Хомогену једначину смо решили тако што смо је (сменом) свели на једначину која раздваја променљиве (2.1.). То ћемо и надаље радити: или ћемо сводити директно на једначину 2.1. или на неку раније решену једначину.

2.3. Једначина облика

(1) $$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \quad \text{за } a_2^2+b_2^2+c_2^2 \neq 0$$

Решавање ове једначине је различито ако важи $(a_1x+b_1y) = k(a_2x+b_2y)$ за неко $k \in \mathbb{R}$ и ако то није случај. У случају да то важи, онда се сменом $a_2x+b_2y+c_2 = z$, $z = z(x)$ једначина 2.3. своди на једначину 2.1., што се лако проверава:

$$a_2x+b_2y+c_2 = z \Rightarrow a_2+b_2y' = z' \Rightarrow$$

$$z' = \underbrace{a_2 + b_2 f\left(\frac{k(z-c_2)+c_1}{z}\right)}_{g(z)}$$

Последњу једнакост тј.

(2) $z' = g(z)$

смо добили тако што смо једначину (1) прво помножили бројем k, а затим на обе стране једнакости додали a_2 и изразили a_1x+b_1y:

$$a_1x+b_1y = k(a_2x+b_2y) = k(a_2x+b_2y+c_2-c_2) = k(t-c_2)$$

Једначина (2) је очигледно једначина типа 2.1.

Шта ако ни за једно k не важи $(a_1x+b_1y) = k(a_2x+b_2y)$? Тада ~~[illegible]~~ врсте детерминанте $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ нису пропорционалне па $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. По Крамеровој теореми, систем чија је детерминанта $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ има јединствено решење. Дакле,

$$\Sigma: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$ има јединствено

решење $x=\alpha$, $y=\beta$ за неке $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Зашто је то сада битно, како помаже да решимо једначину (1)?

Кад бисмо у разломку $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ могли да се „ослободимо" бројева c_1 и c_2 онда бисмо могли да $\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}$ трансформишемо у $\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}$, што је, очигледно, у функцији разломка $\frac{y}{x}$ па би и $f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$ било $g\left(\frac{y}{x}\right)$ и ми бисмо једначину (1) свели на хомогену једначину. Пошто систем Σ има решење, баш то и можемо да урадимо смену

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \alpha + X \\ y &= \beta + Y \end{aligned}} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\beta+Y)}{d(\alpha+X)} = \frac{dY}{dX}$$

α и β су константе!

$$a_1x+b_1y+c_1 = a_1\alpha+b_1\beta+c_1+a_1X+b_1Y \overset{*}{=} a_1X+b_1Y$$

$$a_2x+b_2y+c_2 = a_2\alpha+b_2\beta+c_2+a_2X+b_2Y \overset{*}{=} a_2X+b_2Y$$

Једнакост * важи јер је $x=\alpha, y=\beta$ решење система Σ: кад у Σ уместо x ставимо α и уместо y ставимо β, онда су једнакости тачне.

Овом сменом се једначина (1) своди на

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}}\right) \quad \text{што је 2.2.} \tag{3}$$

Пре него резимирамо још само да видимо да ли је (1) за неке вредности коефицијената a_i, b_i, c_i заправо једна од претходних једначина:

- За случај да је $c_1 = c_2 = 0$, (1) је 2.2.
- За случај да је $b_1 = b_2 = 0$, (1) је 2.1.

За остале случајеве је заправо нови тип једначине.

Закључак:

1. Ако је $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, тада сменом $a_2x + b_2y + c_2 = z$ једначину 2.3. сводимо на 2.1.

2. Ако је $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тада сменом $\begin{matrix} x = \alpha + X \\ y = \beta + Y \end{matrix}$ једначину 2.3. сводимо на 2.2. при чему је (α, β) решење система $\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{matrix}$.

Напомена: – Услов $a_2^2+b_2^2+c_2^2 \neq 0$ заправо каже да не могу сва три коефицијента a_2, b_2 и c_2 бити нула.

– У случају да је $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, уместо смене

$a_2x + b_2y + c_2 = z$ може се увести смена

$a_1x + b_1y + c_1 = z$ или

$\delta(a_2x + b_2y) + \gamma = z$ за било који број

$\gamma \in \mathbb{R}$ и било који број $\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Пример: $y' = \dfrac{2y-4x+2}{2x-y+1}$ $\quad a_1=-4 \quad b_1=2$, $\quad a_2=2 \quad b_2=-1$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Зато сводимо на 2.1.

сменом $2x-y+1=z$ или $y-2x+1=z$ или

$\delta(y-2x)+\gamma = z$ за неко $\delta \neq 0$ и неко $\gamma \in \mathbb{R}$.

Без обзира на избор смене, решење ће бити исто.

$y-2x+1=z$ (изабрано јер је тада бројилац $2z$)

$y'-2=z'$

$y'=2+z'$

$y' = \dfrac{2y-4x+2}{2-(y-2x+1)} \Rightarrow$

$z'+2 = \dfrac{2z}{2-z}$

$$z' = 4\,\frac{-1+z}{2-z} \quad (\text{Једначина која р.п.})$$

$$\frac{dz}{dx} = -4\,\frac{z-1}{z-2}$$

$$\frac{dz}{\frac{z-1}{z-2}} = -4\,dx \quad \text{или} \quad z-1=0$$

$$\frac{z-1-1}{z-1}\,dz = -4\,dx \quad \text{или} \quad z=+1$$

$$\int\left(1-\frac{1}{z-1}\right)dz = -4\int dx \quad \text{или} \quad z=+1$$

$$z-\ln|z-1| = C_1 - 4x \quad \text{или} \quad z=+1$$

$$\underbrace{y+2x-\ln|y-2x| = C_1}_{\text{ОР}} \quad \text{или} \quad \underbrace{y=2x}_{\text{СР}}$$

---

(2) $$y' = \frac{2y-2}{y-2x+3} \qquad \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} = \frac{2y-2}{y-2x+3}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \text{Решимо систем}$$

$$\begin{cases} 2y-2=0 \\ y-2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Смена: $y = 1+Y$, $x = 2+X$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = Y'$

$$Y' = \frac{2(1+Y)-2}{1+Y-2(2+X)+3}$$

$$Y' = \frac{2Y}{Y-2X} = \frac{2\frac{Y}{X}}{\frac{Y}{X}-2}$$

СМЕНА: $\frac{Y}{X} = z, \quad z = z(X)$ *

$$Y = Xz$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{d(Xz)}{dX} = z + \frac{dz}{dx}\cdot X$$

* ОВА ОЗНАКА ЗНАЧИ ДА ЈЕ z У ФУНКЦИЈИ ОД X И ДА НАС ИНТЕРЕСУЈЕ ИЗВОД ПО X

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{z-2}$$

$$(4)\quad x\frac{dz}{dx} = -\frac{z^2-4z}{z-2} \qquad (\text{ЈКРП } 2.1.)$$

$$\frac{z-2}{z^2-4z}\,dz = -\frac{dx}{x} \quad \text{или} \quad z^2-4z=0$$

$$\int\frac{(2z-4)\,dz}{z^2-4z} = -\int\frac{2\,dx}{x} \quad \text{или } z=0 \text{ или } z=4$$

$$\ln|z^2-4z| \overset{**}{=} \ln\frac{c}{x^2} \quad \text{или } z=0 \text{ или } z=4$$

$$z^2-4z = \frac{c}{x^2} \quad \text{или } z=0 \text{ или } z=4$$

О.Р. једначине (4)

није С.Р. добија се за $c=0$

Дакле, једначина (4) има само О.Р.

$$z^2 + 4z = \frac{c}{x^2}$$

$$\frac{Y^2}{X^2} + 4\frac{Y}{X} = \frac{c}{X^2} \Rightarrow Y^2 + 4XY = C$$

$$\boxed{(y-1)^2 + 4(x-2)(y-1) = c}$$

О.Р. почетне једначине.

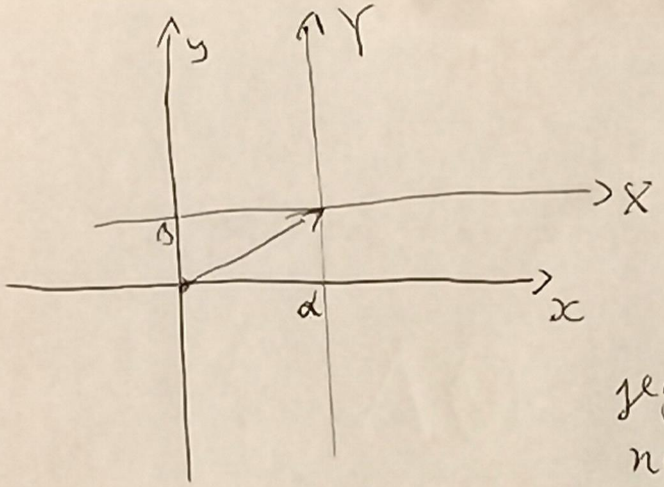
** $$\int \frac{-2\,dx}{x} = c_1 - 2\ln|x| = c_1 + \ln\frac{1}{x^2}$$

Већ смо се увежбали и приметили да је честа смена $e^{c_1} = c$. Тада је

$c_1 = \ln c$

$$\int \frac{-2\,dx}{x} = \ln c + \ln\frac{1}{x^2} = \ln\frac{c}{x^2}$$

Напомена: Смена $\begin{array}{l} x = \alpha + X \\ y = \beta + Y \end{array}$ геометријски представља транслацију у равни за вектор (α, β)



Дакле, геометријски, ми померимо координатне осе, решимо једначину и вратимо осе на првобитно место.

2.4. Линеарна Д.Ј.

(★) $y' + p(x)\,y = g(x)$ за неке ф-је p и g и $g \not\equiv 0$

Своди се на ЈКРП (2.1.). Пробаћемо да решење нађемо у облику $y(x) = u(x)v(x)$. Ако успемо да једну од функција u и v „паметно" изаберемо и олакшамо себи рачун, онда проблем тражења непознате y сводимо на проблем тражења непознате преостале од функција u и v.

Дакле, поступићемо овако:

1. y напишемо у облику производа две функције (1) $y = u \cdot v$

2. Једну од функција ~~u~~ (рецимо u) потпуно бирамо, а другу (v) остаје непозната. Кад израчунамо v, онда и изаберемо u и израчунато v вратимо у (1)

$y = u \cdot v \qquad y' = (uv)' = u'v + uv'$

(У једначини (☆) су функције p и g познате)

$y' + p(x)y = g(x) \Rightarrow u'v + uv' + uvp(x) = g(x)$

$\Rightarrow (u'+up)v + uv' = g \quad (2)$

Уколико бисмо $u(x)$ изабрали тако да буде $u'+up=0$, онда би једнакост (2) била знатно простија. Приметимо да је

(3) $u'+up=0$ једначина типа 2.1.

$\frac{du}{dx} = -up(x)$

$\frac{du}{u} = -p(x)dx \vee u=0$

$\ln|u| = c_1 + \int p\,dx \vee u=0$

$u = e^{c_1} \cdot e^{-\int p\,dx}$

ово решење није од интереса, јер ако њега вратимо у (1) добићемо $y=0$, а то није решење једначине ☆

С обзиром да бирамо (једно, конкретно) $u(x)$, нећемо „вући" константу c_1, већ ћемо да јој дамо конкретну вредност. Најједноставније је да изаберемо $c_1=0$. Тада

$$(4) \qquad \boxed{u = e^{-\int p(x)\,dx}}$$

Ово $u(x)$ задовољава (3) па (2) постаје

$$(2') \qquad e^{-\int p(x)\,dx} \cdot v' = g(x)$$

$$v' = g(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}$$

$$(5) \qquad \boxed{v = c + \int g(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx}$$

Кад то вратимо у (1) добијемо

$$(6) \qquad \boxed{y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(c + \int g(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx\right)}$$

ПРИМЕРИ:

1) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}\cos x$

$p(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x^2}\cos x$

$y = u \cdot v$

$y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = \frac{1}{x^2}\cos x$$

$$\left(u' + \frac{2}{x}u\right)v + uv' = \frac{1}{x^2}\cos x$$

$u' + \frac{2}{x}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u \Rightarrow \frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\ln|u| = \underbrace{c_1}_{=0} - 2\ln|x| \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{x^2}}$

$\frac{1}{x^2}\cdot v' = \frac{1}{x^2}\cos x \Rightarrow v' = \cos x \Rightarrow \boxed{v = c + \sin x}$

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x^2}\cdot(c + \sin x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2}\sin x$$

Напомена: ЛИНЕАРНА Д.Ј. НЕМА С.Р.!!!

---

2) $y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x$ $\quad y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x^2\cos x \Rightarrow \left(u' - \frac{2}{x}u\right)v + uv' = x^2\cos x$

$u' - \frac{2}{x}u = 0 \quad u\cdot$

$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u$

$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \boxed{u = x^2}$

$x^2 v' = x^2\cos x$

$\frac{dv}{dx} = \cos x$

$\boxed{v = c + \sin x}$

$\Rightarrow y = cx^2 + x^2\sin x$

2.5. БЕРНУЛИЈЕВА Д. Ј.

$$(\star\star) \qquad y' + A(x)\,y = B(x)\,y^{\alpha} \qquad \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ B \not\equiv 0$$

Своди се на линеарну диф. једначину.

Најпре множимо са $y^{-\alpha}$

$$y' \cdot y^{-\alpha} + A(x)\,y \cdot y^{-\alpha} = B(x) \quad \text{или} \quad y^{\alpha} = 0$$

смена: $y^{1-\alpha} = z, \quad z = z(x)$

$$(y^{1-\alpha})' = z'$$

$$(1-\alpha)\,y^{-\alpha} \cdot y' = z'$$

смемо да делимо са $1-\alpha$ јер

$$y'\,y^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,z'$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\,z' + z \cdot A(x) = B(x) \quad / \,(1-\alpha)$$

$$\boxed{z' + \underbrace{(1-\alpha)A(x)}_{p(x)}\,z = \underbrace{(1-\alpha)B(x)}_{q(x)}}$$

Линеарна д.ј.

ОВО ЈЕ МОГУЋЕ САМО АКО ЈЕ $\alpha > 0$ И ТАД ЈЕ $y = 0$ РЕШЕЊЕ

Пример: $y' - \frac{1}{3}\cos x\, y = \frac{1+x^3(2\ln x+1)}{3x^2y^2}e^{\sin x}$

Желимо да се променљива y не појављује на десној ~~стр~~ страни једнакости и зато множимо са y^2

$$y'y^2 - \frac{1}{3}\cos x\, y^3 = \frac{1+x^3(2\ln x+1)}{3x^2}e^{\sin x}$$

Заокружено y^3 мора постати нова непозната ф-ја ако желимо да сведемо на линеарну д.ј.

смена: $\boxed{y^3 = z,\quad z = z(x) \qquad 3y^2y' = z'}$

$$3y'y^2 - \cos x\, y^3 = \frac{1+x^3(2\ln x+1)}{x^2}e^{\sin x}$$

$$z' - \cos x\, z = \frac{1}{x^2} + 2x\ln x + x \qquad \text{ЛИНЕАРНА Д.Ј.}$$

$z = u\cdot v \qquad z' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \cos x\, uv = \left(\frac{1}{x^2} + 2x\ln x + x\right)e^{\sin x}$$

$$(u' - u\cos x)v + uv' = \left(\frac{1}{x^2} + 2x\ln x + x\right)e^{\sin x}$$

$u' - u\cos x = 0$

$\vdots$

$u = e^{+\sin x}$

$$\Rightarrow \quad e^{\sin x}v' = \left(\frac{1}{x^2} + 2x\ln x + x\right)e^{\sin x}$$

$$v = c + \int\left(\frac{1}{x^2} + 2x\ln x + x\right)dx$$

$v = c + x^2 \ln x - \frac{1}{x}$

$z = u \cdot v = e^{\sin x}\left(c + x^2 \ln x - \frac{1}{x}\right)$

$$\boxed{y^3 = e^{\sin x}\left(c + x^2 \ln x - \frac{1}{x}\right)}$$

2) $y' - \frac{6}{x} y = -3\frac{y\sqrt[3]{y}\cos x}{x^2} \quad \Big/ : y^{4/3}$

$y' y^{-\frac{4}{3}} - \frac{6}{x} y^{-\frac{1}{3}} = -3\frac{\cos x}{x^2} \quad \vee \quad y^{4/3} = 0$

z

Смена:

$y^{-\frac{1}{3}} = z$

$-\frac{1}{3} y^{-\frac{4}{3}} y' = z'$

$-\frac{1}{3} y' y^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{x} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{\cos x}{x^2}$

$z' + \frac{2}{x} z = \frac{\cos x}{x^2}$

Први пример линеарне Д.Ј.

$z = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2}\sin x \quad \vee \quad y^{4/3} = 0$

$\frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{c + \sin x}{x^2} \quad \vee \quad y = 0$

$y = \frac{x^6}{(c + \sin x)^3} \quad \vee \quad y = 0$

добија се за $c \to \pm\infty$

$$\boxed{y = \frac{x^6}{(c + \sin x)^3}}$$

О.Р.

Нема С.Р.

Напомена: 1) Услов $g \not\equiv 0$ код једначине ☆ је неопходан, јер би у супротном то била Ј.К.Р.П. (2.1.)

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y$$
$$\Rightarrow \boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx}}$$

2) Слично, услов $B(x) \equiv 0$ је неопходан јер би иначе (☆☆) била Ј.К.Р.П (2.1.).

Услови $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ су такође неопходни.

За $\alpha = 0$ се добија $y' + \underbrace{A(x)}_{p(x)} y = \underbrace{B(x)}_{g(x)} y$ Л.Д.Ј.

За $\alpha = 1$ се добија $y' + (A(x) - B(x))y = 0$ Ј.К.Р.П.

У решавању Л.Д.Ј. сасвим је свеједно да ли решавате тако што у напишете као $u \cdot v$, па бирате u и рачунате v или користите готову формулу.

На пример, прва једначина

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}\cos x$$

се коришћењем формуле рачуна

Овако: Прво израчунамо $\int p(x)\,dx$

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = \ln x^2.$$

Затим рачунамо $\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{x^2}\cos x\,dx\; e^{\ln x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\cos x\; x^2\,dx$$

$$= \int \cos x\,dx = C + \sin x$$

$$(6) \Rightarrow \quad y = e^{-\ln x^2}\left(C + \sin x\right) = \frac{C+\sin x}{x^2}$$

2.6. ЈЕДНАЧИНА ТОТАЛНОГ ДИФЕРЕНЦИЈАЛА

(☆☆☆)

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \text{ за } P'_y = Q'_x}$$

У лекцији Тотални диференцијал смо видели да је услов $P'_y = Q'_x$ довољан да је израз $P\,dx + Q\,dy$ тотални диференцијал неке функције $u = u(x,y)$.

Дакле, уместо $Pdx+Qdy$ можемо писати du, па једначина (***) постаје $\boxed{du=0}$. Ово је најпростија једначина типа 2.1.

Чак није потребно знање из диференцијалних једначина да би се решила једначина $du=0$, јер једина ф-ја којој је диференцијал нула је ф-ја $\boxed{u=c}$. То је уједно, решење почетне једначине.

Пример: $\left(\frac{y^2}{\cos^2(xy^2)} - e^{x}\right)dx + \left(\frac{2xy}{\cos^2(xy^2)} + \frac{3}{y}\right)dy = 0$

Ова једначина има везе са примерима са 68. стране. Заправо, већина посла је тамо одрађена. Једина разлика је што смо тамо тражили <u>све</u> могуће функције којима је лева страна једнакости тотални диференцијал, а сад тражимо само једну такву.

Практично је разлика у томе што уместо да додамо интегралну константу, ми ћемо израз сад изједначити са константом. Решење је

$$\boxed{\operatorname{tg}(xy^2) + \ln y^2 - e^x = C}$$

Напомена: Једначина $(\ast\ast\ast)$ нема С.Р.

---

2) $\underbrace{(x^3+xy^2)}_{P}dx + (\underbrace{x^2y+y^3}_{Q})dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= 2xy \\ Q'_x &= 2xy \end{aligned}\right\} \text{Испуњен је услов } P'_y = Q'_x .$$

Међутим, ово је задатак број 5 са стр. 98. Ако се решава као Ј.Т.Д. добићемо, нормално, исто решење, али кад год се једначина може решити једноставнијим методама, треба је тако решити. Јер свака од претходних једначина се може трансформисати тако да постане уједно и Ј.Т.Д.

На пример, $y' = g(x)\, h(y)$, тј.

$$\frac{dy}{h(y)} - g(x)\, dx = 0$$

$$P(x,y) = -g(x) \qquad Q(x,y) = \frac{1}{h(y)}$$

Задовољено је $P'_y = Q'_x = 0$

$$y' + p(x)\, y = g(x) \quad / \; e^{\int p(x)dx}\, dx$$

$$e^{\int p(x)dx} \cdot dy + \left(p(x)\cdot y - g(x)\right) e^{\int p(x)dx}\, dx = 0$$

$$P(x,y) = \left(p(x)\cdot y - g(x)\right) e^{\int p(x)dx}$$

$$P'_y = p(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

$$Q(x,y) = e^{\int p(x)dx} \Rightarrow Q'_x = p(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

Зато једначине треба увек решавати најједноставнији методом.