Јул 2019

Решити диференцијалну једначину

$$2xy\,dx + \left(x^2 + \frac{e^y}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}} + \cos^2(y)\right)dy = 0$$

$$P(x,y) = 2xy \qquad Q(x,y) = x^2 + \frac{e^y}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}} + \cos^2 y$$

$$P'_y = 2x \qquad Q'_x = 2x$$

$$\int P\,dx = \int 2xy\,dx = 2y\int x\,dx = 2y\cdot\frac{x^2}{2} = x^2 y$$

$$\int\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)dy =$$

$$= \int\left(x^2 + \frac{e^y}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}} + \cos^2 y - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y)\right)dy =$$

$$= \int \frac{e^y}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}}\,dy + \int \cos^2 y\,dy = I_1 + I_2$$

$$I_2 = \int \cos^2 y\,dy = \int \frac{1+\cos 2y}{2}\,dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\sin 2y$$

$$I_1 = \int \frac{e^y\,dy}{\sqrt{3-2e^y-2e^{2y}}} = \left[t = e^y\right] = \int \frac{dt}{\sqrt{3-2t-2t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-\left(t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{7}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2e^y+1}{\sqrt{7}}$$

Решење: $x^2 y + \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2e^y+1}{\sqrt{7}} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\sin 2y = const$

II кол 2018

Показати да дифер. ј-на

$$\left(2x + \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{y}\right)dx + \frac{1+x^2}{y}\,dy = 0 \qquad (*)$$

има интеграциони фактор $z = z(y)$, а затим је решити.

$$P(x,y) = 2x + \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{y} \qquad Q(x,y) = \frac{1+x^2}{y}$$

$$P'_y = -\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{y^2} \neq Q'_x = \frac{2x}{y}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{P'_y - Q'_x}{P\cdot t'_y - Q\cdot t'_x}\,dt$$

овде је $t = y$

$t'_y = 1,\ t'_x = 0,\ dt = dy$

$$= -\frac{-\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{y^2} - \frac{2x}{y}}{2x + \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{y}}\,dt =$$

$$= -\frac{\frac{-1-\sqrt{1+x^2}-2xy}{y^2}}{\frac{2xy+\sqrt{1+x^2}+1}{y}}\,dy = -\frac{-1}{y}\,dy = \frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dy}{y}$$

$\ln|z| = \ln|y|$ $\qquad z = y$ је интеграциони фактор

Проверимо тако што помножимо $(*)$ са y. Добијамо

$$\left(2xy + \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{y}\cdot y\right)dx + \frac{1+x^2}{y}\cdot y\cdot dy = 0$$

$$\underbrace{\left(2xy + 1 + \sqrt{1+x^2}\right)}_{P_1(x,y)}dx + \underbrace{(1+x^2)}_{Q_1(x,y)}dy = 0$$

$$P'_{1y} = 2x = Q'_{1y}$$

$$\int Q_1\, dy = \int (1+x^2)\, dy = (1+x^2)\int dy = (1+x^2)\cdot y$$

$$\int\left(P_1 - \frac{\partial}{\partial x}\int Q_1\, dy\right) dx = \int\left(2xy + 1 + \sqrt{1+x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\cdot y\right)\right) dx$$

$$= \int\left(2xy + 1 + \sqrt{1+x^2} - 2xy\right) dx = \int\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) dx = x + I_1$$

$$I_1 = \int \sqrt{1+x^2}\, dx \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx =$$

(II начин – парцијална
III начин: $x = tg\, t$
...)

$$= (Ax+B)\cdot\sqrt{1+x^2} + \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad /'$$

$$\sqrt{1+x^2} = A\cdot\sqrt{1+x^2} + (Ax+B)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad /\cdot\sqrt{1+x^2}$$

$$1+x^2 = A\cdot(1+x^2) + Ax^2 + Bx + \lambda$$

$$\begin{array}{lcl} 1 = 2A & & A = 1/2 \\ 0 = B & \Rightarrow & B = 0 \\ 1 = A + \lambda & & \lambda = 1/2 \end{array}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Решење је

$$(1+x^2)\cdot y + x + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = const$$

Једначину је могуће и (једноставније) решити као линеарну Д.Ј. Заиста, ако изразимо y' из почетне једначине:

$$\frac{1+x^2}{y}\, y' + 2x + \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{y} = 0 \quad /\cdot\frac{y}{1+x^2}$$

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = -\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$ добијамо линеарну Д.Ј.

Решити је за вежбу

Решити дифер. ј-ну $y = axy' + \ln^2 y'$ за $a \in \mathbb{R}$

Уводимо смену $y' = p$, $dy = p\,dx$

$y = axp + \ln^2 p$ одакле је диференцирањем:

$dy = a \cdot dx \cdot p + ax \cdot dp + 2\ln p \cdot \frac{1}{p} \cdot dp$

$p\,dx = ap\,dx + \left(ax + \frac{2\ln p}{p}\right) dp$

I $a = 1$ – тада је у питању Клерова д.ј.

$\left(x + \frac{2\ln p}{p}\right) dp = 0$ <

$dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx + \ln^2 C$

$x + \frac{2\ln p}{p} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\ln p}{p} \\ y = -2\ln p + \ln^2 p \end{cases}$

II $a \neq 1$ – тада је у питању Лагранжова д.ј-на:

$p(1-a) \cdot dx = \left(ax + \frac{2\ln p}{p}\right) dp$, и за $dp \neq 0$ добијамо

$\frac{dx}{dp} + \frac{a}{(a-1)p} \cdot x = \frac{2\ln p}{(1-a) \cdot p^2}$ а ово је линеарна д.ј.

чије је опште решење:

$$x = e^{-\int \frac{a}{(a-1)p} dp} \cdot \left(C + \int \frac{2e^{\int \frac{a}{(a-1)p} dp} \ln p}{(1-a) \cdot p^2} dp \right) =$$

$$= e^{-\frac{a}{a-1} \cdot \ln p} \left(C + \frac{2}{1-a} \int \frac{e^{\frac{a}{a-1} \cdot \ln p}}{p^2} \ln p\, dp \right)$$

$$= p^{\frac{a}{1-a}} \left(C + \frac{2}{1-a} \underbrace{\int p^{\frac{2-a}{a-1}} \cdot \ln p\, dp}_{I} \right)$$

$$I = \begin{bmatrix} u = \ln p & du = \frac{1}{p} dp \\ dv = p^{\frac{2-a}{a-1}} dp, & v = (a-1) \cdot p^{\frac{1}{a-1}} \end{bmatrix}$$

$$= (a-1) \cdot \ln p \cdot p^{\frac{1}{a-1}} - (a-1) \int p^{\frac{1}{a-1} - 1} dp =$$

$$= (a-1) \cdot \ln p \cdot p^{\frac{1}{a-1}} - (a-1)^2 \cdot p^{\frac{1}{a-1}}, \text{ па је}$$

$$x = C \cdot p^{\frac{a}{1-a}} + \frac{2}{p}(a - 1 - \ln p), \quad y = aC \cdot p^{\frac{1}{1-a}} + 2a(a-1-\ln p) + \ln^2 p$$

ЈУН 2018

$$y^2 x y' = x e^x - \frac{1}{3} y^3$$

$$y' = \frac{1}{y^2} \cdot e^x - \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{x}$$

$$y' + \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{x} = e^x \cdot y^{-2} \rightarrow \text{БЕРНУЛИЈЕВА Д. Ј.}$$

СМЕНА КОЈОМ ЈЕ СВОДИМО НА ЛИНЕАРНУ $z = y^{1-(-2)} = y^3$

$$y = z^{1/3}, \quad y' = \frac{1}{3} z^{-2/3} \cdot z'$$

$$\frac{1}{3} \cdot z^{-2/3} \cdot z' + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{1/3}}{x} = e^x \cdot z^{-2/3} \quad / \cdot 3 \cdot z^{2/3}$$

$$z' + \frac{1}{x} \cdot z = 3 e^x$$

$$z = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int 3 \cdot e^x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) =$$

$$= e^{-\ln|x|} \left(C + \int 3 \cdot e^x \cdot e^{\ln|x|} dx \right) \underset{=}{\overset{\text{УЗМИМО } x>0}{=}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(C + \int 3x \cdot e^x dx \right) =$$

$u = x, \ v = e^x$

$$= \frac{1}{x} \left(C + 3 \cdot (x e^x - e^x) \right)$$

$$z = \frac{C}{x} + \frac{3e^x}{x} (x-1)$$

Вратимо смену $y = z^{1/3}$, тј $z = y^3$

$$y^3 = \frac{C}{x} + \frac{3e^x}{x} \cdot (x-1)$$

СЕПТ. 2017

$$y - y' \cdot x - y'^3 - y'^2 = 0$$

уводимо параметризацију: $y' = p$

$$y = px + p^3 + p^2 \quad /d \implies dy = \cancel{p\,dx} + x\,dp + 3p^2 dp + 2p\,dp$$

$\underset{p\,dx}{dy}$

$$0 = (x + 3p^2 + 2p)\,dp$$

$x = -3p^2 + 2p, \ y = p \cdot (-3p^2 + 2p) + p^3 + p^2$ с.р.

$dp = 0, \ p = C, \ y = Cx + C^3 + C^2$ о.р.

Сентябрь 2017

$$xy^2 + 2(x^2+1)\cdot y\cdot y' = \sqrt{x^2+1}\cdot\frac{\sin^5 x\cdot\cos^4 x - 1}{\sin^3 x} \quad \Big/ : 2(x^2+1)y$$

$y=0$ лин. реш.

$$\frac{xy}{2(x^2+1)} + y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sin^5 x\cdot\cos^4 x - 1}{\sin^3 x}\cdot\frac{1}{y}$$

Бернулли Д. Э.

смена $z = y^{1-(-1)} = y^2 \Rightarrow y = z^{1/2},\ y' = \frac{1}{2}z^{-1/2}\cdot z'$

$$\frac{1}{2}\cdot z^{-1/2}\cdot z' + \frac{x}{2(x^2+1)}\cdot z^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sin^5 x\cdot\cos^4 x - 1}{\sin^3 x}\cdot z^{-1/2}$$

$\Big/ \cdot 2z^{1/2}$

$$z' + \frac{x}{x^2+1}\cdot z = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sin^5 x\cdot\cos^4 x - 1}{\sin^3 x}$$

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx \overset{t=x^2+1}{=\!=} \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln(x^2+1)^{1/2}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sin^5 x\cdot\cos^4 x - 1}{\sin^3 x}\cdot e^{\ln(x^2+1)^{1/2}}dx = \int\left(\sin^2 x\cdot\cos^4 x - \frac{1}{\sin^3 x}\right)dx$$

$$I_1 = \int\sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cdot\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \ldots$$

$$I_2 = \int\frac{dx}{\sin^3 x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x} \overset{t=\cos x}{=\!=} \int\frac{-dt}{(1-t^2)^2} = \ldots$$

$$y^2 = z = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(C + I_1 + I_2\right)$$

Scanned with Cam