Тотални диференцијал

Деф: За израз $F'_x(x,y)\,dx + F'_y(x,y)\,dy$ кажемо да је тотални диференцијал ф-је F и обележавамо га са dF.

Дакле, полазећи од ф-је F, ми прво рачунамо две нове функције $P = F'_x$ и $Q = F'_y$, а онда формирамо $dF = P\,dx + Q\,dy$. Питање је шта је са другим смером: Ако су дате некакве две ф-је $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, да ли постоји функција F таква да важи

$$dF = P\,dx + Q\,dy\,?$$

Ако постоји, како да је нађемо?

Делимичан одговор на прво питање даје следећа теорема:

Т1: Ако важи $P'_y = Q'_x$, онда постоји ф-ја F таква да је $dF = P\,dx + Q\,dy$. ∎

Напомена: Обрнут смер не мора да важи. Тачније, теорема ништа не тврди у случају да није $P'_y = Q'_x$.

је и даље непозната. Може деловати да нисмо далеко одмакли: од непознате ф-је F, дошли смо до проблема тражења непознате ф-је φ. Али, то заправо није тако. Разлика је у чињеници да је φ, ф-ја једне променљиве. То ћемо записати на следећи начин

$$\boxed{\varphi = \varphi(x)} \quad (☆☆)$$

Сада ћемо користити једнакости (1), (☆) и (☆☆)!

$$\left.\begin{array}{ll} (☆) & F = \int Q(x,y)\,dy + \varphi(x) \Rightarrow F'_x = \left(\int Q\,dy\right)'_x + \varphi'(x) \\ (1) \Rightarrow & F'_x = P \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x) = P - \left(\int Q\,dy\right)'_x \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi(x) = \int \left(P - \left(\int Q\,dy\right)'_x\right) dx + C} \quad (☆☆☆)$$

Из (☆☆) следи да је овога пута интегрална константа, заиста константа, јер, у супротном, φ не би била ф-ја једне променљиве.

Друго питање је било: Ако за дате ф-је $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ знамо да је израз $P\,dx + Q\,dy$ тотални диференцијал неке ф-је F, како да нађемо ту ф-ју?

Из чињенице да је $dF = P\,dx + Q\,dy$ и, по дефиницији, да је $dF = F'_x\,dx + F'_y\,dy$, закључујемо да је (1) $F'_x = P$ и (2) $F'_y = Q$

Полазећи од једнакости (2) можемо да закључимо да ф-ја F мора бити облика $F = \int Q\,dy$.
Овде морамо узети у обзир да интегралимо по променљивој y, па је интегрална константа (за y), сваки израз који не садржи y (јер ће извод таквог израза бити нула).
То, да се у интегралној константи евентуално налази x, ћемо нагласити:

$$\boxed{F = \int Q(x,y)\,dy + \varphi(x)} \quad \star$$

Задати су P и Q, па интеграл $\int Q\,dy$ можемо да израчунамо, али функција $\varphi(x)$

Користећи $(\ast)$ и $(\overset{\ast}{\ast\ast})$ долазимо до

$$F=\int Q\,dy+\int\left(P-\left(\int Q\,dy\right)'_x\right)dx+C$$

Напомена: Често је боље запамтити поступак него формулу!

Пример TΔ1. Проверити да ли је израз

$$\left(\frac{y^2}{\cos^2(xy^2)}-e^x\right)dx+\left(\frac{2xy}{\cos^2(xy^2)}+\frac{2}{y}\right)dy$$

тотални диференцијал неке ф-је и ако јесте наћи све такве ф-је.

Решење: Прво уведимо ознаке: $P=\dfrac{y^2}{\cos^2(xy^2)}-e^x$ и $Q=\dfrac{2xy}{\cos^2(xy^2)}+\dfrac{2}{y}$. Проверимо услове теореме.

$$P'_y=2y\,\frac{1}{\cos^2(xy^2)}+y^2\,\frac{2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)}\cdot 2xy$$

$$Q'_x=2y\,\frac{1}{\cos^2(xy^2)}+2xy\,\frac{2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)}\cdot y^2$$

Из $P'_y=Q'_x$, по теореми T1, закључујемо да постоји функција F таква да је

$$dF = P\,dx + Q\,dy.$$

$$(1)\quad F'_x = P \qquad\qquad (2)\quad F'_y = Q$$

$$(2) \Rightarrow F = \int Q\,dy = \int \frac{2xy}{\cos^2(xy^2)}\,dy + \int \frac{2}{y}\,dy =$$

смена

$$= {}^{*}\left[\begin{array}{l} xy^2 = t \\ d(xy^2) = dt \\ 2xy\,dy = dt \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t} + 2\ln|y| =$$

$$= \operatorname{tg}(t) + \ln|y|^2 + \varphi(x) = \operatorname{tg}(xy^2) + \ln y^2 + \varphi(x)$$

Дакле, $\boxed{F(x,y) = \operatorname{tg}(xy^2) + \ln y^2 + \varphi(x)}$ (☆)

$$\Downarrow$$

$$F'_x = \frac{1}{\cos^2(xy^2)} \cdot y^2 + \varphi'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = F'_x - \frac{y^2}{\cos^2(xy^2)} \overset{(1)}{=\!=} P - \frac{y^2}{\cos^2(xy^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -e^x \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \int -e^x = c - e^x} \;(☆☆)$$

$$\left.\begin{array}{l}(☆)\\(☆☆)\end{array}\right\} \Rightarrow F(x,y) = \operatorname{tg}(xy^2) + \ln y^2 - e^x + c$$

---

* У оваквим сменама је битно водити рачуна шта је променљива. Пошто је у интегралу диференцијал dy, онда x третирамо као параметар. $xy^2 = t \Rightarrow (xy^2)'_y\,dy = dt$

Промењиве x и y су равноправне. Уместо да кренемо од (2) $F'_y = Q$, могли смо да кренемо од (1) $F'_x = P$. Тада би важило

☆ $F = \int P\,dx + \Psi(y)$ за непознату ф-ју Ψ.

$$\Downarrow$$

$$F'_y = \left(\int P\,dx\right)'_y + \Psi'(y) \xrightarrow{(2)} \Psi'(y) = Q - \left(\int P\,dx\right)'_y$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(y) = \int \left(Q - \left(\int P\,dx\right)'_y \right) dy \xRightarrow{☆}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F = \int P\,dx + \int \left(Q - \left(\int P\,dx\right)'_y \right) dy + C}$$

Пример ТД1: (други, али не и суштински другачији, начин):

(1) $F'_x = \dfrac{y^2}{\cos^2(xy^2)} - e^x \Rightarrow F(x,y) = \Psi(y) + \displaystyle\int \frac{y^2\,dx}{\cos^2(xy^2)} -$

$- \displaystyle\int e^x\,dx = \Psi(y) + \left[\begin{array}{l} \text{смена} \\ y^2x = t \\ y^2dx = dt \end{array}\right] \int \frac{dt}{\cos^2 t} - e^x \Rightarrow$

$$\boxed{F = \Psi(y) + tg\,(xy^2) - e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F'_y = \Psi'(y) + \frac{2xy}{\cos^2(xy^2)}} \quad (☆☆)$$

$$\left((2) + \binom{\ast}{\ast} \right) \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{2}{y} \Rightarrow \varphi(y) = \ln y^2 + C$$

$$\boxed{F = \operatorname{tg}(xy^2) - e^{x} + \ln y^2 + C}$$

Примери: У свком од следећих примера проверити да ли је израз тотални диференцијал неке функције и ако јесте, наћи ту ф-ју.

ТД 2:
$$\left(e^{x}e^{y^2} + 2x + 2x\cos x^2 + 2y^2\right)dx + \left(2ye^{x}e^{y^2} + y\left(\cos y + 4x + 4y^2\right)\right)dy$$

$$P = e^{x}e^{y^2} + 2x + 2x\cos x^2 + 2y^2$$

$$Q = 2ye^{x}e^{y^2} + y\cos y + 4xy + 4y^3$$

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= 2ye^{x}e^{y^2} + 4y \\ Q'_x &= 2ye^{x}e^{y^2} + 4y \end{aligned}\right\} \Rightarrow P\,dx + Q\,dy = dF$$

за неку ф-ју F.

(1) $F'_x = P \Rightarrow F = \varphi(y) + \int P\,dx = \varphi(y) + e^{x}e^{y^2} + x^2 + x^2\cos x^2 + 2xy^2$

(2) $F'_y = Q$

$(2) \Rightarrow \left(\varphi(y) + e^x e^{y^2} + x^2 + x^2 \cos x^2 + 2xy^2\right)'_y =$

$= 2y e^x e^{y^2} + y\cos y + 4xy + 4y^3$

$\varphi'(y) = y\cos y + 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = \int (y\cos y + 4y^3)dy \Rightarrow$

$\varphi(y) = y^4 + y\sin y + \cos y + C$

TΔ3: $(e^x e^{y^2} + 2y^2)dx + (e^x e^{y^2} + 4xy)\,dy$

$\left.\begin{array}{ll} P = e^x e^{y^2} + 2y^2 & \Rightarrow P'_y = 2y e^x e^{y^2} + 4y \\ Q = e^x e^{y^2} + 4xy & \Rightarrow Q'_x = e^x e^{y^2} + 4y \end{array}\right\} \Rightarrow P'_y \neq Q'_x$

Нису испуњени услови теореме.

TΔ4: $2xy\,dx + \left(x^2 + \dfrac{e^y}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}} + \cos^2 y\right)dy$

$P = 2xy$, $Q = x^2 + \dfrac{e^y}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}} + \cos^2 y$, $P'_y = 2x$, $Q'_x = 2x$

$P'_y = Q'_x \Longrightarrow$ постоји F тако да $F'_x = P$ и $F'_y = Q$

$F = \int P\,dx + \varphi(y) = x^2 y + \varphi(y) \Rightarrow F'_y = x^2 + \varphi'(y) \Rightarrow$

$\xrightarrow{F'_y = Q} \varphi'(y) = \dfrac{e^y}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}} + \cos^2 y \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(y) = C + \int \dfrac{e^y\,dy}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{7}{4} - (e^y + \frac{1}{2})^2}} + \int \cos^2 y\,dy =$

$$= C + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{7}{4} - t^2}} \left[\begin{array}{l} \text{смяна} \\ e^y + \frac{1}{2} = t \\ e^y dy = dt \end{array} \right] + \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2y \, dy$$

$$= C + \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin \frac{2e^y + 1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \sin 2y$$

$$F = x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin \frac{2e^y + 1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \sin 2y + C$$

Задачи за решаване: 1) $(x\,dx + y\,dy)\dfrac{2x^2 + 2y^2 + 1}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{x^2+y^2}$

2) $x\left(\dfrac{2x^2 + 2y^2 + 1}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{y^2} + 2\right) e^{x^2} dx + \dfrac{2x^2 + 2y^2 + 1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, y\, e^{x^2} e^{y^2} dy$

3) $\left(\sqrt{x^6 + y^6} - x^3\right) dx + \left(\sqrt{x^6 + y^6} - y^3\right) dy$

4) $\dfrac{3x^2\left(\sqrt{x^6+y^6} - x^3\right) dx + 3y^2\left(\sqrt{x^6+y^6} - y^3\right) dy}{\sqrt{x^6+y^6}}$

5) $2x\left(\dfrac{2y^2x^2 + 1}{x^2 + x^4y^2 + 1} + \cos x^2\right) dx - 2y\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^4}} - \dfrac{x^4}{x^2 + x^4y^2 + 1}\right) dy$