2.7. ИНТЕГРАЦИОНИ ФАКТОР

Поставља се питање како да поступимо са једначином

$$\star \qquad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

у случају да је $P'_y \neq Q'_x$.

Сваки пут до сад смо решавање једначине сводили на претходно решен тип једначине. Можемо ли то и сад? Можемо ли једначину $\star$ да помножимо функцијом $\mu = \mu(x,y)$ тако да једначина постане облика 2.6 (ЈТД)?

Ако таква ф-ја постоји, за њу кажемо да је <u>интеграциони фактор једначине $\star$</u>.

Шта μ мора да задовољава да би била ИФ?

Желимо да $P\cdot\mu\,dx + Q\cdot\mu\,dy = 0$

постане ЈТД. ~~Ако~~ Дакле, мора бити

$$(1) \qquad (P\mu)'_y = (Q\cdot\mu)'_x$$

Из (1) добијамо

(2) $P'_y \mu + P\cdot \mu'_y = Q'_x \mu + Q \cdot \mu'_x$

Да подсетимо, P и Q су дате (познате) ф-је, μ је непозната (тражена) ф-ја. С обзиром да се јављају парцијални изводи непознате ф-је μ, једнакост (2) заправо представља парцијалну диференцијалну једначину, која је већи проблем од почетне једначине $\star$. Међутим, под неким специјалним околностима једначина (2) се своди на знатно једноставнију једначину. Ми ћемо радити под тим условима!

Ако се зна да је $\mu = \mu(t)$ непозната ф-ја ~~при чему је t дата (позната~~ једне променљиве, при чему је t дата (позната) ф-ја две променљиве ($t = t(x,y)$), онда

из (2) и $\mu'_y = \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial y} = \mu'_t t'_y$

из (2) и $\mu'_y = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\mu}{dt} \cdot t'_y$

и (слично) $\mu'_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\mu}{dt} \cdot t'_x$

следи $\quad P'_y \mu + P \cdot \frac{d\mu}{dt} t'_y = Q'_x \mu + Q \frac{d\mu}{dt} \cdot t'_x$

(3) $\quad \left(P \cdot t'_y - Q t'_x\right) \frac{d\mu}{dt} = -\left(P'_y - Q'_x\right) \mu$

(4) $\quad \frac{d\mu}{\mu} = - \frac{P'_y - Q'_x}{P t'_y - Q t'_x} \, dt$

* $\mu = 0$ нас не интересуј!

Овде треба напоменути да ако би било $P \cdot t'_y = Q t'_x$ (па не би био дефинисан разломак у (4)), онда би из (3) следило и да је $(P'_y - Q'_x)\mu = 0$, а како је $\mu \neq 0$, онда би било и $P'_y = Q'_x$, а ми радимо баш супротан случај! Дакле, мора бити $P \cdot t'_y - Q' t_x \neq 0$ и дефинисан је разломак у (4).

Лева страна једнакости (4) је израз у коме се појављује само μ. Подсетимо се да је $t = t(x,y)$ дата унапред (или изабрана) ф-ја.
Ако би десна страна једнакости (4) била израз у коме се јавља искључиво t, онда би (4) била Ј.К.Р.П (једначина типа 2.1).
У супротном, t није добро изабрано (дато).
Дакле, услов да је t добро изабрано је да разломак $-\dfrac{P'_y - Q'_x}{P\cdot t'_y - Q\cdot t'_x}$ може да се изрази у функцији променљиве t.

услов: $\lambda(t) = -\dfrac{P'_y - Q'_x}{P\cdot t'_y - Q\cdot t'_x}$

Тад (4) постаје једначина

(5) $$\frac{d\mu}{\mu} = \lambda(t)\,dt.$$

Решење је $$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \lambda(t)\,dt$$

$$\ln|\mu| = c_1 + \int \lambda(t)\,dt \Rightarrow \mu = c \cdot e^{\int \lambda(t)\,dt}$$ О.Р.

Ово су сва решења једначине (5), али, сетимо се, ми једначину ☆ желимо да помножимо једном функцијом μ, па нам не требају сва решења једначине (5) већ само једно.

Зато C из О.Р. једначине (5) можемо да биремо слободно до на услов $C \neq 0$.

Ако изаберемо $c = 1$, тада добијамо

$$(6) \qquad \mu = e^{\int \lambda(t)\,dt}$$

Пример: $\left(y^2 - e^x \cos^2(xy^2)\right)dx + \left(2xy - \frac{2}{y}\cos^2(xy^2)\right)dy = 0$

Решити једначину, ако се зна да једначина има интеграциони фактор облика $\mu = \mu(t)$, за $t = x \cdot y^2$.

Решење: $P = y^2 - e^x \cos^2(xy^2)$ $\qquad Q = 2xy - \frac{2}{y}\cos^2(xy^2)$

$$P'_y = 2y - e^x\, 2\cos(xy^2) \cdot (-\sin(xy^2)) \cdot 2yx$$

$$Q'_x = 2y - \frac{2}{y}\, 2\cos(xy^2) \cdot (-\sin(xy^2)) \cdot y^2$$

$t = x \cdot y^2 \qquad t'_x = y^2 \qquad t'_y = 2xy$

$$\lambda(t) = -\frac{P'_y - Q'_x}{P \cdot t'_y - Q \cdot t'_x} \Rightarrow$$

$$\lambda(t) = -\frac{2y\left(1 + 2e^x x \cos(xy^2)\sin(xy^2)\right) - 2y\left(1 + 2\cos(xy^2)\sin(xy^2)\right)}{\left(y^2 - e^x \cos^2(xy^2)\right) \cdot 2xy - \left(2xy - \frac{2}{y}\cos^2(xy^2)\right) \cdot y^2}$$

$$\lambda(t) = -\frac{2y\left(xe^x - 1\right) 2\cos(xy^2)\sin(xy^2)}{2xy^3 - 2xye^x\cos^2(xy^2) - 2xy^3 + 2y\cos^2(xy^2)}$$

$$\lambda(t) = -\frac{4y\cos(xy^2)\sin(xy^2)\left(xe^x - 1\right)}{2y\cos^2(xy^2)\left(1 - xe^x\right)}$$

$$\lambda(t) = \frac{2\sin(xy^2)}{\cos(xy^2)} = \frac{2\sin t}{\cos t}$$

$$\int \lambda(t)\,dt = 2\int \frac{\sin t}{\cos t} = C - \ln\cos^2 t$$

ОВО БИРАМО (РЕЦИМО $C=0$)

$$\mu = e^{\int \lambda(t)\,dt} = e^{-\ln\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\cos^2(xy^2)}}$$

$$\left(y^2 - e^x\cos^2(xy^2)\right)dx + \left(2xy - \frac{2}{y}\cos^2(xy^2)\right)dy = 0 \quad \Big/ \frac{1}{\cos^2(xy^2)}$$

$$\left(\frac{y^2}{\cos^2(xy^2)} - e^x\right)dx + \left(\frac{2xy}{\cos^2(xy^2)} - \frac{2}{y}\right)dy = 0$$

$\vdots$ (ПРИМЕР СА 68. СТРАНЕ)

$$\boxed{\operatorname{tg}(xy^2) + \ln y^2 - e^x = C}$$

Најпростији случај је кад μ зависи само од једне променљиве ($t = x$ или $t = y$).

Пример: Једначина $\frac{1}{\cos y}dy + \left(x + e^{-\sin y}\right)dy = 0$ има интеграциони фактор $\mu = \mu(y)$. Решити је.

$P = \frac{1}{\cos y} \Rightarrow P'_y = \frac{\sin y}{\cos^2 y}$ | $Q = x + e^{-\sin y} \Rightarrow Q'_x = 1$

$t = y \Rightarrow t'_x = 0 \wedge t'_y = 1$

$$\lambda(t) = -\frac{P'_y - Q'_x}{P \cdot t'_y - Q \cdot t'_x}$$

$$\lambda(y) = -\frac{\frac{\sin y}{\cos^2 y} - 1}{\frac{1}{\cos y}} = \cos y - \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$\int \lambda(y)\,dy = \sin y + \ln(\cos y)$$

$$\mu = e^{\int \lambda(y)\,dy} = e^{\sin y} \cdot \cos y$$

$$\frac{1}{\cos y}\,dx + \left(x + e^{-\sin y}\right)dy = 0 \;/\; e^{\sin y}\cos y$$

$$\underbrace{e^{\sin y}}_{P_1}\,dx + \left(\underbrace{x e^{\sin y}\cos y + \cos y}_{Q_1}\right)dy = 0$$

$$\boxed{u = \int P_1\,dx = e^{\sin y}\int dx = x e^{\sin y} + \varphi(y)}$$

$$Q_1 = u'_y \Rightarrow x e^{\sin y}\cos y + \cos y = \left(x e^{\sin y} + \varphi(y)\right)'$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \cos y \Rightarrow \varphi(y) = \sin y$$

$$u = x e^{\sin y} + \sin y$$

Опште решење једначине је

$$\boxed{c = x e^{\sin y} + \sin y}$$

Наравно, из формуле $\lambda(t) = - \dfrac{P'_y - Q'_x}{P \cdot t'_y - Q \cdot t'_x}$

се могу извести специјални случајеви $t = y$ и $t = x$. Рецимо, за $t = y$ ће бити $t'_y = 1$ и $t'_x = 0$, па ће бити

$$\lambda(y) = - \frac{P'_y - Q'_x}{P \cdot 1 - Q \cdot 0} = - \frac{P'_y - Q'_x}{P}$$

$$\boxed{\lambda(y) = \frac{Q'_x - P'_y}{P}}$$

. Нема потребе да памтимо ове додатне формуле.

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА

До сад смо се бавили једначинама у којима је из

(1) $F(x,y,y')=0$

могло изразити $y'=f(x,y)$. (2)

Сад ћемо се бавити једначинама које немају облик (2), али имају један од следећа два облика:

(3) $y = f(x,y')$ или

(4) $x = f(y,y')$.

Код таквих једначина може помоћи параметризација. То значи да ћемо промењиве x и y схватимо као функције које зависе од параметра. У општем случају се x и y могу изразити и преко два параметра, али ми ћемо се бавити само случајем кад x и y параметризујемо једним параметром. Не само то, него ћемо се бавити

следећим случајем када ћемо за параметар изабрати први извод тражене ф-је: $y'=p$

$y'=p$ повлачи да је $\frac{dy}{dx}=p$, а тиме је $dy = p\,dx$. Идеја је следећа: ~~Изразимо једначину преко параметра~~

1. Уведемо параметар у једначину.
2. Искористимо везу $dy = p\,dx$
3. Тражимо непознате $x=x(p)$ и $y=y(p)$
4. Ако је могуће елиминишемо параметар p из система $\begin{matrix} x=x(p) \\ y=y(p) \end{matrix}$, а ако то није могуће, остављамо решење у параметарском облику.

Напомена: За разлику од смене, која мора да се врати, параметризација не мора да се враћа.

Сад ћемо да прођемо кроз поступак и да урадимо пар примера:

Поступак за решење једначине (3) $y=f(x,y')$:

1. корак: ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА: $y'=p$ $\quad x=x(p)$, $y=y(p)$

Једначина (3) постаје:

$$(3') \quad y=f(x,p)$$

2. корак: Диференцирамо једнакост $(3')$.

Заправо $(3')$ нам каже да је $y=y(x,p)$ - функција две променљиве.

$$(3'') \quad dy = f'_x(x,p)\cdot dx + f'_p(x,p)\,dp$$

3. корак: Искористимо везу $dy=p\,dx$:

$$(3'') \Rightarrow p\,dx = f'_x(x,p)\,dx + f'_p(x,p)\,dp$$

$$(3''') \quad \left(p - f'_x(x,p)\right)dx = f'_p(x,p)\,dp$$

У једначини $(3''')$ учествују променљиве x и p. Како тачно изгледа једначина $(3''')$ и да ли је једна од оних којима смо се бавили у поглављу 2 (било да x доживимо као функцију а p као независну променљиву или да p доживимо као функцију а x као независну променљиву), зависи од тога каква је функција f. Ако може да се реши, постоје две могућности:

$$\boxed{x = x(p,c) \qquad \text{или} \qquad p = p(x,c).}$$

Решење једначине $(3''')$ вратимо у једнакост $(3')$:

$y = f(x,p) = f(x(p,c),p) = \varphi(p,c)$ у првом случају и тај систем

$$\begin{cases} x = x(p,c) \\ y = \varphi(p,c) \end{cases}$$ представља решење једначине (3) у параметарском облику.

У случају да је $p = p(x,c)$ решење једначине $(3'')$, онда из $(3')$ имамо

$$\boxed{y = f(x, p(x,c)) = \varphi(x,c)}$$

Пример: 1. $y = y'^2 \sin y'$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА: } \quad y' = p \\ y = p^2 \sin p \quad \Longrightarrow \end{array}}$$

$dy = d(p^2 \sin p)$

$dy = (2p \sin p + p^2 \cos p)\,dp$

$y' = p \Rightarrow dy = p\,dx \longrightarrow \quad p\,dx = (2p \sin p + p^2 \cos p)\,dp$

$dx = (2 \sin p + p \cos p)\,dp \quad \vee \quad p = 0$

$x = \int (2 \sin p + p \cos p)\,dp = c - \cos p + p \sin p$

$y = p^2 \sin p \quad \vee \quad y = 0^2 \sin 0 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = c - \cos p + p \sin p \\ y = p^2 \sin p \end{array}}$$

о.р.

$y = 0$

с.р.

2. $x = y' + \sin y'$

1. ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА! $y' = p$

$$x = p + \sin p$$

2. ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ: $dx = (1+\cos p)\,dp \quad / \, p$

$$p\,dx = (p + p\cos p)\,dp$$

$$dy = (p + p\cos p)\,dp$$

$$\int dy = \int (p + p\cos p)\,dp = \frac{p^2}{2} + \int p\,d(\sin p)$$

$$y = \frac{p^2}{2} + p\sin p + \cos p + C$$

О.Р. $$\left\{ \boxed{\begin{aligned} x &= p + \sin p \\ y &= \frac{p^2}{2} + p\sin p + \cos p + C \end{aligned}} \right.$$

Специјално издвајамо Лагранжову и Клероову једначину, како је поступак њиховог решавања исти.

3.1. КЛЕРООВА ЈЕДНАЧИНА

$$\boxed{y = xy' + \varphi(y')}$$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА: $y' = p \Rightarrow \boxed{y = xp + \varphi(p) \quad (\star)}$

$$dy = (xp + \varphi(p))'_x \, dx + (xp + \varphi(p))'_p \, dp$$

$$p\,dx = p\,dx + (x + \varphi'(p))\,dp$$

$$(x + \varphi'(p))\,dp = 0$$

$$x + \varphi'(p) = 0 \quad \vee \quad dp = 0$$

$$x = -\varphi'(p) \quad \vee \quad p = c$$

$$\star \Rightarrow \quad y = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \quad \vee \quad \boxed{y = cx + \varphi(c)}$$

С.Р. | О.Р.

ПРИМЕР: $y = xy' + y'^2$ Имамо готову формулу

за опште решење: $\boxed{y = Cx + C^2}$

За С.Р. поступимо овако: $y = px + \underbrace{p^2}_{\varphi(p)}$

$\varphi'(p) = 2p \Rightarrow x = -2p \Rightarrow p = -\frac{x}{2} \Longrightarrow y = x\frac{-x}{2} + \left(\frac{-x}{2}\right)^2$

$\boxed{y = +\frac{x^2}{4}}$

С.Р.

ЛАГРАНЖОВА Д.Ј.

$\boxed{y = x f(y') + \varphi(y')}$ за $f(y') \not\equiv y'$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА: $y' = p \Rightarrow$ $\boxed{☆ \quad y = x f(p) + \varphi(p)}$

$\underbrace{dy}_{p\,dx} = f(p)\,dx + \left(x f'(p) + \varphi'(p)\right)dp$

$\left(p - f(p)\right)dx = \left(x f'(p) - \varphi'(p)\right)dp$

услов $f(p) \not\equiv p$ нам дозвољава да делимо

са $p - f(p)$

$$\frac{dx}{dp} = x\,\frac{f'(p)}{p - f(p)} - \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}\,x = \frac{\varphi'(p)}{f(p) - p}$$ ЛИНЕАРНА Д.Ј.

ПРИМЕР: $y = 2xy + y'^2$

$y' = p$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА: $y = 2xp + p^2$

$\underset{p\,dx}{\underline{dy}} = 2p\,dx + (2x + 2p)\,dp$

$-p\,dx = (2x + 2p)\,dp \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{-2}{p}x - 2$

$\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2}{p}x = -2$ ЛИНЕАРНА Д.Ј.

$\vdots$

$x = \dfrac{c}{p^2} - \dfrac{2}{3}p \Longrightarrow y = 2p\left(\dfrac{c}{p^2} - \dfrac{2}{3}p\right) + p^2$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{c}{p^2} - \frac{2}{3}p \\ y &= \frac{2c}{p} - \frac{1}{3}p^2 \end{aligned}}$$ О.Р.