\,dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-t}\,dt \overset{\text{ПР1 а)}}{=} 1$$

Особине Гама функције:

1. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ за $x \in \mathbb{R}_+$

Ова особина може се доказати применом парцијалне интегр. и Лопиталовог правила, али овде тај доказ прескачемо.

2. Приметимо да уколико је $x \in n \in \mathbb{N}$ важи

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \Gamma(n-2) = \dots$$
$$= (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!$$

Из ове особине дакле видимо да гама функцију можемо сматрати проширењем факторијела за позитивне реалне бројеве.

3. $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (без доказа)

Применом особине 3 можемо лако израчунати $\Gamma(\frac{1}{2})$:

у 3. заменимо $x = \frac{1}{2}$: $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

ПР4. Одредити $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{\pi}$$

ПР5 (испитни)

$$\int_0^{+\infty} x^4\cdot e^{-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\overset{x-1}{3/2}}\cdot e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \overset{\text{ПР4}}{=} \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$$

$$x-1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

ПР6. (испитни)

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{3/2}}{x^3}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x} \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{3/2}\cdot e^{-2t}\cdot dt = \begin{bmatrix} z = 2t \\ dz = 2dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{z^{3/2}}{2^{3/2}}\cdot e^{-z}\cdot dz =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{16\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{2}}{32}\cdot\sqrt{\pi}$$

БЕТА ФУНКЦИЈА

Деф: Функцију $B:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ задату формулом

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\,dt$$

зовемо бета функција.

ОСОБИНЕ БЕТА ФУНКЦИЈЕ:

1. $B(x,y) = B(y,x)$
2. $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
3. $B(x,1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x}$, $x\in(0,1)$
4. $B(x,y) = \dfrac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$, $y>1$
5. $B(x,y) = \dfrac{x-1}{x+y-1}B(x-1,y)$, $x>1$

ПР7. $$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ x = \sqrt{t},\ dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}t\,t^{-1/2}\,dt}{\sqrt[3]{1-t}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/2}\cdot(1-t)^{-\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2} = x-1 \qquad -\frac{1}{3} = y-1$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{2}{3}$$

ПР8. (испити)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10}x\cdot\underbrace{\cos^{10}x\,dx}_{\cos^9 x\,\cdot\,\cos x\,dx} = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int_0^1 \underbrace{t^{10}}_{t^9\cdot t\,dt}\cdot(1-t^2)^{\frac{9}{2}}\cdot dt = \left[\begin{array}{l} z = t^2 \\ dz = 2t\,dt \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 z^{9/2}\cdot(1-z)^{9/2}\cdot dz = \frac{1}{2}B\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right) \overset{\text{ос. 2.}}{=} \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma(11)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{10!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot 1}{2^5}\cdot\pi}{10\cdot\cancel{9}\cdot 8\cdot\cancel{7}\cdot 6\cdot\cancel{5}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{\pi}{2^6\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}$$

НАПОМЕНА: Задатак се може решити и без примене бета функције, саветујем да покушате да бисте увидели предност примене B.

ПР9. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^3}\,dx$$ (напомена као у ПР8. и овде стоји)

смена $t = \dfrac{1}{1+x^4}$, $1+x^4 = t^{-1}$, $x = (t^{-1}-1)^{1/4}$, $dx = \dfrac{-(t^{-1}-1)^{-3/4}dt}{4t^2}$

$$= \int_1^0 (t^{-1}-1)^{1/2}\cdot t^3\cdot\frac{-(t^{-1}-1)^{-3/4}}{4t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t\cdot(t^{-1}-1)^{-1/4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 t\cdot\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-1/4}dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{5/4}\cdot(1-t)^{-1/4}\,dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{8}$$