# ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

## 1. ПОЈАМ

У првим једначинама са којима се срећемо непозната величина је број. Зато за такве једначине кажемо и да су бројевне. Постоје једначине у којима непозната, а тиме и решење, оно потуди, није број. На пример, једначина,

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

је матрична једначина јер је непозната X матрица, док је једначина

$$(2) \quad f(x+2) = \frac{2x+4}{x+1}$$

~~функционална~~ функционална, јер је непознаша $f$ функције. Слично су (3) и (4)

функционалне једначине.

(3) $$g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$$

(4) $$h'(x) = h(x).$$

Последња једначина се издваја по томе што се у њој јавља извод непознате функције. С тим у вези је следећа дефиниција.

Деф 1: Функционална једначина у којој се појављује диференцијал (извод) непознате функције је диференцијална једначина.

Ако је непозната у једначини функција више променљивих (а то значи да су изводи парцијални), онда за једначину кажемо да је парцијална диференцијална једначина, а у супротном да је обична диференцијална једначина. □ 76

---

Успут, једначине (1) и (2) имају јединствена решења и то су $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ и

$f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, док једначине (3) и (4) имају бесконачно много решења:

- За свако $a>1$, $a \neq 0$ $g(x) = a^x$ је једно решење једначине (3). Такође $g(x)=0$ је решење једначине (3). (Проверити)
- За свако $c \in \mathbb{R}$ функција $h(x) = c e^x$ је једно решење једначине (4), што се лако проверава тако што се израчуна извод функције $h$ и убаци, заједно са $h$, у једначину (4).

---

Изучавање парцијалних диференцијалних једначина превазилази основни курс математике и за сад је довољно знати да такве једначине постоје, да се изучавају и да постоје методе за њихово решавање.

Деф 1 (наставак): Ред диференцијалне једначине је ред највећег извода непознате који се јавља у једначини. □

---

У наставку, кад кажемо „диференцијалне једначине", мислимо на обичне диференцијалне једначине, осим ако другачије не нагласимо. У Математици 2 ћемо изучавати једначине првог, а у Математици 3 вишег реда.

За даљи рад ће нам користити да се осврнемо на следеће о функцијама више променљивих.

Слично функцијама две променљиве, могу се дефинисати функције три променљиве.

Пример: $F(t_1, t_2, t_3) = t_1 - t_2 + \ln t_3$

$G(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2^2 + t_3 + e^{t_3} + \ln(t_1 + t_3)$

$H(t_1, t_2, t_3) = t_2 - t_3 - 1$

Ако се из једнакости $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ може (једнозначно) изразити $t_3$, онда кажемо да је $t_3$ <u>имплицитно</u> задата једнакошћу $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ док за $t_3 = f(t_1, t_2)$ кажемо да <u>експлицитно</u> изражава $t_3$.

У нашем примеру из $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ т. ј. из $t_1 - t_2 + \ln t_3 = 0$ се може експлицитно изразити $t_3$: $t_3 = e^{-t_1 + t_2}$ то је $f(t_1, t_2) = e^{-t_1 + t_2}$, док се из $G(t_1, t_2, t_3) = 0$ не може експлицитно изразити $t_3$.

Из $H(t_1, t_2, t_3) = 0$ се такође може експлицитно изразити $t_3$. Треба приметити да се у $H(t_1, t_2, t_3)$ не појављује (експлицитно) променљива $t_1$

Деф 2: Нека је дата функција $F = F(t_1, t_2, t_3)$. За једнакост

(5) $F(x, y, y') = 0$

кажемо да је диференцијална једначина у <u>имплицитном облику</u>. Ако се из (5) може изразити $y'$, ~~и до~~ онда за

(6) $y' = f(x, y)$

кажемо да је диференцијална једначина у <u>експлицитном облику</u>. □

---

Пример: $F(x, y, y') = 0$ нам даје $x - y + \ln y' = 0$, а тиме и $y' = e^{y-x}$. Ово последње је експлицитни облик једначине $F(x, y, y') = 0$.

$G(x, y, y') = 0 \iff x + y^2 + y' + e^{y'} + \ln(x + y') = 0$.

Ова једначина нема експлицитни облик.

Једначина $H(t_1, t_2, t_3) = 0$, то јест једначина $y \cdot y' - 1 = 0$ има експлицитни облик

$$\boxed{y' = \frac{1}{y}}$$

Искуство које имамо у решавању једначина нам даје некакву представу шта би решење диференцијалне једначине требало да буде. Решење бројевне једначине је сваки број који, кад се замени уместо непознате, чини да је једнакост тачна. Слично важи за матрице. Зашто онда не би исто важило и за диференцијалне једначине? С обзиром да је појам функције богатији и сложенији (а неки би рекли и компликованији) од појма броја, онда је за очекивање да је скуп ф-ја које задовољавају неку унапред задату једнакост знатно богатији и сложенији (а неки би рекли и компликованији). Разлог, бар један од разлога, је у томе што ако функцији променимо домен, добијамо другу функцију. Рецимо функције $h_1(x) = 2e^x$ и $h_2(x) = \frac{2x}{x}e^x$ се разликују јер је прва дефинисана у

$x=0$, док друга није, иако се у свим осталим тачкама поклапају. Приметимо да у свакој тачки свог домена свака од њих задовољава једначину (4) $h'(x)=h(x)$.

Ако су $c_1$ и $c_2$ било која два броја, онда функција $h_3(x)=\begin{cases} c_1e^x, & x>0\\ c_2e^x, & x<0\end{cases}$ такође задовољава једначину (4). Очигледно је да ако узмемо било коју функцију дефинисану на $(0,+\infty)$ која задовољава (4) и означимо је са $h_D$ и ако узмемо било коју функцију која задовољава једначину (4) на $(-\infty,0)$ и означимо је са $h_L$, онда функција

$$h(x)=\begin{cases} h_D(x), & x>0\\ h_L(x), & x<0\end{cases}$$

задовољава једначину (4).

Да ствар буде гора, не морамо се ограничити на два интервала и две функције, већ можемо комбиновати колико хоћемо (па чак и бесконачно много) оваквих функција дефинисаних на интервалима.

Са друге стране, ови примери показују да је довољно изучавати функције чији је домен интервал, јер се остале добијају комбинујући такве. Отуд следећа дефиниција

Деф 2 (наставак): Решење једначине (J) је свака функција $\varphi(x)$ дефинисана на неком интервалу $(a, b)$ таква да је у свакој тачки интервала $(a, b)$ дефинисан $\varphi'(x)$ и важи $\forall x \in (a, b) \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ □

---

Обично за интервал $(a, b)$ узимамо највећи који можемо.

У поступку решавања диференцијалне једначине се често користи техника рачунања неодређених интеграла. Зато се за решавање диференцијалних једначина често каже „да их интегралимо" и зато се у решењима може појавити интеграциона константа.
Погледајмо то на следећем примеру:

(7) $\boxed{y' = 2\sqrt{y}}$ $/dx$ Сетимо се да је $d(f(x)) = f'(x)dx$ па је $dy = y' \cdot dx$, па

$\boxed{y'dx = 2\sqrt{y}\,dx}$

$\boxed{dy = 2\sqrt{y}\,dx}$ Да бисмо последњу једнакост „интегралили" потребно је да $\sqrt{y}$ „пређе" на исту страну једнакости на којој је и $dy$.
Дакле, морамо једнакост поделити изразом $\sqrt{y}$.
Међутим, с обзиром да дељење нулом није дефинисано, морамо се питати шта је са случајем да је $\sqrt{y} = 0$.
Дакле, даље решавање ћемо разбити на два случаја.

I случај $\sqrt{y} \neq 0$, тј $y > 0$.

$$dy = 2\sqrt{y}\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy = dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int dx$$

$\sqrt{y} = x + C$ (довољно је додати једну интеграциону константу.

$$\boxed{y = (x+C)^2}$$

---

II случај $\sqrt{y} = 0$, тј $y = 0$. Овде заправо немамо шта да решавамо већ само да проверимо да ли је $y=0$ решење једначине (7). С обзиром да је тад $y' = 0$, онда важи $y' = 2\sqrt{y}$.

---

Кад спојимо случајеве I и II, добијамо да су решења

$$\boxed{y = (x+C)^2 \lor y = 0}$$

Приметимо да једнакост $y = (x+C)^2$ не дефинише само једну, већ бесконачно много функција: Како год доделимо неку конкретну вредност константи $c$, добијамо једно решење у складу са дефиницијом 2.

Дакле, $y=(x+c)^2$ дефинише онолико решења колико има реалних бројева.

Интересантно је да решење $y=0$ не може да се добије из $y=(x+c)^2$ тако што се константи $c$ додели конкретна вредност, јер у супротном би важило $x=-c$, а то је једнакост која са леве стране има нешто што се мења (променљиву $x$), а са десне нешто што се не мења (константу $-c$).

То није увек случај, али пре него што наведемо пример за то, уведимо следећу дефиницију

Деф 2 (НАСТАВАК): За решење $y=\varphi(x,c)$ које садржи интеграциону константу кажемо да је <u>опште решење</u> једначине (5).

За решење које се из општег добије тако што се константи $c$ додели конкретна вредност кажемо да је <u>партикуларно решење</u> једначине (5). За решење које није партикуларно кажемо да је <u>сингуларно</u>. □

---

У овој терминологији, $y=(x+c)^2$ је опште решење једначине $y'=2\sqrt{y}$, а $y=0$ је сингуларно решење исте једначине.

Следећи пример ће показати да ћемо претходну дефиницију морати да поправимо, тачније, да допунимо дефиницију партикуларног решења. Решимо једначину $y'=1-y^2$

- Најпре ћемо да применимо једнакост $y'=\frac{dy}{dx}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=1-y^2}$$

Сад бисмо да једначину помножимо са $dx$ и поделимо изразом $1-y^2$. С обзиром да дељење нулом није дефинисано, ~~нулом~~ морамо посебно да разматрамо случај $1-y^2=0$.

I $\quad 1-y^2=0 \iff y=1 \lor y=-1$.

У овом случају немамо шта да рачунамо јер већ имамо две функције $y=1$ и $y=-1$. Остаје само да се провери да ли су ове функције решења једначине.
У оба случаја је $y'=0$ и $y^2=1$, па важи $y'=1-y^2$. Дакле и $y=1$ и $y=-1$ су решења једначине.

II $\quad 1-y^2\neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = 1-y^2 \quad \Big/ : (y^2-1)$$

$$\frac{dy}{y^2-1}\,\frac{1}{dx} = -1 \quad \Big/ \, 2\,dx$$

$$\frac{2\,dy}{y^2-1} = -2\,dx$$

$$\int \frac{2\,dy}{y^2-1} = -2\int dx$$

Кад решимо интеграле довољно је додати константу на само једној страни.

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = c - 2x$$

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{c}\cdot e^{-2x}$$

Приметимо да је $e^{c} > 0$

$$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{c} e^{-2x}$$

С обзиром да је $\pm e^{c}$ константа различита од нуле, можемо је преозначити $\pm e^{c} = c_1$ уз услов да је $c_1 \neq 0$

$$\frac{y-1}{y+1} = c_1 e^{-2x}.$$

Одавде се добија

$$\boxed{y = \frac{e^{2x}+c_1}{e^{2x}-c_1}}$$

Ово је опште решење једначине. Из општег решења би се могло добити решење $y = 1$ кад бисмо смели да константи $c_1$ доделимо вредност $c_1 = 0$. Међутим, $c_1 \neq 0$ је услов под којим смо рачунали

Зато ћемо дозволити да $c_1$ сме да буде и 0 и додати да је $y = \lim\limits_{c_1 \to 0} \frac{e^{2x}+c_1}{e^{2x}-c_1}$ партикуларно решење. Не само то, него ћемо дозволити да је партикуларно решење и $y = \lim\limits_{c_1 \to \pm\infty} \frac{e^{2x}+c_1}{e^{2x}-c_1}$ ако такав лимес постоји. У нашем случају то је $y=-1$.

Одкуд сад то? Замислимо да у решавању интеграла нисмо додали константу с десне, већ са леве стране.

$$\int \frac{2dy}{y^2-1} = -2dx \Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C_2 = -2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| e^{C_2} = e^{-2x} \Rightarrow \pm e^{C_2}\frac{y-1}{y+1} = e^{-2x}$$

Ако сад преименујемо $\pm e^{C_2}$ са $D$, добијамо

$$D\frac{y-1}{y+1} = e^{-2x}$$ уз услов да је $D \neq 0$

Одавде није тешко изразити $y$

$$\boxed{y = \frac{De^{2x}+1}{De^{2x}-1}} \qquad D \neq 0$$

Ако сад константи $D$, слично као што смо константи $C$, малопре, „уозбиљимо" да узме вредност нула, тј. рачунамо

$$y = \lim_{D \to 0} \frac{De^{2x}+1}{De^{2x}-1}$$, добићемо $y = -1$.

Из $\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c_2 = -2x$ и $\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = c - 2x$

следи веза $c_2 = -c$ тј. $e^{c_2} = e^{-c} = \frac{1}{e^c}$

а тиме и $D = \frac{1}{c_2}$ па је

$$\lim_{D \to 0} \frac{De^{2x}+1}{De^{2x}-1} = \lim_{c_2 \to \pm\infty} \frac{e^{2x}+c_2}{e^{2x}-c_2}$$

Деф (допуна) Ако постоји лимес

$\lim_{c \to \pm\infty} \Psi(x,c)$ и $y = \lim_{c \to \pm\infty} \Psi(x,c)$ је решење једначине (5), онда за њега такође кажемо да је партикуларно. □