2. МЕТОДЕ РЕШАВАЊА ЈЕДНАЧИНА $y' = f(x,y)$

Кратак преглед: У поглављу 1 смо увели појам диференцијалне једначине и појам њеног решења.

За сваку функцију $F(t_1,t_2,t_3)$, једнакост

(1) $$F(x, y, y') = 0$$

представља <u>(обичну) диференцијалну једначину првог реда.</u> Ако се из (1) може изразити y' и добити

(2) $$y' = f(x,y),$$

онда за облик (2) кажемо да је <u>експлицитан.</u>

Ако је (a,b) подскуп домена функције ψ и ψ има извод у свакој тачки интервала (a,b) и ако важи

(3) $$\forall x \in (a,b) \quad F(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0,$$

онда кажемо да је ψ <u>решење једначине (1) на (a,b).</u> У пракси се ретко наводи интервал, већ се подразумева највећи могући интервал такав да је φ решење на њему.

За решење $y = \varphi(x, c)$ које садржи интеграциону константу кажемо да је **опште**. Решење које се добија из општег тако што се константи c додели конкретна вредност кажемо да је **партикуларно**. Решење које није партикуларно је **сингуларно**.

Изградња метода решавања Д. Ј. се креће од простијих ка сложенијим. Тај правац ћемо и ми да пратимо. Једначине које имају експлицитни облик су једноставније од осталих, а међу њима су најједноставније

2.1. ЈЕДНАЧИНА КОЈА РАЗДВАЈА ПРОМЕНЉИВЕ

То су једначине облика

$$\boxed{y' = g(x) \cdot h(y) \qquad (4)}$$

$$(4') \qquad \frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y)$$

Обе стране једнакости желимо да помножимо изразом $\frac{1}{h(y)}dx$. То је могуће само ако је $h(y) \neq 0$ (јер је тад дефинисан разломак $\frac{1}{h(y)}$).

Дакле, или је $h(y)=0$ или ћемо обе стране једнакости (4') помножити изразом $\frac{1}{h(y)}dx$

$$\boxed{(4'') \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \quad \lor \quad h(y)=0}$$

Из $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$ следи $\boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + C}$.

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

Једначина $h(y)=0$ је бројевна, што значи да су јој решења, ако их уопште има, бројеви. Ако једначина $h(y)=0$ има решења $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$, онда је за свако решење $y=y_k$ бројевне једначине $h(y)=0$, функција* $y=y_k$ решење једначине (4).

---

* $y=y_k$ је функција константа за сваки број y_k

Примери: 1, $y' = 2\sqrt{y}$ Са овим примером смо се већ срели:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \iff$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = g(x)\cdot h(y) \\ g(x) = 1 \\ h(y) = 2\sqrt{y} \end{array}}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \quad \vee \quad \sqrt{y} = 0$$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx \quad \vee \quad y = 0$$

$$\sqrt{y} = x + c \quad \vee \quad y = 0$$

$$y = (x+c)^2 \quad \vee \quad y = 0$$

$\uparrow$ опште решење $\qquad$ $\uparrow$ сингуларно решење

---

2. $y' = 1 - y^2$. Такође смо радили овај пример

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \iff$$

$$\frac{dy}{1-y^2} = dx \quad \vee \quad 1 - y^2 = 0$$

$$\int \frac{2\,dy}{y^2-1} = -2\int dx \quad \vee \quad y^2 = 1$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = c - 2x \quad \vee \quad y = -1 \quad \vee \quad y = 1$$

$$\boxed{y = \frac{e^{2x} + c_1}{e^{2x} - c_1}}$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ. НЕМА СИНГ. РЕШЕЊА

Из општег се за $c_1=0$ добија $y=1$, а за $c_1 \to \pm\infty$ се из општег решења добија $y=-1$.

Зато $y=-1$ и $y=1$ нису сингуларна решења и зато наводимо само опште

3. $yy' = x(1-y^2)$

Ово наизглед није једначина облика $y'=g(x)\cdot h(y)$, али ћемо показати да јесте. Најпре, приметимо да функција $y=0$ није решење једначине, јер ако је $y=0$, онда је и $y'=0$ па је $\underbrace{y\cdot y'}_{\text{лева страна једнакости}}=0$ а

$$\underbrace{x(1-y^2)}_{\text{десна страна једнакости}} = x \neq 0$$

Пошто $y=0$ није решење једначине $yy'=x(1-y^2)$, онда, ~~ва~~ из тога те једначине важи $y\neq 0$, па можемо да једначину поделимо са y.

$$y' = x\,\frac{1-y^2}{y}.$$

Сада је очигледно да је $y'=g(x)\cdot h(y)$ где је $h(y)=\frac{1-y^2}{y}$ и $g(x)=x$. Ово разматрање, међутим, не води до решења. Вратимо се на једнашипу $\quad yy' = (1-y^2)x$

$$y\frac{dy}{dx} = (1-y^2)x \quad \Big/ \frac{2\,dx}{y^2-1}$$

$$\frac{2y\,dy}{y^2-1} = -2x\,dx \quad \vee \quad y^2 = 1$$

$$\int \frac{2y\,dy}{y^2-1} = -2\int x\,dx \quad \vee\ y=-1 \quad \vee\ y=1$$

$$\ln|y^2-1| = c_1 - x^2 \quad \vee\ y=-1 \quad \vee\ y=1$$

$$y^2-1 = \pm e^{c_1}\cdot e^{-x^2} \quad \vee\ y=-1 \quad \vee\ y=1$$

$$\boxed{y^2 = 1+ce^{-x^2}} \quad \vee\ y=-1 \quad \vee\ y=1 \quad ;\text{за} \quad \boxed{\pm e^{c_1} = c}$$

опште решење

За $c=0$ се добија $y^2=1$, па $y=\pm 1$ нису сингуларна решења. Дакле имамо само опште решење (које не трансформишемо у $y=\pm\sqrt{1+ce^{-x^2}}$ већ остављамо у облику)

$$\boxed{y^2 = 1+ce^{-x^2}}$$

4. $y' = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \vee \sqrt{1-y^2} = 0 \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx \vee y = -1 \vee y = 1 \Rightarrow$

$\underbrace{\boxed{\arcsin y = x + c}}_{\text{О.Р.}} \vee y = -1 \vee y = 1$

Проверимо да ли су $y = -1$ и $y = 1$ С.Р.?

За које c је $\arcsin y = x + c$ исто што и $y = -1$?

$\left.\begin{matrix} \arcsin y = x + c \\ y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \arcsin(-1) = x + c \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} = x + c \Rightarrow \underbrace{-c - \dfrac{\pi}{2}}_{\substack{\text{непроменљиво} \\ \text{(константа)}}} = x$ ⟸ мења се (променљива)

Ово је немогуће па је $y = -1$ није С.Р.

Слично, $y = -1$ је С.Р.

Дакле сва решења су

$$\boxed{\underbrace{\arcsin y = x + c}_{\text{О.Р.}} \vee \underbrace{y = -1}_{\text{С.Р.}} \vee \underbrace{y = 1}_{\text{С.Р.}}}$$

Иако није еквивалентно, дозвољено

$$\boxed{y = \sin(x + c) \vee y = -1 \vee y = 1}$$

5. $(x^3+xy^2)\,dx + (x^2y+y^3)\,dy = 0$

$$(x^2+y^2)\,(x\,dx + y\,dy) = 0$$

$x^2+y^2=0$

Ово је могуће само ако је $x=y=0$.
То је, када функција дефинисана само у једној тачки ($x=0$), а не на интервалу

$\vee$ $\quad x\,dx + y\,dy = 0$

Наизглед није једначина облика $y' = g(x)\,h(y)$.
Ако је поделим са $y\,dx$ добиће се

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-x}_{g(x)}\,\underbrace{\frac{1}{y}}_{h(y)}$$

За решење је боље не мењати израз $x\,dx + y\,dy = 0$

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$

$$\int 2x\,dx + \int 2y\,dy = \int 0$$

$\boxed{x^2+y^2=c}$ ОПШТЕ РЕШЕЊЕ.

Нема С.Р. (нисмо делили)

6. Наћи оно решење једначине

$$y' = \sin y\,(x\cos x + \mathrm{ctg}\,x)$$

које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Најпре нађимо сва решења (О.Р и С.Р) једначине.

$$\frac{dy}{dx} = \sin y\,(x\cos x + \mathrm{ctg}\,x)$$

$$\frac{dy}{\sin y} = x\cos x\,dx + \mathrm{ctg}\,x\,dx \quad \vee \quad \sin y = 0$$

$$\Downarrow$$

не задовољава $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int x\cos x\,dx + \int \mathrm{ctg}\,x\,dx$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}\right| = x\sin x + \cos x + \ln|\sin x| + c}$$

О.Р.

За неко c се добија решење које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Да бисмо израчунали c, потребно је да у опште решење „убацимо" $\frac{\pi}{2}$ уместо x и уместо y

$$\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} + \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + c$$

$$\Downarrow$$

$$c = -\frac{\pi}{2}$$

Овако израчунато C вратимо у О.Р.

$$\boxed{\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}\right| = x\sin x + \cos x + \ln|\sin x| - \frac{\pi}{2}}$$

Одавде не треба изражавати y јер се ништа „лепши" израз неће добити.

<u>Напомена</u>: Једначина $y' = g(x)\,h(y)$ је име добила јер се променљиве „могу раздвојити". Зато, ако се променљиве могу раздвојити, нема потребе уверавати се да постоје g и h такве да се y' може изразити као $g(x)\cdot h(y)$, као што смо то радили у примеру 3. ($yy' = x(1-y^2)$), већ је довољно већ раздвојене променљиве „нападати" интегралом.

2.2. Хомогена једначина.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Пример: За $f(t) = t^2 + 1$ је $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{y^2 + x^2}{x^2}$

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{x^2}$$

$$\boxed{x^2 y' = y^2 + x^2}$$

Решавање спроводимо тако што покушавамо да сведемо на једначину 2.1.
То ћемо урадити сменом. У диференцијалним једначинама, кад уводимо смену, потребно је изразити извод старе непознате.

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ смена:

$\frac{y}{x} = z$, z је нова непозната ф-ја

$y = z \cdot x$ $\qquad z = z(x)$

$y' = (z \cdot x)'$ $\qquad y = y(x)$

$y' = z'x + z$

$$z'x + z = f(z)$$

$z'x = f(z) - z$

$$z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \underbrace{(f(z) - z)}_{h(z)}$$

ОВО ЈЕ ЈЕДНАЧИНА 2.1.

Примери: $x^2 y' = y^2 + x^2$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$$

смена: $\frac{y}{x} = z, \quad z = z(x)$

$y = xz$

$y' = z + xz'$

$$z + xz' = z^2 + 1$$

$$xz' = z^2 - z + 1$$

$$x \frac{dz}{dx} = z^2 - z + 1$$

$$\frac{dz}{z^2 - z + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z - 1}{\sqrt{3}} = \ln(cx)$$

$$\boxed{2 \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{\sqrt{3}\, x} = \sqrt{3} \ln(cx)}$$

О.Р

нема С.Р.

2. $y' = -\dfrac{x+y}{x-2y}$ (Да се уверимо: $y' = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{2y}{x}}$, $f(t) = \dfrac{1+t}{1-2t}$)

смена: $\boxed{\begin{array}{l} y = xz, \quad z = z(x) \\ y' = z + xz' \end{array}}$

$$y' = -\frac{1+\frac{y}{x}}{1-2\frac{y}{x}} \longrightarrow z + xz' = -\frac{1+z}{1-2z}$$

$$xz' = \frac{-2z^2+2z+1}{2z-1} \qquad x\frac{dz}{dx} = -2\,\frac{z^2+z+\frac{1}{2}}{2z-1}$$

$$\frac{2z-1}{z^2+z+\frac{1}{2}}\,dz = -2\cancel{x}\,dx$$

$$\int \frac{2z-1}{z^2+z+\frac{1}{2}}\,dz = -2\cancel{x}\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\underbrace{z^2+z+\tfrac{1}{2}}_{>0}| = c_1 - 2\ln|x|$$

$$\ln\left(z^2+z+\tfrac{1}{2}\right) = c_1 + \ln\frac{1}{x^2}$$

$$z^2+z+\frac{1}{2} = e^{c_1}\cdot\frac{1}{x^2} \quad /\cdot 2x^2$$

$$2y^2+2xy+x^2 = \underbrace{2e^{c_1}}_{C}$$

$$\underbrace{\boxed{x^2+2xy+2y^2 = C}}_{\text{О.Р.}} \qquad \text{нема С.Р.}$$

3 $$y'x^2 - xy = (x+y)^2\sqrt{\frac{y-x}{y+x}} \quad \Big/ : x^2$$

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1+\frac{y}{x}\right)^2\sqrt{\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}}$$

СМЕНА:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{y}{x} = z, \quad z = z(x) \\ y(x) = x \cdot z(x) \\ y'(x) = 1 \cdot z(x) + x \cdot z'(x) \end{array}}$$

$$z + xz' - z = (1+z)^2\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

$$x\frac{dz}{dx} = (1+z)^2\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

$$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\,\frac{1}{(1+z)^2}\,dz = \frac{dx}{x} \ \vee \ z=-1 \ \vee \ z=1$$

$$\int\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\,\frac{dz}{(1+z)^2} = \int\frac{dx}{x} \ \vee \ z=-1 \ \vee \ z=1$$

СМЕНА:

$$\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} = t$$

$$\frac{z-1}{z+1} = t^2$$

$$d\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = d(t^2)$$

$$\frac{dz}{(z+1)^2} = t\,dt$$

$$\int dt = \int\frac{dx}{x} \ \vee \ z=-1 \ \vee \ z=1$$

$$t = \ln x + C \ \vee \ z=-1 \ \vee \ z=1$$

$$\frac{z-1}{z+1} = (\ln x + C)^2 \ \vee \ z=-1 \ \vee \ z=1$$

$$\boxed{\frac{y-x}{y+x} = (\ln x + C)^2 \ \vee \ y=-x \ \vee \ y=x}$$