

Deo I

Statika

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

GLAVA 1

UVOD

1.1 Istorijat

Mehanika je nauka koja se bavi postavljanjem modela tela u prirodi i proučavanjem njihovog kretanja pod dejstvom različitih mehaničkih uticaja. Pojam "mekanika" prvi je uveo Aristotel (384-322 p.n.e.) u delu "Problemi mehanike". Međutim, za osnivača se može smatrati Arhimed iz Sirakuze (287-212 p.n.e.), koji je uočio osnovna svojstva sile i u delu "O ravnoteži" postavio teoriju poluge. On je izmislio: kotur, čekrk, zavrtnj, kao i mnoge druge proste mašine. Ipak, tek je I. Njutn¹ (1643-1727) matematički formulisao osnovne principe takozvane klasične mehanike. Zbog toga se klasična mehanika ponekad zove i Njutnova mehanika. Njutnovi aksiomi su i danas osnova svih inženjerskih mehaničkih proračuna.

Klasična mehanika zasniva se na veoma malom broju opštevažećih principa. Ipak, iz nje se razvio veliki broj posebnih, ali u suštini srodnih, disciplina i to uglavnom po dve osnove: zavisno od karaktera kretanja tela i od svojstva materijala od koga su sačinjeni.

Prema karakteru kretanja tela, mehanika se deli na statiku i dinamiku, sa brojnim podoblastima. Statika se bavi izučavanjem uslova mirovanja (ravnoteže) tela, dok dinamika² izučava zakone kretanja materijalnih tela.

¹U delu "Philosophiae naturalis principia" (1687) Njutn je izložio čuvene aksiome klasične mehanike.

²Razvoj dinamike započet je znatno kasnije, tek u XVI veku, a najveće zasluge se pripisuju G. Galileju (1564-1642), zatim I. Njutnu, L. Ojleru (1707-1783), kao i Ž. Dalamberu (1717-1783) i Ž. Lagranžu (1736-1813).

Prema modelu materijalnih tela koji razmatra, mehanika se deli na:

- **mehaniku krutih tela**, tj. tela čija se deformacija, iz bilo kojih razloga, opravdano zanemaruje,
- **mehaniku čvrstih** (deformabilnih) **tela**. Discipline koje se bave ovom problematikom su, na primer: teorija elastičnosti, teorija plastičnosti, teorija viskoelastičnosti, itd.;
- **mehaniku fluida** (tečnosti i gasovi).

Ove podele treba prihvatiti uslovno. Njihova lista bi mogla biti znatno šira, ali i drugačija.

1.2 Pojam krutog tela i sistema. Zadaci statike

Statika je oblast mehanike u kojoj se izučava ravnoteža jednog ili više krutih tela na koja deluju sile. Za telo se kaže da je u **ravnoteži** kada se ono ne kreće (miruje) u odnosu na okolinu.

Kruto telo je takvo telo koje se pod dejstvom ma kako velikog opterećenja ne deformiše, tj. rastojanje između ma koje dve tačke tog (opterećenog) tela ostaje nepromenjeno. Ako se to rastojanje menja, telo je **deformabilno**, bilo da se radi o čvrstom telu ili fluidu.

☞ Napomenimo da se za deformabilna tela u ravnoteži mogu primeniti isti uslovi ravnoteže kao i za kruta tela, pa metode statike nalaze širu primenu.

Sistem krutih tela, ili kratko **sistem**, čini jedno ili više krutih tela čija se ravnoteža (kretanje) izučava.

Osnovni zadaci statike su:

- svođenje datog sistema sila na prostiji oblik i
- nalaženje uslova pod kojim će telo, na koje deluje sistem sila, biti u ravnoteži.

GLAVA 2

OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

2.1 Sila. Njutnovi principi

Pojam "sila" često se koristi u svakodnevnom životu da izrazi: jačinu, moć ili uzrok promene stanja kretanja ili mirovanja tela.

U mehanici se pod pojmom **sila** podrazumeva uzrok koji menja stanje kretanja ili mirovanja tela. Ako se telo nalazi u stanju mirovanja, onda će se ono pod dejstvom određene sile pokrenuti i nadalje kretati, sve dok ga neki drugi uzrok - sila - ne zaustavi. Dakle, **sila** je veličina koja predstavlja meru mehaničkog međudejstva materijalnih tela. Međutim, ovakva definicija sile nije potpuna. Naime, iz ove definicije se ne vidi priroda sile (vektor, skalar). Zbog toga ćemo je definisati preko Njutnovih aksioma (principa) mehanike, koji je u potpunosti određuju i po prirodi, i po veličini i ukazuju na njen izvor.

Pojam sile, preko osnovnih veličina (dužina, vreme, masa), definisao je Njutn ("Axiommata sive leges motus") u obliku četiri aksioma (principa)¹:

1° Svako telo² ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja, sve dok ne bude prinuđeno da to svoje stanje promeni. Ovaj Njutnov aksiom ukazuje na egzistenciju sile.

2° Proizvod mase tela i njegovog ubrzanja³ jednak je sili koja deluje na

¹U literaturi se za ove Njutnove aksiome često koristi i pojam ZAKONI.

²Pod telom u ovim aksiomama podrazumevamo materijalnu tačku.

³Ubrzanje je veličina koja se definiše u kinematici. Ubrzanje je drugi izvod vektora položaja ili prvi izvod brzine po vremenu ili promena brzine u jedinici vremena.

to materijalno telo. Ovaj aksiom ukazuje na veličinu (intenzitet) sile.

- 3° Dva tela deluju jedno na drugo silama koje imaju iste intenzitete i pravce, a suprotne smerove.

Iz ovog aksioma sledi da izvor sile treba tražiti u materijalnim telima.

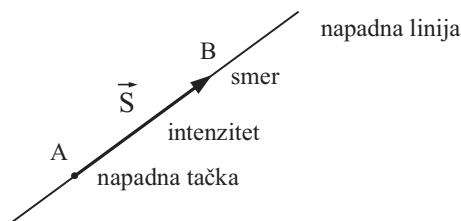
- 4° Pri istovremenom dejstvu dve sile na materijalno telo, telo se kreće po dijagonali paralelograma, konstruisanog nad tim silama kao stranama, za isto vreme za koje bi se kretala po pojedinim njegovim stranama pri dejstvu svake sile posebno.

☞ Napomena. Ovaj princip poznat je kao **princip nezavisnosti dejstva sile**. Njutn ga je formulisao kao dopunu drugom aksiomu. On određuje prirodu sile, ukazujući da se ta dejstva sabiraju geometrijski, tj. da je sila vektorska veličina.

Kao što je napred rečeno, na osnovu Njutnovih aksioma, sila je vektorska veličina. Kao svaki vektor i sila može da se predstavi: grafički i/ili analitički.

Grafički silu prikazujemo orijentisanom duži⁴ (vidi sliku 2.1), recimo $\overrightarrow{AB}$, pri čemu je:

- A napadna tačka,
- napadna linija (pravac dejstva sile) je prava koja prolazi kroz tačke A i B ,
- smer je od A ka B ,
- intenzitet je dužina $\overline{AB}$.



Slika 2.1: Grafički prikaz sile.

Za analitičko predstavljanje vektora (sile) uvodi se koordinatni sistem. Najčešće se koristi desni Dekartov pravougli koordinatni sistem (sl. 2.2).

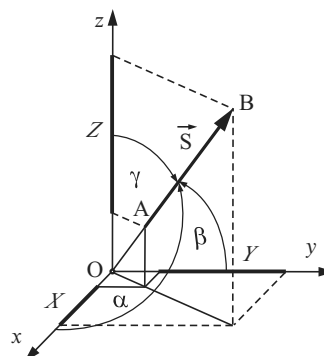
⁴Vektorske veličine obeležavaju se strelicom iznad slova koje ih označavaju. Međutim, sve je češći način obeležavanja vektorskih, kao i tenzorskih, veličina "masnim" - podebljanim slovom. U ovoj knjizi koristićemo ovaj drugi način, jer je u savremenoj literaturi češći, mada ćemo i dalje vektorske veličine, na slikama, označavati strelicom, jer u štampi može da dođe do nenamernog podebljanja slova.

U ovom slučaju silu prikazujemo preko njenih komponenti

$$\mathbf{S} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

gde su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ ortovi x , y i z ose, respektivno.

Pravac i smer ovog vektora određen je uglovima α , β i γ , a intenzitet dužinom $\overline{AB}$. Tačka A je napadna tačka sile.



Slika 2.2: Prikazivanje sile u Dekartovom koordinatnom sistemu.

Na kraju recimo da je jedinica sile, u međunarodnom sistemu jedinica (SI - Systeme International d'Unites) Njutn, a označava se sa $[N]$.

2.2 Vrste sila

2.2.1 Spoljašnje sile

Da bismo razmatrali ravnotežu nekog tela, uklonimo sva tela, koja su u kontaktu sa posmatranim telom, pa uticaj uklonjenih tela zamenimo silama. Ove sile dovode do deformacije posmatranog tela⁵ i predstavljaju takozvane **spoljašnje sile**.

Ove (spoljašnje) sile možemo da podelimo na više načina. Jedna od podela je na: površinske i zapreminske.

Površinske sile su one sile koje se prenose preko dodirnih površi tela koja su u kontaktu, tj. sile koje deluju samo na spoljašnje tačke površi posmatranog tela.

Kao primere površinskih sila možemo navesti: pritisak vode u rezervoaru, sile vetra. Zajedničkim imenom nazivamo ih ravnomerno i neravnomerno podeljeno površinsko opterećenje.

U površinske sile, pored spoljašnjih sila, spadaju i reakcije veza, koje predstavljaju uticaj elemenata vezanih za posmatrani element konstrukcije i zajedno čine sistem sila koje se nalaze u stanju ravnoteže.

Zapreminske sile su one sile koje deluju na svaki element zapremine. Primer za zapreminske sile je gravitaciona sila.

⁵U delu Statika nećemo da se bavimo deformacijom tela, već će zadatak biti da se odrede sile koje deluju na telo.

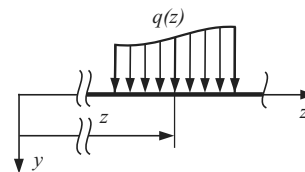
Kao primere zapreminskih sila možemo navesti: težinu tela, silu inercije, kao i centrifugalnu silu, silu magnetnog privlačenja itd.

Sile možemo da podelimo i na: koncentrične i neprekidno rasporedne.⁶

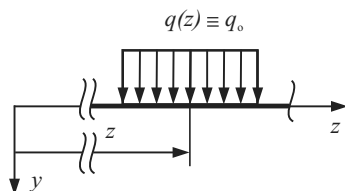
Posebna vrsta površinskog opterećenja, koje se najviše pojavljuje u proračunima inženjerskih konstrukcija, jeste koncentrično opterećenje. Koncentrično opterećenje može biti definisano u obliku koncentrisane sile i koncentrisanog momenta. Pojam koncentrisanog opterećenja treba shvatiti uslovno, jer i koncentrisano opterećenje deluje po nekoj površi, ma koliko ona bila mala.

Spoljašnje opterećenje može biti i neprekidno (kontinualno) raspoređeno duž ose (recimo z) tela. Ono ima dimenziju sile po jedinici dužine $[N/m]$ ⁷, a zakon njegove promene $q(z)$ je, u opštem slučaju, proizvoljna funkcija koordinate z (sl. 2.3).

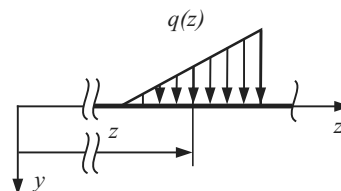
Navodimo neke jednostavne zakone promene linijski raspodeljenog opterećenja. Ako je $q(z) = q_0 = \text{const.}$ tada govorimo o **jednoliku raspodeljenom opterećenju** (slika 2.4). Ako je $q(z)$ linearna funkcija koordinate z , opterećenje je raspodeljeno po trouglu – ”trougaono opterećenje” (slika 2.5).



Slika 2.3: Kontinualno opterećenje.



Slika 2.4: Konstantno kontinualno opterećenje.



Slika 2.5: Trougaono opterećenje.

2.2.2 Unutrašnje sile

Unutrašnje sile su sile uzajamnog dejstva između čestica istog tela.

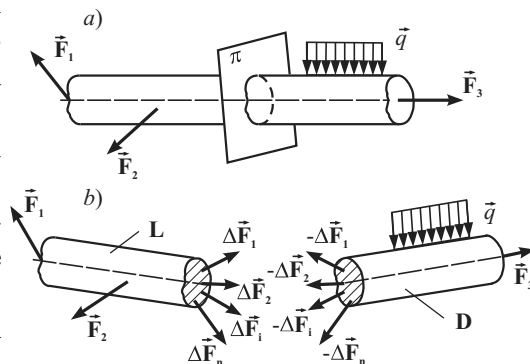
Da bismo odredili unutrašnje sile, koristimo metodu zamišljenog presecanja napregnutog tela, nekom ravni. Posmatrajmo neko telo opterećeno

⁶Nazivaju se i kontinualno opterećenje ili linijsko opterećenje (u 2-D).

⁷Ovo se odnosi samo na linijske nosače. Kod ravanskih nosača bilo bi sila po površini.

spoljašnjim silama (slika 2.6). Neka se ovaj sistem sila, koje deluju na to telo, nalazi u stanju ravnoteže.

Zamislamo da smo ovo telo presekli nekom ravni π , a zatim posmatramo svaki deo posebno (vidi sliku 2.6b). Na zamišljenoj presečnoj površi tela, unutrašnje sile postaju spoljašnje i predstavljaju uticaj uklonjenog dela na deo koji se posmatra. Na ovaj način će, ako je ceo sistem bio u stanju ravnoteže, i svaki pojedinačni deo (razmatran na gore opisan način) biće u stanju ravnoteže.



Slika 2.6: Prikaz unutrašnjih sila.

Neophodno je naglasiti da su pri zamišljenom presecanju nekom ravni, unutrašnje sile, za levi deo i desni deo preseka, istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera, tako da pri ponovnom zamišljenom spajanju dolazi do njihovog uravnotežavanja (sl.2.6b).

2.2.3 Sistem sila. Rezultanta

Sistem sila je skup svih sila koje deluju na posmatrano telo. Neka na telo deluju sile $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_i, \dots, \mathbf{S}_n$, u tačkama $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$, respektivno. Tada se sistem sila simbolički predstavlja u obliku $(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n)$, ili kraće sa $(\mathbf{S}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sistem sila može da bude:

- **ravanski** (napadne linije svih sila leže u jednoj ravni) ili
- **prostorni** (napadne linije sila proizvoljno su raspoređene u prostoru ⁸).

Pored ove podele, sistem sila može da bude i:

- **sučeljni** (napadne linije svih sila seku se u jednoj tački),
- **paralelan** (napadne linije sila su međusobno paralelne) i

⁸Pod prostorom podrazumevamo trodimenzionalni Euklidski prostor. Pojave koje izučava klasična mehanika dešavaju se u "Svetu događaja" W , koji čini trodimenzionalni Euklidski prostor E^3 u kome se određuje mesto, i jednodimenzionalni Euklidski prostor E u kome se određuje vreme događanja, tako da je (simbolički napisano) $W = E^3 \times E$.

- **proizvoljan** (napadne linije sila zauzimaju proizvoljan položaj u ravni ili prostoru).

☞ Napomena. Ako se napadne linije svih sila sistema poklapaju, tada takav sistem sila nazivamo **kolinearan sistem sila**.

Dva sistema sila $(\mathbf{S}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ i $(\mathbf{S}_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, su **ekvivalentna**, ako pri zameni jednog sistema drugim ne dolazi do promene stanja kretanja (mirovanja) tela. Specijalno, ako je jedna sila ekvivalentna datom sistemu sila, tada se ona naziva **rezultanta** i obeležava se sa **R**.

2.2.4 Veze, vrste veza i njihove reakcije

Telo čiji je prostor mogućih položaja ograničen naziva se **vezano telo**, inače je telo slobodno. Tela koja sprečavaju pomeranje posmatranog tela nazivaju se **veze**. Ako veze dopuštaju telu neko pomeranje, tada kažemo da je posmatrano telo delimično vezano.

Sila kojom veza deluje na dato telo i sprečava njegovo pomeranje naziva se **reakcija veze**.

Na osnovu prethodnog, sile možemo da podelimo i na:

- **aktivne** sile (sile koje izazivaju kretanje ili uravnotežavanje tela) i
- **sile reakcija veza** ili kraće **reakcije**. Ove sile se nekad nazivaju i pasivne sile (sile koje, za razliku od aktivnih, ne mogu da izvrše pomeranje tela). U ove sile spadaju, na primer, otpor veze, otpor trenja, otpor vazduha, itd.

Da bi se odredili uslovi ravnoteže nekog sistema, potrebno je uzeti u obzir sve spoljašnje sile, aktivne sile i sile reakcije. Otuda je veoma važno da se, zavisno od vrste veza, pravilno odrede pravci reakcija veza tog sistema.

Kada razmatramo sistem tela, veze delimo na:

- **spoljašnje** (veze kojima je posmatrani sistem povezan sa okolinom) i
- **unutrašnje** (veze između tela posmatranog sistema).

Za vezu kažemo da je **idealna** ako je njena reakcija upravna na pravac beskonačno malog vezom dopuštenog pomeranja tačke tela u kojoj deluje reakcija veze, ili **veza je idealna** ako se, iz bilo kojih razloga, trenje može zanemariti. Idealne veze u prirodi ne postoje, ali je veliki broj problema u kojima se sile trenja mogu zanemariti u poređenju sa drugim silama. Ipak, postoje i takvi problemi u kojima se trenje, makako malo, mora uzeti u obzir.

2.2.5 Princip oslobađanja od veza

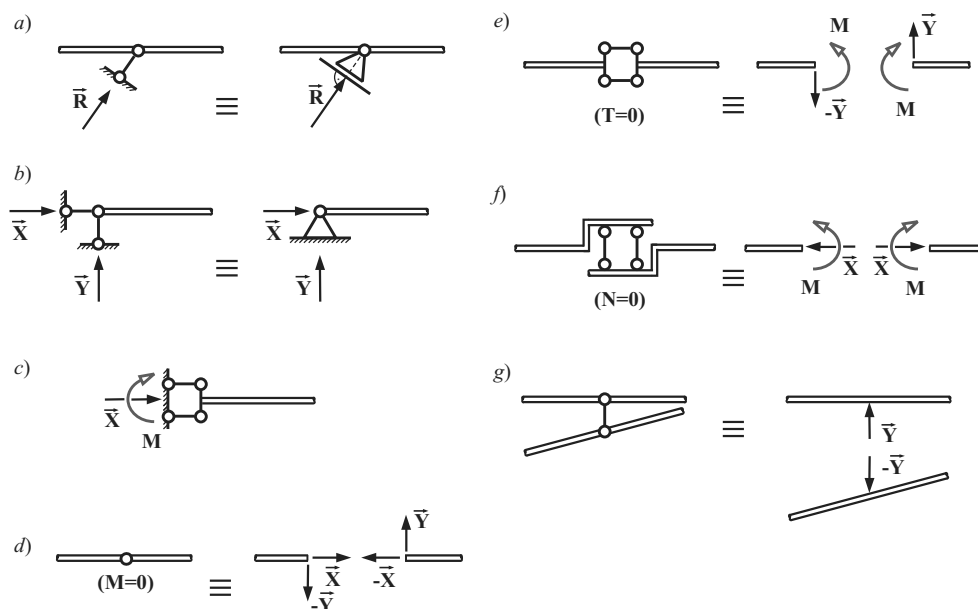
Proučavanje ravnoteže vezanog tela omogućava nam princip oslobađanja od veza, koji može da se iskaže, na sledeći način:

Princip 1 (oslobađanja od veza) *svako vezano (neslobodno) telo može da se smatra slobodnim ako se veze uklone, a njihov uticaj zameni silama veze (reakcijama)(sl. 2.8a).*

Vrlo je važno, pri rešavanju zadataka u statici, unapred znati pravce sila reakcije, ako je moguće. Primer na slici 2.8a ilustruje pravce reakcija u tačkama dodira A , B i C , tela ℓ sa okolinom.

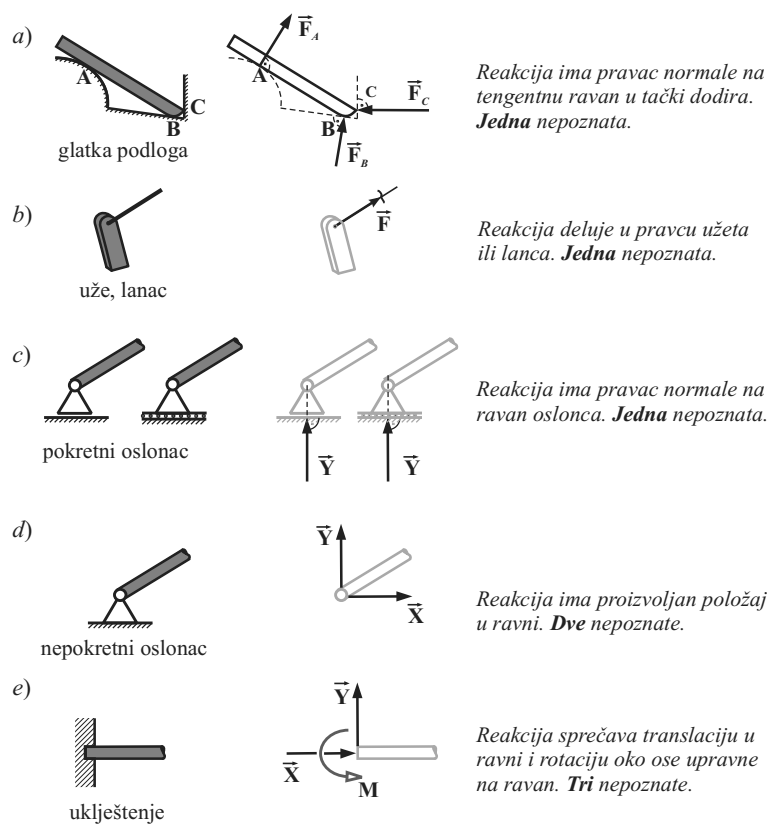
Postoji više načina da se telo (sistem) veže za druga tela: na primer pomoću užeta, lanca, štapa, zgloba, raznih oslonaca itd. Otuda ima i mnogo načina na koje deluju reakcije tih veza i nemoguće ih je sve obuhvatiti. Zato će ovde biti reči samo o nekim najkarakterističnijim i najčešće korišćenim vezama.

Na sledećim slikama prikazani su neki slučajevi veza i odgovarajuće reakcije.

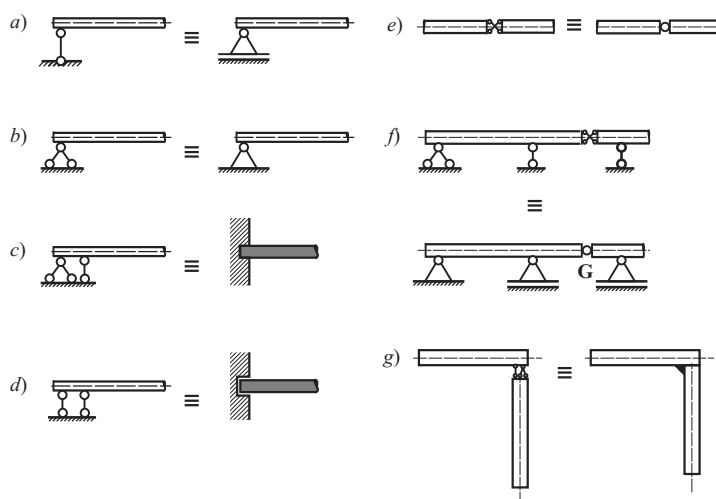


Slika 2.7: Primeri nekih veza [7].

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!



Slika 2.8: Tipovi mogućih načina oslanjanja linijskih elemenata i odgovarajuće reakcije [11].



Slika 2.9: Tipovi mogućih načina oslanjanja linijskih elemenata [5].

2.3 Moment sile za tačku

Iz iskustva je poznato da ako na slobodno telo deluje jedna sila $\mathbf{S}$, telo će se pomerati duž napadne linije sile. Dakle, telo nije u ravnoteži. Ako to telo vezemo u nekoj tački O , koja se nalazi na napadnoj liniji sile, telo će biti u ravnoteži, jer se sila $\mathbf{S}$ i reakcija veze u tački O uravnotežavaju. Međutim, ako telo vezemo za tačku koja ne leži na napadnoj liniji sile, ono će se obrtati oko tačke O (sl. 2.10). Prema tome, dejstvo sile na kruto telo može imati i obrtni efekat. Obrtni efekat sile na telo izražava se veličinom koju nazivamo **moment**.

Definicija:

Moment sile za tačku O je vektor $\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}}$ definisan vektorskim proizvodom

$$\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}} = \mathbf{r} \times \mathbf{S}, \quad (2.1)$$

gde je: $\mathbf{r}$ - vektor položaja napadne tačke A sile $\mathbf{S}$ ($\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$), O - momentna tačka.

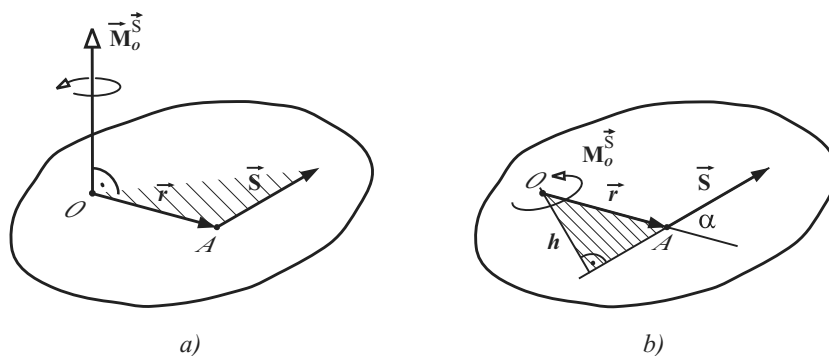
Ravan koju obrazuju vektori $\mathbf{r}$ i $\mathbf{S}$ ⁹ naziva se **ravan obrtanja**.

Iz definicije vektorskog proizvoda sledi da je moment sile za tačku vektor upravan na ravan koju čine vektori $\mathbf{r}$ i $\mathbf{S}$, tj. upravan na ravan obrtanja. Dakle, pravac momenta je pravac normale na ravan obrtanja.

Intenzitet vektora momenta sile za tačku se određuje sa

$$M \equiv |\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}}| = |\mathbf{S}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot |\sin \alpha| \quad (2.2)$$

gde je α - ugao između pravaca vektora $\mathbf{r}$ i $\mathbf{S}$.



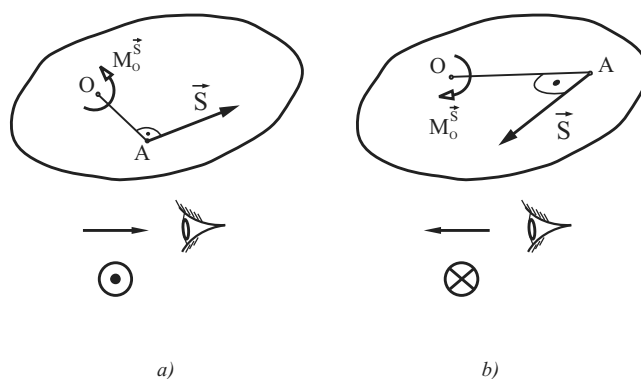
Slika 2.10: Moment sile za tačku.

⁹Dve prave, koje se seku ili su paralelne, određuju ravan.

Rastojanje između momentne tačke O i napadne linije sile naziva se **krak sile** (na slici 2.10b označen je sa h). Dakle, intenzitet momenta sile za tačku jednak je proizvodu intenziteta sile i kraka sile, tj.

$$M = S \cdot h. \quad (2.3)$$

Na kraju napomenimo da se smer ovog vektora određuje pravilom desne ruke (zavrtnja). Smer momenta je pozitivan ako se sa vrha vektora zamišljeno obrtanje tela, pod dejstvom sile $\vec{S}$, vidi u matematički pozitivnom smeru (smeru suprotnom od smera obrtanja kazaljke na časovniku), što se često označava kružićem i tačkom u centru (vidi sliku 2.11a).¹⁰



Slika 2.11: Moment za tačku - smer.

Jedinica mere intenziteta momenta sile za tačku, u SI sistemu, je $[Nm]$ (Njutnmetar).

2.3.1 Svojstva momenta sile za tačku

Navedimo neka svojstva momenta sile za tačku.

- Moment sile za tačku zavisi od izbora momentne tačke (vektor vezan za tačku).
- Moment sile za tačku ne menja se pri promeni napadne tačke sile duž njene napadne linije (krak sile se ne menja; smer, pravac i intenzitet sile ostaju isti).

¹⁰Zapazimo da je smer momenta sile za tačku izabran u skladu sa orijentacijom koordinatnog sistema ("desni"). Promenom orijentacije sistema menja se i smer vektorskog proizvoda. Vektori koji imaju tu osobinu zovu se "aksijalni vektori".

- Moment sile za tačku jednak je nuli kada momentna tačka leži na napadnoj liniji sile (krak je jednak nuli).
- Promenom smera sile $\mathbf{S}$ menja se i smer momenta sile, tj. ako je $\mathbf{S}_1 = -\mathbf{S}_2$ ($|\mathbf{S}_1| = |\mathbf{S}_2|$), tada je

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{S}_1) = -\mathbf{M}_O(\mathbf{S}_2). \quad (2.4)$$

2.3.2 Analitičko određivanje momenta sile za tačku

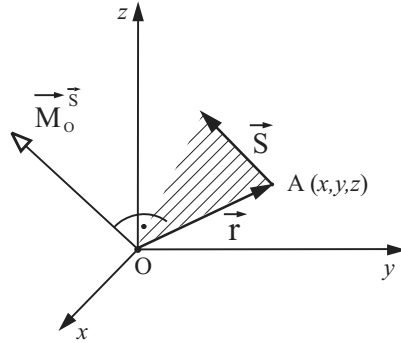
Postavimo u momentnu tačku koordinatni početak O , Dekartovog pravouglonog koordinatnog sistema (sl. 2.12).

Neka sila $\mathbf{S}$ deluje u tački tela A . Vektor položaja tačke A i silu $\mathbf{S}$ možemo da prikazemo preko koordinata izrazima:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{S} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad (2.6)$$

gde su x, y, z - koordinate tačke A , odnosno projekcije vektora $\mathbf{r}$ na koordinatne ose, a X, Y, Z - projekcije sile na odgovarajuće ose.



Slika 2.12: Moment sile za tačku - analitički.

Poznato je, iz vektorske algebre, da se vektorski proizvod može prikazati simboličnom determinantom¹¹, tj.

$$\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}} = \mathbf{r} \times \mathbf{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

odakle, posle razvijanja determinante, dobijamo

$$\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}} = \mathbf{i}(yZ - zY) + \mathbf{j}(zX - xZ) + \mathbf{k}(xY - yX). \quad (2.8)$$

Međutim, kako se $\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}}$, kao svaki vektor, može prikazati i u obliku

$$\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}} = M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k}, \quad (2.9)$$

¹¹Determinanta je skalarna vrednost, a ovde razvijanjem dobijamo vektor, pa zbog toga kažemo "simbolička".

gde su M_{Ox} , M_{Oy} i M_{Oz} projekcije momenta sile na odgovarajuće ose, to upoređujući (2.9) sa (2.8), dobija se:

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= yZ - zY, \\ M_{Oy} &= zX - xZ, \\ M_{Oz} &= xY - yX. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Intenzitet momenta sile za tačku određen je sa

$$M_O^S = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \quad (2.11)$$

a pravac i smer su određeni kosinusima uglova:

$$\cos \alpha = \frac{M_{Ox}}{M_O^S}, \quad \cos \beta = \frac{M_{Oy}}{M_O^S}, \quad \cos \gamma = \frac{M_{Oz}}{M_O^S}, \quad (2.12)$$

gde su α , β i γ uglovi koje vektor momenta sile zaklapa sa osama Ox , Oy i Oz , respektivno.

Dakle, moment sile za tačku je u potpunosti određen ako znamo koordinate napadne tačke sile (ili bilo koje tačke na napadnoj liniji sile, jer smo pokazali da se moment sile ne menja ako se napadna tačka pomeri duž napadne linije, videti osobinu na str. 16) i ako su poznate projekcije sile na ose izabranog koordinatnog sistema.

2.4 Moment sile za osu

Pored obrtanja tela oko tačke, sila može da izazove i obrtanje tela oko ose.¹² Mera obrtnog dejstva sile oko ose naziva se **moment sile za osu**.

Definicija:

Moment sile $\mathbf{S}$ za osu ℓ je projekcija momenta sile za tačku O na osu ℓ , tj.

$$M_\ell = \mathbf{M}_O^{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\ell}_O, \quad (2.13)$$

gde je $\boldsymbol{\ell}_O$ ort ose ℓ , $O \in \ell$.

¹²Pri ravanskom kretanju, telo koje se okreće oko tačke, u stvari, okreće se oko ose u trodimenzionom prostoru.

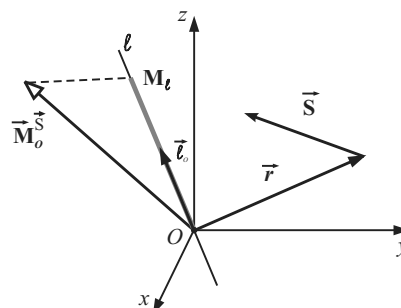
Koristeći definiciju momenta sile za tačku (2.1), moment sile za osu može da se predstavi i u obliku

$$M_\ell = (\mathbf{r} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\ell}_O. \quad (2.14)$$

Ovaj mešoviti vektorski proizvod možemo da prikažemo i u analitičkom obliku. Naime, ako je

$$\boldsymbol{\ell}_O = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}, \quad (2.15)$$

gde su α , β i γ uglovi koje obrazuje ort $\boldsymbol{\ell}_O$ sa Ox , Oy i Oz osama, respektivno, tada je



Slika 2.13: Moment sile za osu.

$$M_\ell = (\mathbf{r} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\ell}_O = \begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

U specijalnom slučaju, kada se osa ℓ poklapa sa jednom od osa, recimo sa Ox - osom ($\alpha = 0, \beta = \gamma = \pi/2$), dobijamo

$$M_x = \begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = yZ - zY. \quad (2.17)$$

Isti rezultat bismo dobili i ako iskoristimo (2.8) i (2.13), tj.

$$M_x = \mathbf{M}_O^S \cdot \mathbf{i} = (M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = M_{Ox} = yZ - zY. \quad (2.18)$$

2.5 Spreg sila

Posmatrajmo dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova. Ovaj sistem sila nije u ravnoteži, jer sile nemaju zajedničku napadnu liniju (sl. 2.14). Intuitivno je jasno da ove sile mogu da izvrše samo obrtanje (rotaciju) oko ose koja je upravna na ravan u kojoj leže ove sile.

Definicija:

Spreg sila predstavlja sistem od dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova.

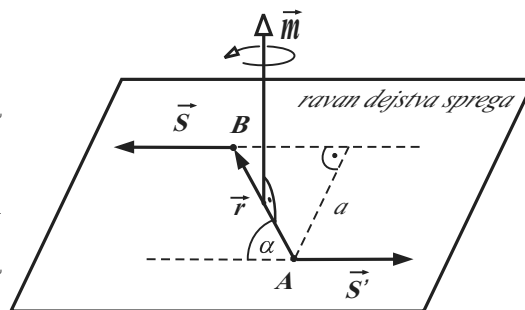
Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Ravan koju određuju sile sprega naziva se **ravan dejstva sprega**. Rastojanje između sila sprega naziva se **krak sprega**. Sile koje čine spreg nazivaju se **sile sprega**. Oznaka za spreg je $(\mathbf{S}, \mathbf{S}')$.

Efekat obrtanja karakteriše se **momentom sprega**.

Moment sprega zavisi od:

- intenziteta sile sprega i kraka sprega,
- položaja ravni dejstva sprega i
- smera obrtanja u ravni dejstva sprega.



Slika 2.14: Spreg sila.

Odavde zaključujemo da je moment sprega vektorska veličina.

Definicija:

Moment sprega sila je vektor određen vektorskim proizvodom

$$\mathfrak{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{S}, \quad (2.19)$$

gde je $\mathbf{r}$ - vektor položaja napadne tačke sile sprega, a $\mathbf{S}$ - sila sprega.

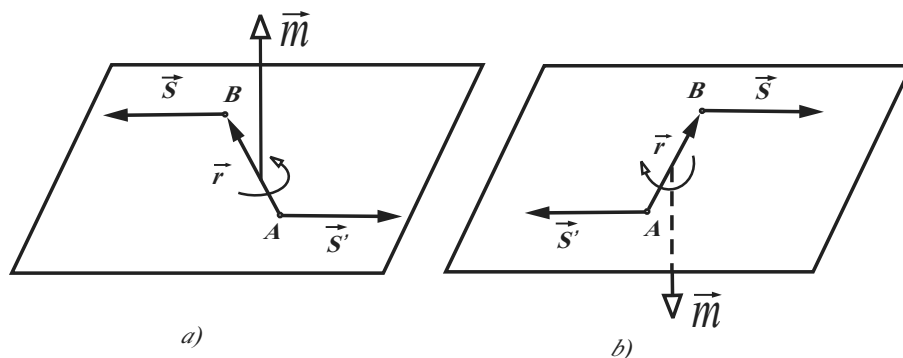
Iz prethodne definicije sledi (sl. 2.14) da je:

- intenzitet momenta sprega određen sa

$$\mathfrak{M} = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{S}| \cdot \sin \alpha = a \cdot S, \quad (2.20)$$

- pravac momenta sprega je pravac normale na ravan dejstva sprega.

Vektor momenta sprega usmeren je na onu stranu prostora odakle se obrtno dejstvo sprega vidi kao matematički pozitivno (sl. 2.15). Ovaj vektor je slobodan vektor i može da se slobodno, paralelno, premešta u prostoru.

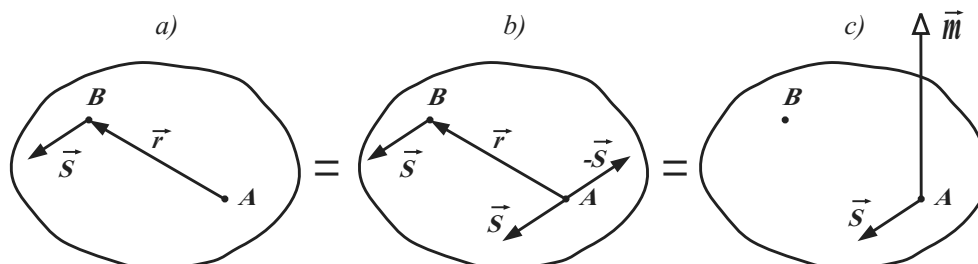


Slika 2.15: Spreg sile - znak.

2.6 Redukcija sile na tačku. Torzer

2.6.1 Redukcija sile na tačku

Kako je sila klizeći vektor, ona se ne može proizvoljno premestati sa jedne napadne linije na neku drugu, bez posledice na njeno dejstvo na telo. Postupak premeštanja sile iz jedne tačke u neku drugu izvan napadne linije, a da se dejstvo sile na telo ne promeni, naziva se **redukcija sile na tačku**. Postupak redukcije sile na tačku prikazan je na sl. 2.16.



Slika 2.16: Redukcija sile na tačku.

Neka data sila $\mathbf{S}$ deluje na kruto telo u tački B i neka je A **redukciona tačka**, u koju treba preneti datu silu (sl. 2.16a). Označimo vektor položaja tačke B u odnosu na tačku A sa $\mathbf{r}$. Dodajmo u tački A ravnotežni par sila, čiji su intenziteti jednaki intenzitetu sile $\mathbf{S}$, sa napadnom linijom paralelnom napadnoj liniji date sile (sl. 2.16b). Očigledno je da se dodavanjem ravnotežnog para sila nije ništa promenilo što se tiče daljeg kretanja tela.

Sila $\mathbf{S}$ u napadnoj tački B i sila $-\mathbf{S}$ u redukcionalnoj tački A obrazuju spreg sile. Vektor momenta sprega je

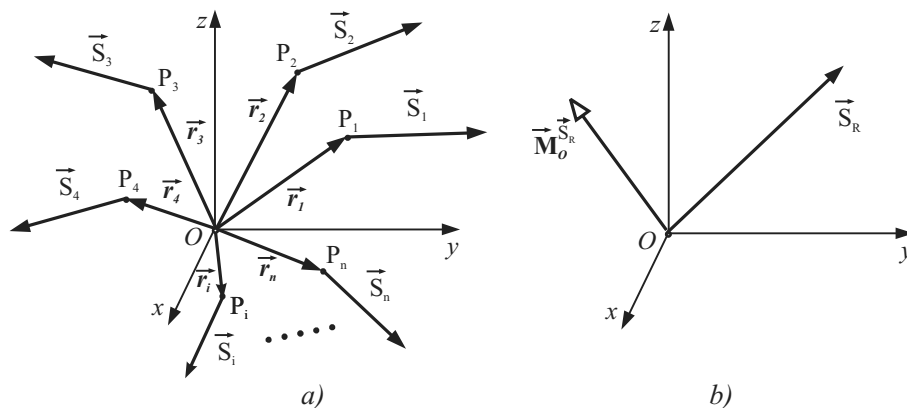
$$\mathfrak{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{S}. \quad (2.21)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Kako je on slobodan vektor, možemo ga, paralelnim pomeranjem, premestiti u redukcionu tačku A (sl. 2.16c). Dakle, osim sile $\mathbf{S}$ u tački A deluje i moment sprega $\mathfrak{M}$. Na taj način smo silu $\mathbf{S}$ iz napadne tačke B preneli u napadnu tačku A . Iz izloženog sledi: *silu možemo preneti iz neke tačke B u proizvoljnu tačku A dodajući spreg čiji je moment jednak momentu sile koju prenosimo, u odnosu na tačku u koju se sila prenosi.*

2.6.2 Glavni vektor, glavni moment. Torzer

Neka je dat proizvoljan sistem sila $\mathbf{S}_i[X_i, Y_i, Z_i]$ u prostoru sa napadnim tačkama $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (sl.2.17a).



Slika 2.17: Redukcija prostornog sistema sila.

Vektori položaja $\mathbf{r}_i$ napadnih tačaka P_i sila $\mathbf{S}_i$ su

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}. \quad (2.22)$$

Redukujemo ovaj sistem sila na tačku O . Neka je ta tačka ujedno i koordinatni početak Dekartovog koordinatnog sistema. Redukcijom svih sila na tačku O , dobićemo skup sučeljnih sila i skup momenata (spregova). Ako ovaj sistem sila saberemo (sl. 2.17b), dobijamo

$$\mathbf{S}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^n Z_i \right) \mathbf{k} = X_R \mathbf{i} + Y_R \mathbf{j} + Z_R \mathbf{k}. \quad (2.23)$$

Vektor $\mathbf{S}_R$ naziva se **glavni vektor** datog sistema sila. ¹³

¹³Napomenimo da ovaj vektor ne predstavlja rezultantu (vidi definiciju !!!), jer pored njega postoje i momenti spregova, dobijeni redukcijom, pa dati sistem nije ekvivalentan samo jednoj sili.

Pored toga, kao što je rečeno, kao posledicu redukcije dobićemo i n redukcionih momenata. Njihov zbir daje tzv. **glavni moment** sistema sila za redukcionu tačku O (sl. 2.17b), koji možemo da prikažemo u obliku

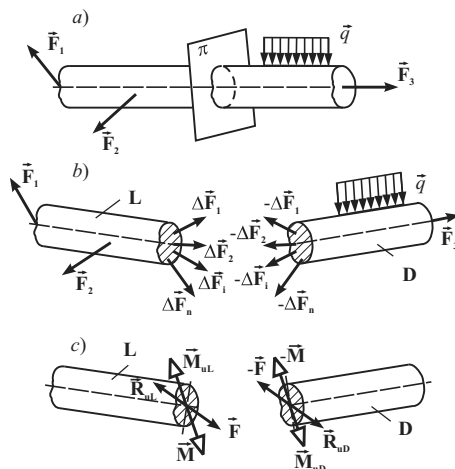
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^{\mathbf{S}_R} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i = \\ &= \mathbf{i} \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) + \mathbf{j} \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) + \mathbf{k} \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = \\ &= M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Glavni vektor $\mathbf{S}_R$ i glavni moment $\mathbf{M}_O^{\mathbf{S}_R}$, prostornog sistema sila, su vektori različite vrste (različite prirode) i ne mogu se vektorski sabrati u treći vektor. Ovaj par vektora nazivamo **torzer**. On predstavlja statički ekvivalent datom sistemu sila. Pošto smo redukcionu tačku birali proizvoljno, to znači da se proizvoljan prostorni sistem sila može na proizvoljno mnogo načina zameniti ekvivalentnim torzerima. Glavni vektor kao geometrijski zbir svih sila sistema ne zavisi od izbora redukcionog tačke, ali, kao što je ranije pokazano, glavni moment zavisi. Dakle, svaka promena redukcionog tačke izaziva promenu redukcionog momenta svake sile, a to znači i glavnog momenta.

2.6.3 Ponovo o unutrašnjim silama

U poglavlju Unutrašnje sile, na str. 10,

videli smo da se, pri presecanju i odstranjivanju jednog dela nosača, uticaj odstranjenog dela zamenjuje silama, koje smo nazvali **unutrašnje sile**. Sada, kada smo definisali i postupak redukcije, izvršimo redukciju unutrašnjih sila na težište poprečnog preseka nosača (vidi sl. 2.18), pri čemu dobijamo glavni vektor sile $\mathbf{R}_u$ i glavni vektor momenta $\mathbf{M}_u$ unutrašnjih sila.



Slika 2.18: Redukcija unutrašnjih sila na težište.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Ove vektore, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, možemo da prikažemo u obliku:

$$\mathbf{R}_u = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{M}_u = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}.$$

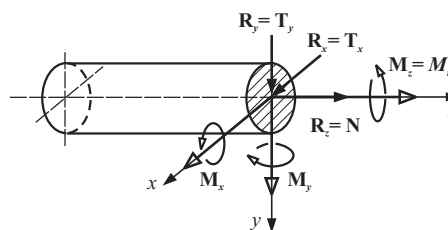
Ako je presek upravan na osu nosača, ove vektore možemo razložiti na sledeće komponente (vidi sl. 2.19)

za sile:

- $R_x = T_x$ – transversalne (poprečne) sile u pravcu x - ose,
- $R_y = T_y$ – transversalne (poprečne) sile u pravcu y - ose,
- $R_z = N$ – aksijalne sile (normalne),

i momente:

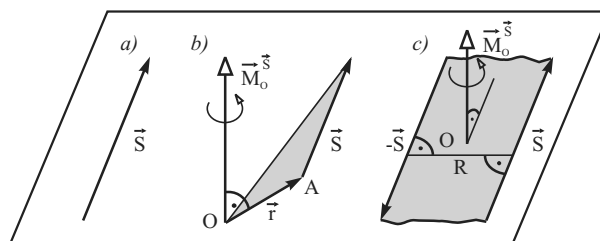
- $M_x = M_{sx}$ – moment savijanja oko x - ose,
- $M_y = M_{sy}$ – moment savijanja oko y - ose,
- $M_z = M_t$ – moment uvijanja (torzije) oko z - ose.



Slika 2.19: Komponente unutrašnjih sila i momenata.

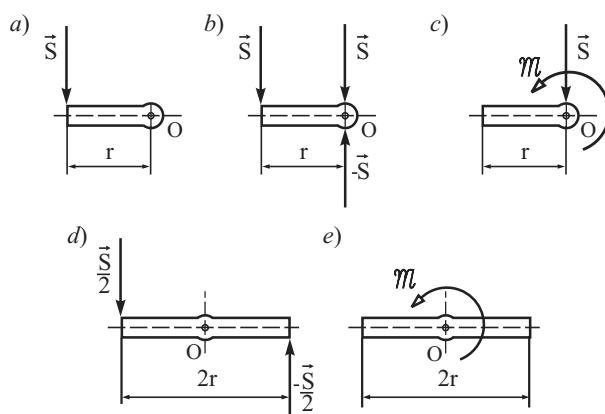
2.7 Osnovni statički elementi

Do sada smo proučili tri različita statička elementa: silu, moment sile za datu tačku i spreg sila. Sva tri elementa su vektori, ali različitih efekata na telo. Sila je klizeći vektor koji izaziva translatorno kretanje. Moment sile za tačku je vezani vektor za određenu tačku i izaziva obrtanje oko tačke. Spreg je slobodan vektor, a njegovo dejstvo je obrtanje oko ose.



Slika 2.20: Osnovni statički elementi: sila, moment sile i spreg.

I moment i spreg izazivaju obrtanje tela, a ipak između njih postoji razlika. Posmatrajmo, na primer, krivaju (ručicu), koja može da se obrće oko horizontalne osovine (slika 2.21), na čijem slobodnom kraju dejstvuje sila $\mathbf{S}$.



Slika 2.21: Osnovni statički elementi: sila, moment sile i spreg.

Redukcijom te sile na tačku O (prodor osovine kroz ravan koju obrazuje sila $\mathbf{S}$ i ručica, a upravna je na osovinu¹⁴) (sl. 2.21c), dobićemo istu takvu silu $\mathbf{S}$ i moment sprega, čiji je intenzitet $S \cdot r$. Spreg izaziva obrtanje, a sila $\mathbf{S}$ izaziva pritisak na osovinu obrtanja. Međutim, ako na ručicu dužine $2r$ (sl. 2.21d) deluju dve sile upola manjeg intenziteta ($S/2$) one obrazuju spreg istog momenta $S \cdot r$ koji izaziva čisto obrtanje bez ikakvog pritiska na osovinu.

Dakle, sila izaziva pritisak, spreg sila izaziva obrtno kretanje bez pritiska na osovinu O , a moment izaziva obrtno kretanje i pritisak na osovinu. Zbog toga se pri konstrukciji mašinskih delova teži da se dejstvo momenta zameni dejstvom sprega.

2.8 Uslovi ravnoteže

Da bi telo, na koje deluje sistem sila $\mathbf{S}_i$ ($i = 1, \dots, n$), bilo u ravnoteži potrebno je da se spreči njegova translacija (zbir svih sila jednak nuli, tj. glavni vektor sile jednak nuli) i obrtanje (zbir svih momenata jednak nuli, tj. glavni vektor momenta jednak nuli), pa iz (2.23) i (2.24) slede:

¹⁴osa koja prolazi kroz tačku O , a upravna je na ravan slike, u kojoj leže sila i ručica.

uslovi ravnoteže u vektorskom obliku:

$$\mathbf{S}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_O^{\mathbf{S}_R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

uslovi ravnoteže u skalarnom obliku:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, & \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, & \sum_{i=1}^n Z_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{x_i} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{y_i} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{z_i} &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pri dobijanju uslova ravnoteže u skalarnom obliku, vektorske jednačine projektovane su na ose pravouglog Dekartovog sistema. Jasno, može se, po potrebi, projektovati i na ose bilo kog drugog koordinatnog sistema.

Navedimo sada uslove ravnoteže za neke specijalne slučajeve.

2.8.1 Ravanski sistem sila

U slučaju kada sve sile, koje deluju na telo, leže u jednoj ravni, recimo da je to ravan xy , onda se šest jednačina iz (2.26) svode na:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{z_i} = 0. \quad (2.27)$$

2.8.2 Sučeljni sistem sila

U ovom slučaju sve sile, koje deluju na telo, seku se u jednoj tački (recimo P). Kako je izbor momentne tačke proizvoljan, to ako za nju izaberemo tačku P , u kojoj se sile seku, dobijamo da je $\sum_i \mathbf{M}_P^{\mathbf{S}_i} \equiv 0$. Dakle, da bi sistem sila, u ovom slučaju, bio u ravnoteži potrebno je da bude zadovoljen uslov $\sum_i \mathbf{S}_i = \mathbf{0}$, tj.

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (2.28)$$

GLAVA 3

GREDNI NOSAČI

3.1 Uvod

Nosač je telo koje prima spoljno opterećenje i prenosi ga na oslonce. Pri tome ovo telo može da bude u stanju kretanja ili mirovanja. Kod nosača koji svoju funkciju obavljaju u stanju mirovanja broj stepeni slobode kretanja jednak je nuli.

Sva tela su trodimenzionalna. Međutim, u zavisnosti od vrste problema nije uvek neophodno svaki problem rešavati kao trodimenzionalni. U zavisnosti od rasporeda sila, koje deluju na telo, kao i od oblika tela, problem može da se posmatra kao jednodimenzionalan ili dvodimenzionalan, a da to bitno ne utiče na tačnost dobijenih rezultata. U tom cilju, definisaće se odgovarajući pojmovi za te specijalne slučajeve.

☞ Napomena. Mada će se detaljno izučavati samo puni linijski nosači, u narednom poglavlju daće se podela i opis raznih tipova nosača, radi uvida u moguće probleme i zadatke.

3.2 Osnovni pojmovi

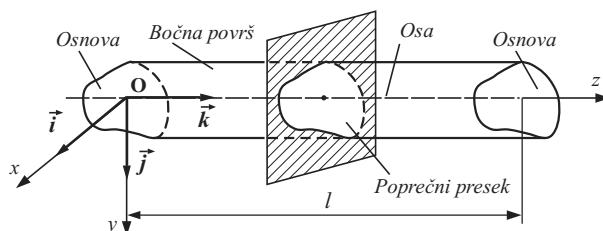
U ovom poglavlju definisaćemo osnovne pojmove, koji se odnose na nosač. Osnovni elementi nosača su:

- **Osa nosača** je linija koja prolazi kroz težišta poprečnih preseka.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

- **Poprečni presek nosača** je njegov presek sa ravni koja je upravna na osu nosača.
- **Bočna površ nosača**, je kontura kojom je nosač ograničen.
- **Osnove nosača** (slika 3.1) su dve ravne konture, na krajevima nosača, koje su upravne na bočne površi nosača.

Osnovni elementi prikazani su na sl. 3.1.



Slika 3.1: Gredni nosač.

Kao što je već rečeno, tela su trodimenzionalna. Međutim, moguće je uprostiti model, u zavisnosti od vrste problema, uvođenjem određenih pretpostavki. Moguće je koristiti jednostavniji model (jednodimenzionalni ili dvodimenzionalni), koji neće bitno uticati na tačnost dobijenih rezultata.

Definišu se sledeći, jednostavni, tipovi nosećih elemenata:

- **linijski nosač** (linijski noseći element) i
- **površinski noseći element**.

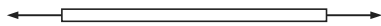
3.3 Linijski nosači

Linijski nosač (linijski noseći element) je element kod koga je dimenzija tela u jednom pravcu znatno veća u odnosu na dimenzije u ostala dva ortogonalna pravca. Geometrijski, ovakav element prikazujemo linijom (duži).

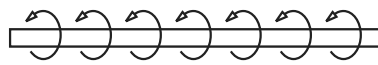
3.3.1 Podela linijskih nosača prema opterećenju

Prema opterećenju, linijski nosači dele se na **štapove** i **gredne nosače**.

- Ukoliko je linijski element opterećen samo u pravcu svoje podužne ose nekom zatežućom/pritiskajućom silom ili momentom uvijanja onda se takav element naziva **štap** (vidi slike 3.2 i 3.3).

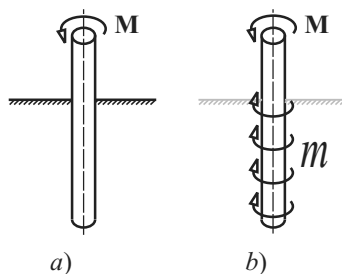


Slika 3.2: Aksijalno opterećen nosač
– štap.



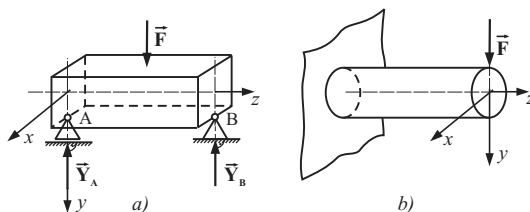
Slika 3.3: Opterećenje neprekidno
raspoređenim momentima uvijanja –
štap.

Na slici (3.4) prikazan je jedan konkretan primer nosača na koji deluju neprekidno (kontinualno) raspoređeni momenti uvijanja (torzije).



Slika 3.4: Ilustracija kontinualnih momenata.

- Ukoliko je linijski element opterećen silom, koja nije aksijalna, i/ili momentom savijanja, onda se takav element naziva **gredni nosač** (vidi sl. 3.5).



Slika 3.5: Gredni nosač: a) greda – b) konzola.

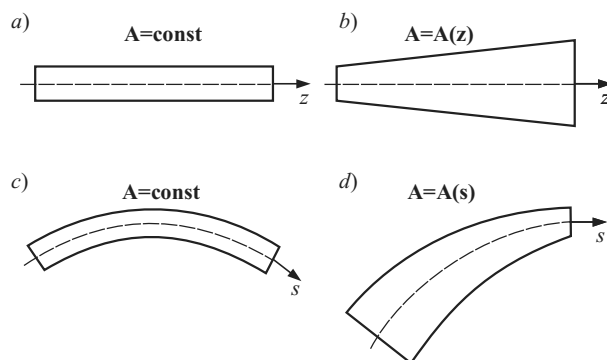
3.3.2 Podela nosača prema obliku ose i poprečnog preseka

Podela nosača prema obliku ose

Prema obliku ose, nosača delimo na **prave noseće elemente** i **krive noseće elemente**.

Linijski noseći elementi (štapovi, grede) mogu biti **pravi**, kada su njihove ose prave linije (vidi sl. 3.6a, b) ili **krivi**, kada su njihove ose krive linije (vidi sl. 3.6c, d). Takođe mogu da budu promenljivog (vidi sl. 3.6b, d) ili konstantnog poprečnog preseka (vidi sl. 3.6a, c).

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

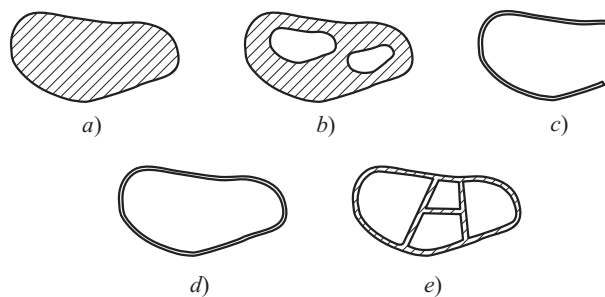


Slika 3.6: Mogući oblici linijskih elemenata.

Podela nosača prema obliku poprečnog preseka

Prema obliku poprečnog preseka nosača, razlikujemo sledeće slučajeve:

1. nosač punog poprečnog preseka. Ovde razlikujemo dva slučaja:
 - jednostruko povezan poprečni presek (sl. 3.7a) ili
 - višestruko povezan poprečni presek (sl. 3.7b);
2. nosač otvorenog tankozidnog profila (sl. 3.7c);
3. nosač zatvorenog tankozidnog profila, pri čemu poprečni presek može da bude:
 - jednoćelijski (sl. 3.7d) i
 - višećelijski (sl. 3.7e).



Slika 3.7: Poprečni preseki.

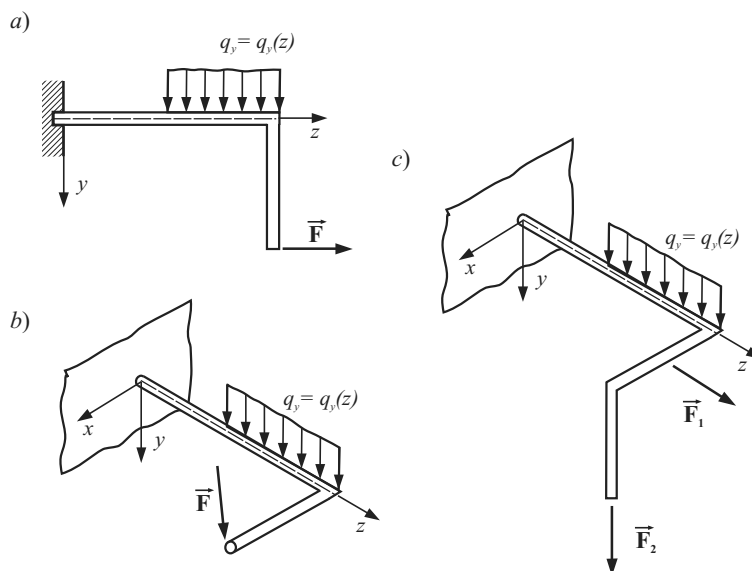
☞ Napomenimo, na kraju, da pune linijske nosače karakterišu dva elementa: oblik ose nosača (kriva ili prava linija) i oblik poprečnog preseka.

3.4 Tipovi ravanskih linijskih nosača

Razmotrimo najpre moguće tipove linijskih nosača.

Sistem (nosač) koji se sastoji iz jednog ili više linijskih nosećih elemenata, spojenih međusobno na određeni način, naziva se **linijski noseći sistem**.

Ukoliko se svi elementi tog sistema nalaze u jednoj ravni onda za taj sistem kažemo da je **ravanski**. Takav sistem može da bude opterećen u svojoj ravni (sl. 3.8-a) ili, u opštem slučaju, prostorno (sl. 3.8-b).



Slika 3.8: Tipovi ravanskih linijskih nosećih sistema.

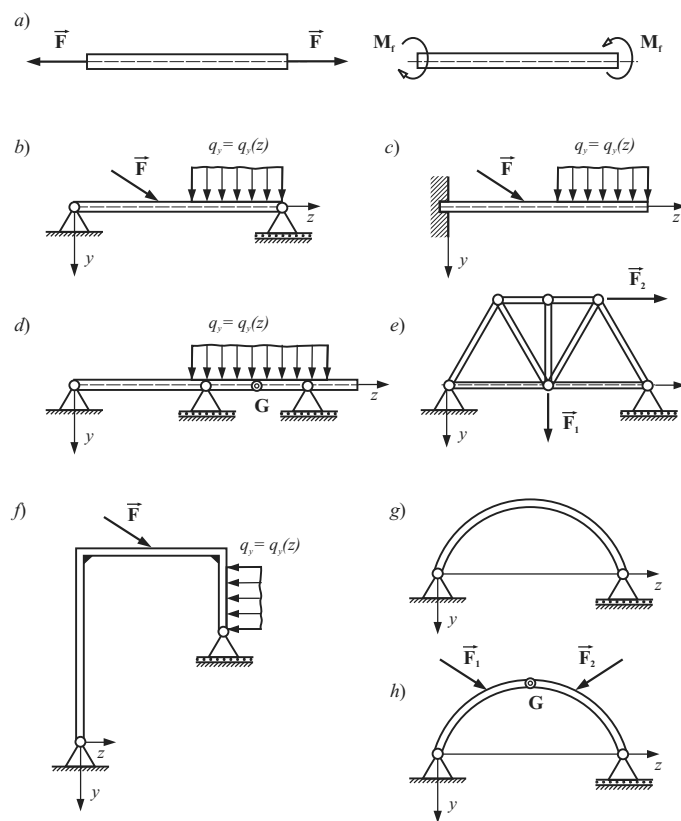
Prostorno povezane linijske elemente nazivamo **prostorni noseći linijski sistem** (sl. 3.8-c).

Najprostiji linijski sistem može da bude sastavljen od samo jednog nosećeg elementa koji, u zavisnosti od pravca dejstva opterećenja, može biti:

- štap (sl. 3.9-a),
- prosta greda (sl. 3.9-b) ili greda sa prepustima (ako oslonci nisu na krajevima nosača) i
- konzola (sl. 3.9-c).

Primer **složenijeg nosača** bio bi sistem od više greda međusobno zgloбно vezanih i oslonjenih na više oslonaca, koji se naziva **Gerberov nosač** (sl. 3.9-d).

Ukoliko su štapovi u jednom složenom sistemu međusobno zglobno povezani, a leže u jednoj ravni, onda se takav sistem naziva **ravanska rešetka** (sl. 3.9-e), a ukoliko je njihova međusobna veza kruta, onda je u pitanju **ravanska¹ okvirna konstrukcija** (sl. 3.9-f).



Slika 3.9: Tipovi ravanskih linijskih nosećih sistema.

Primer proste linijske strukture je **luk** (krivi štap) **na dva zgloba** (sl. 3.9-g) ili **luk na tri zgloba** (sl. 3.9-h).

Moguće su naravno i kombinacije krivih i pravih linijskih nosećih elemenata.

Linijske noseće elemente možemo međusobno povezivati zglobno ili kruto, ali ih takođe možemo povezivati za podlogu preko oslonačkih tačaka na isti način.

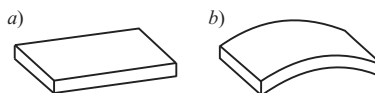
Kao što je već rečeno u uvodu, u ovom udžbeniku detaljnije ćemo izučavati samo prave pune linijske nosače.

¹Često se u literaturi koristi i pojam ravna rešetka, ravan nosač i slično.

3.5 Površinski noseći element

Površinski noseći element je element kod koga je jedna dimenzija mnogo manja od preostale dve (sl. 3.10). Ova (najmanja) dimenzija naziva se **debljina površinskog nosećeg elementa**. U ove elemente spadaju:

- **ploča**, kod koje je srednja površ nosećeg elementa ravna površ i
- **ljuska**, kod koje je srednja površ nosećeg elementa kriva površ.



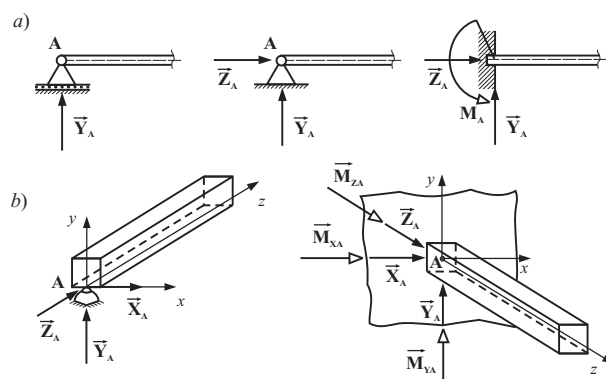
Slika 3.10: Površinski noseći elementi: a) ploča, b) ljuska.

Iz ovakve definicije oblika tela proizašle su posebne podoblasti mehanike deformabilnog tela, kao što su: **teorija linijskih nosećih konstrukcija**, **teorija ploča**, **teorija ljuski**, itd.

3.6 Statička određenost

Jedan od osnovnih zadataka Statike je određivanje reakcija veza. Za njihovo određivanje koristimo uslove ravnoteže. Neka je n broj nepoznatih reakcija, a m broj jednačina (uslova ravnoteže). Ukoliko je $n = m$ onda je zadatak **statički određen**, a ako je $n > m$ onda je zadatak **statički neodređen**.

U ovom poglavlju (Statika) rešavaćemo samo statički određene zadatke.



Slika 3.11: Oslanjanje nosača u ravni i prostoru.

Kao što je veće rečeno, za ravanske linijske konstrukcije imamo tri (statička)

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

uslova ravnoteže:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0, \quad (3.1)$$

a za prostorne linijske konstrukcije imamo šest (skalarnih) uslova ravnoteže:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, & \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, & \sum_{i=1}^n Z_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{x_i} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{y_i} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{z_i} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Na slici (sl. 3.11) prikazane su nepoznate komponente u zavisnosti od načina vezivanja sa podlogom.

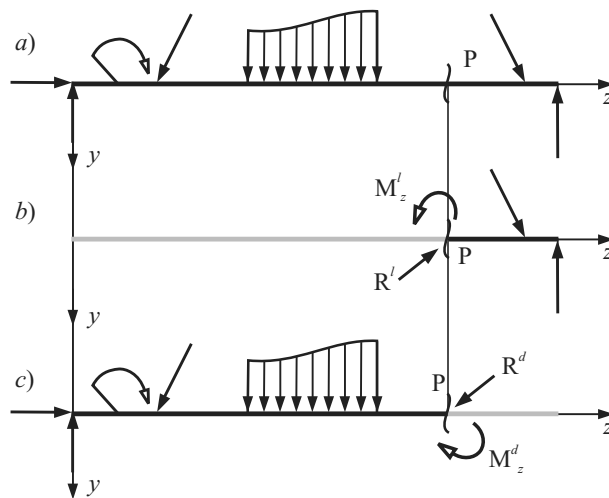
3.7 Analitičko predstavljanje napadnih veličina u proizvoljnom poprečnom preseku

Jedan od osnovnih zadataka otpornosti materijala je određivanje nosivosti (izdržljivosti) nosača pri dejstvu spoljašnjeg opterećenja. Iz tog razloga potrebno je poznavanje raspodela sila i momenata duž nosača, tj. poznavanje ovih veličina u svakoj tački. Pri određivanju analitičkih izraza polazi se od definicije ovih veličina u proizvoljnom preseku, a datih u Statici.

3.7.1 Napadne veličine u poprečnom preseku

Posmatrajmo gredni nosač na koji deluje spoljašnje opterećenje i reakcije veza, obrazujući ravnotežni sistem sila i spregova u ravni nosača (recimo yz). Za sada se nećemo upuštati u to da li je gredni nosač statički određen ili neodređen već pretpostavljamo da su poznate sve reakcije veza, odnosno da su poznate sve sile i momenti ovog ravnotežnog sistema. Takođe pretpostavljamo da je njihov raspored na nosaču proizvoljan.

Uočimo na osi nosača proizvoljnu tačku P (sl. 3.12) i zamislimo da je kroz tu tačku provučena ravan π upravna na osu nosača. U ovoj ravni leži odgovarajući poprečni presek nosača, a tačka P , kao tačka na osi, poklapa se sa težištem S tog poprečnog preseka. Uočenom tačkom P ravnotežni sistem, koji deluje na gredni nosač, podeljen je na dva dela: deo sistema sila i spregova koji leži levo od tačke P , tj. levo od uočenog poprečnog preseka, i deo koji leži desno od tog poprečnog preseka.



Slika 3.12: a) Proizvoljan presek P nosača, b) levi deo nosača zamenjen redukcionim torzerom, c) desni deo nosača zamenjen redukcionim torzerom.

Zamislamo da smo odstranili levi deo nosača i njegov uticaj na ostatak nosača zamenili redukcionim torzerom ($\mathbf{R}^l$, $\mathbf{M}^l$) (videti sl. 2.18 na str. 23). Ove sile i momenti predstavljaju sve spoljašnje sile i momente, kao i unutrašnje odgovarajuće veličine, koje se nalaze sa leve strane preseka.

Slično, ako odstranimo desni deo nosača, uticaj odstranjenog dela biće torzer ($\mathbf{R}^d$, $\mathbf{M}^d$).

Kako je sistem sila i momenata, koji deluje na nosač, u ravnoteži, tada je (vidi jed. (2.25) str. 26)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^l + \mathbf{R}^d = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^l + \mathbf{M}^d = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

tj.

$$\mathbf{R}^l = -\mathbf{R}^d, \quad \mathbf{M}^l = -\mathbf{M}^d. \quad (3.4)$$

Dobijeni izrazi pokazuju da redukционе rezultante, dela sistema levo i desno od uočenog poprečnog preseka, obrazuju osnovni ravnotežni sistem. Takođe, redukциони momenti, dela sistema levo i desno od uočenog poprečnog preseka, u odnosu na težište tog preseka, obrazuju dva ravnotežna momenta.

Kako ravnotežni sistem sila i momenata leži u ravni nosača yz , to i sile $\mathbf{R}^l$ i $\mathbf{R}^d$ leže u toj ravni. Vektori momenata $\mathbf{M}^l$ i $\mathbf{M}^d$ su vektori koji imaju pravac ose x .

Posmatrajući desni deo nosača (vidi poglavlje na str. 23 i sl. 2.19), potražićemo projekciju sile $\mathbf{R}^l$ na dva ortogonalna pravca: na pravac ose nosača – osu z , i na pravac upravan na osu nosača – osu y . Projekcija sile

$\mathbf{R}^l$ na pravac ose nosača je **aksijalna** (normalna) **sila** i označava se sa N . Projekcija sile $\mathbf{R}^l$ na pravac upravan na osu nosača je **transverzalna sila** i označava se sa $T_y = T$. Moment $\mathbf{M}^l$, je **moment savijanja** ili **napadni moment** i označava se sa M_x , (sl. 3.12).

Ako posmatramo levi deo nosača i redukcionu rezultantu $\mathbf{R}^d$ projektu-jemo na iste pravce, dobijamo takođe, aksijalnu silu N i transversalnu silu $T_y = T$. Redukcioni moment $\mathbf{M}_x^d$ je moment savijanja ili napadni moment M_x (sl. 3.12).

Normalna sila N , transversalna sila T i moment savijanja M_x , od dela sistema levo ili desno od uočenog poprečnog preseka predstavljaju sile i momente u preseku nosača.

Kako je projekcija rezultante sile, na neki pravac, jednaka algebarskom zbiru projekcija njenih komponenata na isti pravac, to su aksijalna i transversalne sile u preseku:

Definicija:

Aksijalna sila, u uočenom poprečnom preseku, jednaka je algebarskom zbir projekcija svih sila, bilo sa leve, bilo sa desne strane tog preseka, na pravac ose nosača.

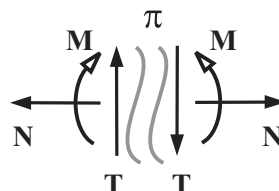
Definicija:

Transverzalna sila, u uočenom poprečnom preseku, je algebarski zbir projekcija svih sila dela sistema, koji leži levo ili desno od tog preseka, na pravac upravan na osu nosača.

Definicija:

Moment savijanja ili **napadni moment** u uočenom poprečnom preseku je algebarski zbir intenziteta momenata svih spregova i redukcionih momenata svih sila u odnosu na težište tog preseka dela sistema koji leži levo ili desno od uočenog preseka.

‡ **Konvencija o znaku** aksijalnih i transversalnih sila i momenata savijanja u preseku, data je na slici 3.13. Pozitivne sile i momenti u preseku, sračunate od dela sistema levo od uočenog poprečnog preseka, prikazane su levo od traga ravni π .



Slika 3.13: Konvencija o znaku.

Odgovarajući pozitivni znaci veličina, kao posledica uticaja sila i momenata desno od preseka, prikazani su desno od preseka.

3.7.2 Gredni nosač opterećen torzionim spregovima

Oblici veza. Statička određenost nosača

Prethodno smo posmatrali gredne nosače koji su izloženi delovanju spoljašnjeg opterećenja u svojoj ravni yz . Videli smo da nosač u ravni ima tri stepena slobode kretanja. Veze koje su uvedene oduzimaju nosaču delimično, ili u potpunosti, mogućnosti kretanja u toj ravni.

Uvedimo još jednu vrstu opterećenja – opterećenje nosača spregom koji leži u ravni njegovih poprečnih preseka. Nazivamo ih **torzioni momenti** ili **momenti uvijanja** i označavaćemo ih sa M_t . Pravac ovih momenata je pravac ose nosača, tj. z -ose. Zavisno od smera obrtanja vektori njihovih momenata poklapaju se sa pozitivnom ili negativnom z osom.

Nakon uvođenja opterećenja torzionim spregovima moramo uzeti u obzir i mogućnost obrtanja štapa oko svoje ose kao još jedan stepen slobode kretanja. Njega dodajemo već ranije utvrđenom broju od tri stepena slobode kretanja koje ima štap u svojoj ravni. Zato pored veza koje su ranije opisane, definišemo još veze koje sprečavaju i obrtanje oslonačkih preseka u svojim ravnima xy . To su tzv. **viljuškaste veze**.

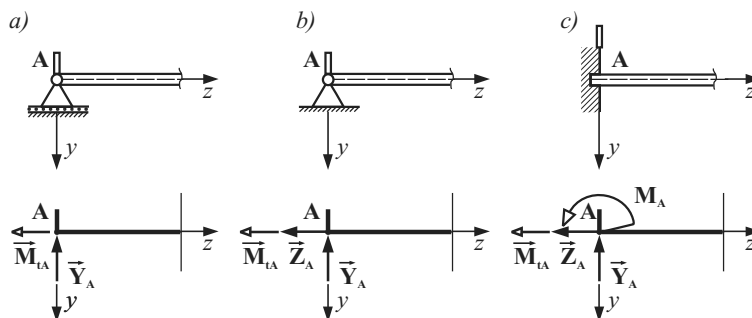
Pokretan zglob sa viljuškastom vezom (sl. 3.14a) sprečava pomeranje tačke A štapa u pravcu y ose i obrtanje preseka u osloncu štapa oko z ose. Ova veza oduzima štapu dva stepena slobode kretanja. Kada se veza ukloni, zamenjuje se sa dve nezavisne reakcije veze: silom (intenziteta) Y_A u pravcu y ose i spregom momenta (intenziteta) M_{tA} , čiji vektor momenta ima pravac ose z , pri čemu odgovarajuće sile sprega leže u poprečnom preseku, kome pripada oslonac A .

Nepokretan zglob sa viljuškastom vezom (sl. 3.14b) sprečava pomeranje tačke A štapa u ravni yz , duž dva ortogonalna pravca y i z , i obrtanje preseka u osloncu oko z ose. Ova veza oduzima štapu tri stepena slobode kretanja. Uklonjena veza zamenjuje se sa tri nezavisne reakcije veze: silama (intenziteta) Y_A i Z_A u pravcu y i z ose i spregom momenta (intenziteta) M_{tA} , čiji vektor ima pravac z ose.

Ukleštenje sa viljuškastom vezom (sl. 3.14c) sprečava pomeranje tačke A štapa u ravni yz , obrtanje štapa oko tačke A u toj ravni, i obrtanje štapa oko z ose. Ova veza oduzima štapu četiri stepena slobode kretanja. Kada se ukloni, ona se zamenjuje sa četiri nezavisne reakcije veze. To su sile (intenziteta) Y_A i Z_A u pravcu ose y i z , moment ukleštenja (intenziteta)

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

M_A , čiji se vektor poklapa sa osom x , i spreg momenta (intenziteta) M_{tA} , čiji vektor ima pravac z ose.

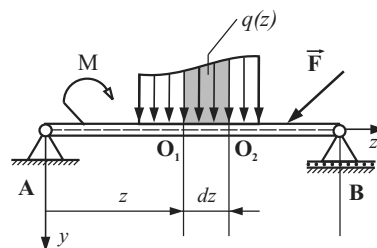


Slika 3.14: Ukleštenje sa viljuškastom vezom.

3.8 Veza između napadnih veličina i kontinualnog opterećenja

Posmatrajmo gredni nosač koji je u jednom delu opterećen kontinualnim opterećenjem², koje se menja po zakonu $q(z)$ (sl. 3.15).

Izvršimo zamišljeno presecanje nosača dvema ravnima upravno na osu nosača. Jedna ravan na rastojanju z od levog kraja, a druga na rastojanju $z + dz$. Na ovako izdvojeni elementarni deo nosača delovaće sile i momenti, kao posledica odstranjivanja delova nosača.



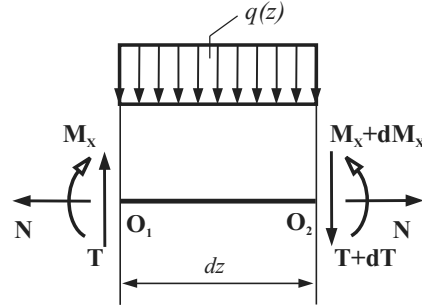
Slika 3.15: Napadne veličine u preseku.

Uticađ dela nosača levo od preseka O_1 zamenimo veličinama u preseku: aksijalnom silom N , transverzalnom silom T i momentom savijanja M_x . Uticađ dela sistema desno od preseka O_2 zamenimo takođe odgovarajućim veličinama u preseku. Na izdvojeni deo nosača deluje kontinualno opterećenje $q(z)$ tako da u preseku O_2 normalna sila N ostaje nepromenjena, dok transverzalna sila i moment savijanja imaju priraštaje. Ako se zadržimo na malim veličinama prvog reda, to su: $T + dT$ i $M_x + dM_x$, (sl. 3.16).

²U daljem tekstu, kao i u zadacima pretpostavićemo da su ovo gravitacione sile, pa nećemo strelicama označavati njihov smer.

Kako je, prema pretpostavci, nosač bio u ravnoteži pre presecanja, to je i izdvojeni element nosača takođe u ravnoteži pod dejstvom sila u presecima O_1 i O_2 i dela kontinualnog opterećenja $q(z)$ na izdvojenom elementu nosača.

Prema pretpostavci, funkcije $q(z)$ je neprekidna, pa beskonačno malom priraštaju dz argumenta z odgovara beskonačno mala promena funkcije $q(z)$.



Slika 3.16: Kontinualno opterećenje, transversalna sila, moment savijanja.

To znači da na delu dz možemo da smatramo da je kontinualno opterećenje pravougaono (na ovom delu), a odgovarajuća sila je $F_q = q(z)dz$ i deluje u težištu preseka. Skalarni uslovi ravnoteže (3.1) su:

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i = 0 &\Rightarrow T - (T + dT) - q(z) dz = 0, \\ \sum_i M_{O_2} = 0 &\Rightarrow M_x - (M_x + dM_x) + T dz - q(z) dz (dz/2) = 0, \end{aligned}$$

odakle sledi:

$$\frac{dT}{dz} = -q(z), \quad \frac{dM_x}{dz} = T(z). \quad (3.5)$$

Ovde je zanemaren član $(dz)^2$ kao infinitezimala višeg reda.

Izraze (3.5) koristimo prilikom crtanja statičkih dijagrama. Na primer, ako na delu nosača nema linijski raspodeljenog opterećenja, tj. ako je $q(z) \equiv 0$, tada je na tom delu transversalna sila konstantna, a moment savijanja linearna funkcija koordinate z . Ili, ako je deo nosača opterećen jednoliko raspodeljenim opterećenjem, tj. ako je $q(z) = q_0 = \text{const.}$, na tom delu nosača transversalna sila je linearna, a moment savijanja kvadratna funkcija položaja z . U poprečnom preseku $z = z_0$, gde je $T(z_0) = 0$, javlja se ekstremna vrednost momenta savijanja.

☞ Napomena. Može da se uoči da ovde nismo pretpostavili promenu aksijalnih sila. Naime, kako posmatramo uticaj (promenu) unutrašnjih sila i momenata pod dejstvom spoljašnje transversalne sile (kontinualno opterećenje), logično je pretpostaviti da zbog promene ove sile (na rastojanju dz) neće doći do promene sile koja je upravna na taj pravac (aksijalna sila). Međutim, kada bismo zanemarili tu činjenicu, dobili bismo

$$\sum_i Z_i = 0 \Rightarrow N - (N + dN) = 0 \Rightarrow dN = 0.$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

3.9 Zadaci - Statički dijagrami

3.9.1 Uvod

U kratkim crtama opišimo postupak za crtanje statičkih dijagrama. Prvo, primenom principa oslobađanja od veza, uklonimo oslonce i njihov uticaj zamenimo silama. Zatim, posmatrajući ravnotežu nosača, pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja i sila veza, napišu se uslovi ravnoteže, iz kojih se odrede sile u osloncima. Kako ćemo da rešavamo zadatke samo za ravnanske nosače (u ravni yz), jednačine ravnoteže su oblika:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A^{F_i} = 0.$$

Sledeći korak je da se odrede karakteristični preseki i za njih napišu analitički izrazi za odgovarajuće veličine (N – aksijalne sile, T – transverzalne sile, M_s – momenti savijanja) i na kraju, na osnovu ovih izraza (funkcija) nacrtaju odgovarajući dijagrami.

☞ Napomenimo da treba voditi računa o konvenciji o znaku (vidi 3.7.1 na str. 36), pogotovu ako se za jedan presek posmatraju sile/momenti sa leve strane preseka, a za neki drugi presek posmatra se sa desne strane!

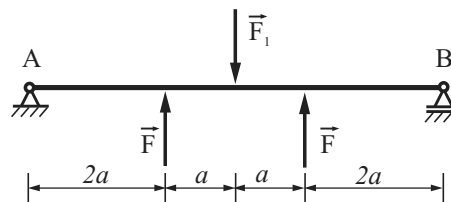
Tekst za sve zadatke je isti:

Zadatak: Odrediti otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame za nosač prikazan na slici. □

3.9.2 Statički dijagrami

Zad. 3.1.

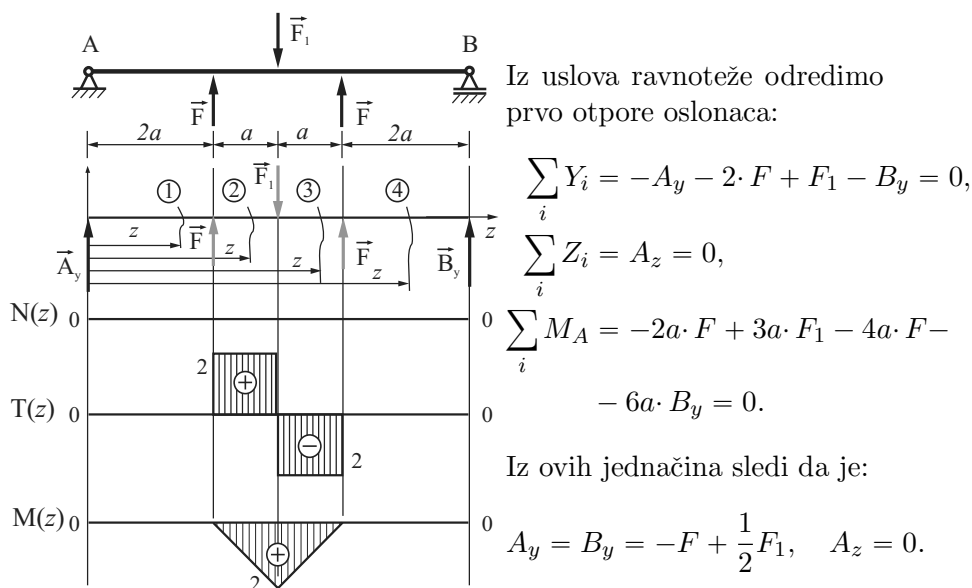
Za dati nosač (sl. 3.17) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. Pri rešavanju zadatka, prvo napisati rešenje u opštim brojevima, a zatim dati rezultate za: $F_1 = 4 [kN]$, $F = 2 [kN]$ i $a = 1 [m]$.



Slika 3.17: uz zadatak 3.1.

Za date podatke nacrtati statičke dijagrame.

Rešenje:



Slika 3.18: Statički dijagrami.

Odmah se videlo da su veličine A_y i B_y jednake, što sledi iz simetrije problema (simetrija i po opterećenju i po geometriji).

Provera:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 6a \cdot A_y + 4a \cdot F + 2a \cdot F - 3a \cdot F_1 = \\ &= 6a \left(\frac{1}{2} F_1 - F \right) + 6a \cdot F - 3a \cdot F_1 \equiv 0. \end{aligned}$$

Za date podatke, dobijamo

$$A_y = A_z = B_y = 0.$$

Da bismo napisali analitičke izraze, prvo je potrebno odrediti karakteristične preseke, odnosno polja u kojima se ne menja funkcioni oblik sila (transverzalna, aksijalna) ili momenta (savijanja). Podsetimo se da je sila/moment u preseku, po definiciji, zbir svih sila/momenata levo ili desno od preseka.

Na slici 3.18 označeni su karakteristični presezi. Tako, na primer za presek ①, bilo gde da ga postavimo, za $0 < z < 2a$, sa leve strane ćemo za transverzalnu silu imati A_y , a za moment $A_y \cdot z$. Dakle, nije potrebno da

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

računama ove veličine za svaku tačku preseka, u posmatranom preseku, jer su one (sile/momenti) određeni izrazima:

$$\begin{aligned} \text{za } T : & \quad A_y, \quad 0 < z < 2a, \\ \text{za } M : & \quad A_y \cdot z, \quad 0 < z < 2a. \end{aligned}$$

Na sličan način određujemo, u ovom slučaju i za preseke ②, ③ i ④, prikazano u obliku funkcija $T(z)$ i $M(z)$.

Analitički izraze za ove veličine, a za date brojne vrednosti, su:

– za transversalne sile

$$T(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < 1, \\ 2, & 1 < z < 2, \\ -2, & 2 < z < 3, \\ 0, & 3 < z < 4. \end{cases}$$

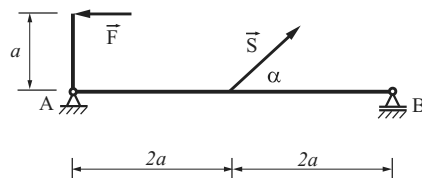
– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < 1, \\ 2z - 2, & 1 < z < 2, \\ 2z + 6, & 2 < z < 3, \\ 0, & 3 < z < 4. \end{cases}$$

Grafički prikaz dat je na sl. 3.18. □

Zad. 3.2.

Za dati nosač (sl. 3.19) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. U zadatku uzeti da je: $F = 2 [kN]$, $S = 5 [kN]$, $a = 1 [m]$, $\sin \alpha = 4/5$.



Slika 3.19: uz zadatak 3.2.

Rešenje:

Iz uslova ravnoteže odredimo prvo otpore oslonaca:

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i &= -A_y - S \sin \alpha - B_y = 0, \\ \sum_i Z_i &= -F + A_z + S \cos \alpha = 0, \\ \sum_i M_A &= -F \cdot a - S \sin \alpha \cdot 2a - B_y \cdot 4a = 0. \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina dobija se:

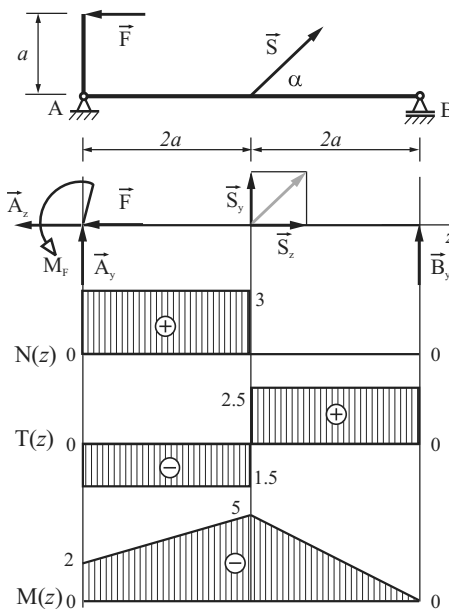
$$\begin{aligned} A_y &= \frac{1}{4} (F - 2S \sin \alpha), \\ B_y &= -\frac{1}{4} (F + 2S \sin \alpha), \\ A_z &= F - S \cos \alpha. \end{aligned}$$

Provera:

$$\begin{aligned} \sum_i M_B &= 4a \cdot A_y - F \cdot a + S \sin \alpha \cdot 2a = \\ &= -F \cdot a + 2S \cdot a \sin \alpha + F \cdot a - \\ &- S \sin \alpha \cdot 2a \equiv 0. \end{aligned}$$

Zamenom vrednosti za odgovarajuće sile i rastojanja, dobijamo:

$$\begin{aligned} A_y &= -1,5 [kN], \quad B_y = -2,5 [kN], \\ A_z &= -1 [kN]. \end{aligned}$$



Slika 3.20: uz zadatka 3.2.

Analitički izrazi:

– za aksijalne sile

$$N(z) = \begin{cases} -A_z + F, & 0 < z < 2, \\ 0, & 2 < z < 4. \end{cases}$$

– za transverzne sile

$$T(z) = \begin{cases} A_y, & 0 < z < 2, \\ -B_y, & 2 < z < 4. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} A_y \cdot z - F \cdot 1, & 0 < z < 2 \\ B(4 - z), & 2 < z < 4. \end{cases}$$

Zamenivši vrednosti za otpore oslonaca, dobijamo:

– za aksijalne sile

$$N(z) = \begin{cases} 3, & 0 < z < 2, \\ 0, & 2 < z < 4. \end{cases}$$

– za transverzne sile

$$T(z) = \begin{cases} -1,5, & 0 < z < 2, \\ 2,5, & 2 < z < 4. \end{cases}$$

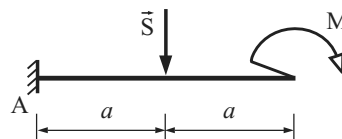
– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -2 - \frac{3}{2}z, & 0 < z < 2 \\ -10 + \frac{5}{2}z, & 2 < z < 4. \end{cases}$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

**Zad. 3.3.**

Za dati nosač (sl. 3.21) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. Uzeti da je $M = S \cdot a$.



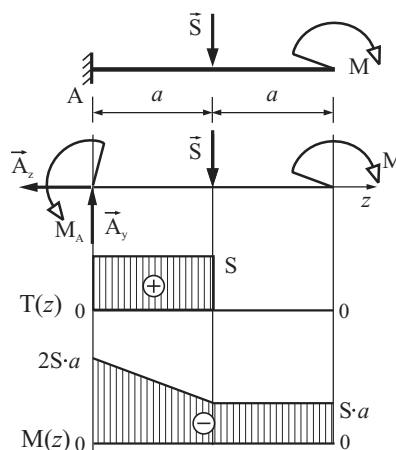
Slika 3.21: uz zadatak 3.3.

Rešenje:

Iz uslova ravnoteže odredimo prvo otpore oslonaca:

$$\begin{aligned}\sum_i Y_i &= -A_y + S = 0, \\ \sum_i Z_i &= A_z = 0, \\ \sum_i M_A &= -M_u + Sa + M = 0.\end{aligned}$$

Odavde se dobija: $A_y = S$, $A_z = 0$ i $M_u = 2Sa$.



Slika 3.22: Statički dijagrami.

Analitički izrazi (aksijalnih sila nema!):

– za transverzalne sile

$$T(z) = \begin{cases} A_y, & 0 < z < a, \\ A_y - S, & a < z < 2a. \end{cases}$$

– za transverzalne sile

$$T(z) = \begin{cases} S, & 0 < z < a, \\ 0, & a < z < 2a. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -M_u + Sz, & 0 < z < a, \\ -M, & a < z < 2a. \end{cases}$$

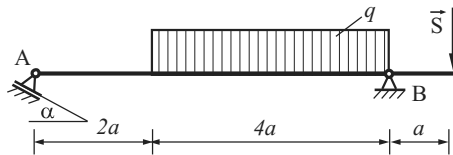
– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -2aS + Sz, & 0 < z < a, \\ -Sa, & a < z < 2a. \end{cases}$$



Zad. 3.4.

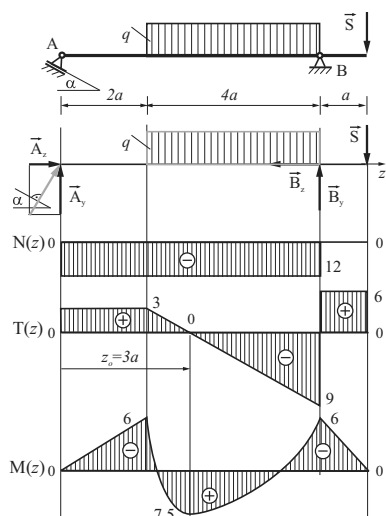
Za dati nosač (sl. 3.23) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. Uzeti da je: $S = 6 [kN]$, $q = 3 [kN/m]$, $a = 1 [m]$, $\cos \alpha = 3/5$.



Slika 3.23: uz zadatak 3.4.

Rešenje:

U ovom zadatku treba uočiti da je pokretan oslonac pod nekim uglom (α) u odnosu na horizontalu (z -osu). Dakle, pravac je poznat, a treba odrediti njegov intenzitet. Uslovi ravnoteže su:



Slika 3.24: uz rešenje zadatka 3.4.

$$\sum_i Y_i = -A \cos \alpha - B_y + 4aq + S = 0,$$

$$\sum_i Z_i = A \sin \alpha + B_z = 0,$$

$$\sum_i M_A = 4aq \cdot 4a - 6aB_y + S \cdot 7a = 0.$$

Oдавде se dobije:

$$A \cos \alpha = \frac{4}{3}aq - \frac{1}{6}S,$$

$$B_z = \frac{1}{6}(16aq + 7S),$$

$$B_y = \left(\frac{4}{3}aq - \frac{1}{6}S \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Provera:

$$\sum_i M_B = S \cdot a - 4aq \cdot 2a + 6aA \cos \alpha = Sa - 8a^2q + 8a^2q - aS \equiv 0.$$

Za date brojne vrednosti sila i rastojanja, dobijamo: $A = 5 [kN]$, $B_y = 15 [kN]$ i $B_z = -12 [kN]$.

Analitički izrazi:

– za aksijalne sile (opšti brojevi)

$$N(z) = \begin{cases} -A \sin \alpha, & 0 < z < 6a, \\ 0, & 6a < z < 7a. \end{cases}$$

– za aksijalne sile (za date vrednosti)

$$N(z) = \begin{cases} -12, & 0 < z < 6, \\ 0, & 6 < z < 7. \end{cases}$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

– za transverzalne sile

$$T(z) = \begin{cases} A \cos \alpha, & 0 < z < 2a, \\ A \cos \alpha - q(z - 2a), & 2a < z < 6a, \\ S, & 6a < z < 7a. \end{cases}$$

– za transverzalne sile

$$T(z) = \begin{cases} 3, & 0 < z < 2a, \\ -3z + 9, & 2a < z < 6a, \\ 6, & 6a < z < 7a. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} A \cos \alpha \cdot z, & 0 < z < 2a, \\ A \cos \alpha \cdot z - \frac{1}{2}q(z - 2a)^2, & 2a < z < 6a, \\ S(7a - z), & 6a < z < 7a. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} 3 \cdot z, & 0 < z < 2, \\ -\frac{3}{2}z^2 + 9z - 6, & 2 < z < 6, \\ -6z + 42, & 6 < z < 7. \end{cases}$$

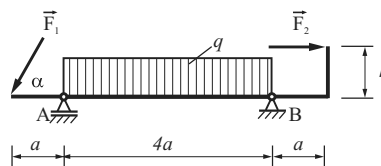
Kao što smo pokazali, relacija (3.5) na str. 39, ekstremna vrednost momenta je na mestu gde je transverzalna sila jednaka nuli. U ovom slučaju, to je moguće samo u drugom polju, tj. $T = 0$ za $-3z + 9 = 0$, odakle dobijamo da je ekstremna vrednost momenta u tački $z_e = 3$. Za ovu vrednost z dobija se vrednost maksimalnog momenta:

$$M_{max} = -\frac{3}{2}z_e^2 + 9z_e - 6 = -9 \cdot 3/2 + 9 \cdot 3 - 6 = 7,5 [kNm].$$

Grafički prikaza dat je na sl. 3.24. □

Zad. 3.5.

Za dati nosač (Slika 3.25) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. U zadatku uzeti da je: $F_1 = 50/3 [kN]$, $F_2 = 5 [kN]$, $q = 2 [kN/m]$, $h = 1 [m]$, $\sin \alpha = 3/5$ i $a = 1 [m]$.



Slika 3.25: uz zadatak 3.5.

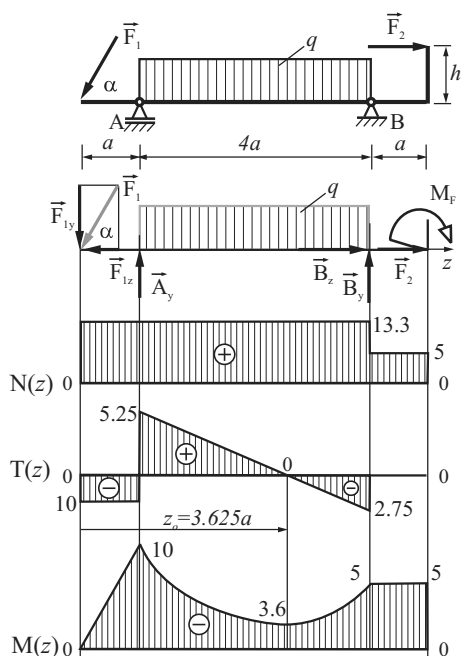
Rešenje:

Iz uslova ravnoteže:

$$\sum_i Y_i = -A_y - B_y + 4q + F_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i Z_i = B_z - F_1 \cos \alpha + F_2 = 0,$$

$$\sum_i M_A = -F_1 \sin \alpha \cdot 1 + 4q \cdot 2 - B_y \cdot 4 + F_2 \cdot h = 0.$$



Slika 3.26: uz rešenje zadatka 3.5.

Analitički izrazi:

– za aksijalne sile

$$N(z) = \begin{cases} F_1 \cos \alpha, & 0 < z < 5, \\ F_2, & 5 < z < 6. \end{cases}$$

– za aksijalne sile

$$N(z) = \begin{cases} 13,3, & 0 < z < 5, \\ 5, & 5 < z < 6. \end{cases}$$

– za transverzalne sile

$$T(z) = \begin{cases} -F_1 \sin \alpha, & 0 < z < 1, \\ A - F_1 \sin \alpha - q(z-1), & 1 < z < 5, \\ 0, & 5 < z < 6. \end{cases}$$

– za transverzalne sile

$$T(z) = \begin{cases} -10, & 0 < z < 1, \\ -2z + 7,25, & 1 < z < 5, \\ 0, & 5 < z < 6. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -F_1 \cdot z \sin \alpha, & 0 < z < 1, \\ -F_1 \cdot z \sin \alpha + A(z-1) - \frac{1}{2}q(z-1)^2, & 1 < z < 5, \\ -F_2 \cdot 1, & 5 < z < 6. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -10 \cdot z, & 0 < z < 1, \\ -z^2 + 7,25z - 16,25, & 1 < z < 5, \\ -5, & 5 < z < 6. \end{cases}$$

Ekstremna vrednost, kao što je viđeno u prethodnom zadatku, dobija se u preseku u kome je $T = 0$. U ovom primeru to je u drugom polju, pa je $T = 0$ za $-2z + 7,25 = 0$, odakle sledi $z_e = 3,625$. Maksimalni moment je $M_{z_e} = -z_e^2 + 7,25z_e - 16,25 = -3,109 \approx -3 [kNm]$.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

odredimo prvo otpore oslonaca. Iz ovih jednačina sledi:

$$A_y = \frac{5}{4}F_1 \sin \alpha + 2aq - \frac{h}{4a}F_2 = \frac{61}{4} = 15,25 [kN],$$

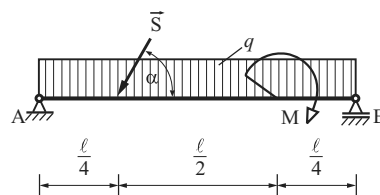
$$B_y = \frac{1}{4} \left(-F_1 \sin \alpha + 8aq + F_2 \frac{h}{a} \right) = 2,75 [kN],$$

$$B_z = F_1 \cos \alpha - F_2 = \frac{25}{3} = 8,3 [kN].$$

Pri rešavanju ovog zadatka treba uočiti da na desnom kraju nosača deluje ekscentrična sila (sila koja ne deluje u težištu preseka). Redukcijom ove sile na težište, mogli smo da posmatramo ekvivalentan nosač, kao što je prikazan na sl. 3.26. Jasno, i u ovom slučaju dobijamo iste uslove ravnoteže, kao i analitičke izraze. $\square$

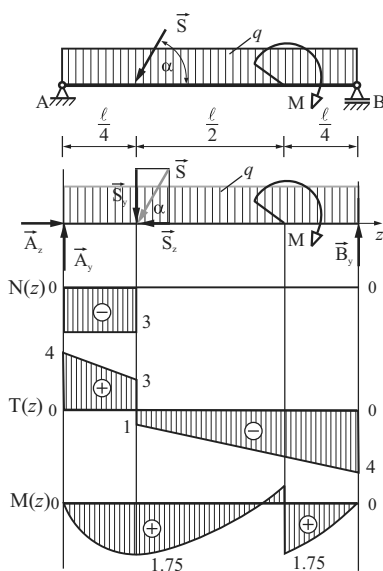
Zad. 3.6.

Za dati nosač (slika 3.27) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. U zadatku uzeti da je: $S = 5 [kN]$, $q = 2 [kN/m]$, $M = 2 [kNm]$, $\ell = 2 [m]$ i $\sin \alpha = 4/5$.



Slika 3.27: uz zadatak 3.6.

Rešenje:



Slika 3.28: uz rešenje zad. 3.6.

Iz uslova ravnoteže odredimo prvo otpore oslonaca:

$$\sum_i Y_i = -A_y - B_y + q\ell + S \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i Z_i = A_z - S \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_i M_A = S \sin \alpha \cdot \frac{\ell}{4} + q\ell \cdot \frac{\ell}{2} + M - B_y \cdot \ell = 0.$$

Oдавde dobijamo:

$$A_y = \frac{1}{2}q\ell + \frac{3}{4}S \sin \alpha - \frac{M}{\ell},$$

$$A_z = S \cos \alpha,$$

$$B_y = \frac{1}{2}q\ell + \frac{1}{4}S \sin \alpha + \frac{M}{\ell}.$$

Zamenom datih vrednosti za sile, moment i rastojanja, dobijamo:

$$A_y = 4 [kN], \quad A_z = 3 [kN], \quad B_y = 4 [kN].$$

Analitički izrazi:

– za aksijalne sile

$$N(z) = \begin{cases} -A_z, & 0 < z < 0,5, \\ 0, & 0,5 < z < 2. \end{cases}$$

– za transverzne sile

$$T(z) = \begin{cases} A_y - qz, & 0 < z < 0,5, \\ A_y - qz - S \sin \alpha, & 0,5 < z < 2. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} A_y \cdot z - \frac{1}{2} q z^2, & 0 < z < 0,5 \\ A_y \cdot z - \frac{1}{2} q z^2 - S \sin \alpha \cdot (z - \ell/4), & 0,5 < z < 1,5 \\ B \cdot (\ell - z) - \frac{1}{2} q (\ell - z)^2, & 1,5 < z < 2. \end{cases}$$

Zamenivši vrednosti za otpore oslonaca, dobijamo:

– za aksijalne sile

$$N(z) = \begin{cases} -3, & 0 < z < 0,5, \\ 0, & 0,5 < z < 2. \end{cases}$$

– za transverzne sile

$$T(z) = \begin{cases} 4 - 2z, & 0 < z < 0,5, \\ -2z, & 0,5 < z < 2. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} 4 \cdot z - z^2, & 0 < z < 0,5 \\ -z^2 + 2, & 0,5 < z < 1,5 \\ 4 - z^2, & 1,5 < z < 2. \end{cases}$$

Izračunajmo sada vrednosti u tačkama koje predstavljaju krajeve/početke intervala (za $z_1 = \ell/4 = 1/2$ i $z_2 = 3\ell/4 = 3/2$). U tim tačkama posmatraćemo transverzne sile i momente i sa leve i sa desne strane, da bismo videli da li u tim tačkama postoje skokovi ili ne. Napomenimo da u tačkama, u kojima se javlja koncentrična sila, javlja se skok u dijagramu sila. Takođe, u tačkama u kojima se javljaju spregovi (momenti), u dijagramu momenata takođe se javlja skok. U ovom primeru, posmatrajmo u tačkama z_1 i z_2 :

$$\begin{aligned} T_1^\ell &= 4 - 2z|_{z=1/2} = 3, & M_1^\ell &= 4 \cdot z - z^2|_{z=1/2} = 1,75, \\ T_1^d &= -2z|_{z=1/2} = -1, & M_1^d &= -z^2 + 2|_{z=1/2} = 1,75. \\ T_2^\ell &= -2z|_{z=3/2} = -3, & M_2^\ell &= -z^2 + 2|_{z=3/2} = -0,25, \\ T_2^d &= -2z|_{z=3/2} = -3, & M_2^d &= 4 - z^2|_{z=3/2} = 2,25. \end{aligned}$$

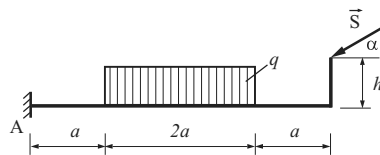
Iz ovog možemo da zaključimo da moment nema prekid u tački z_1 , ali kako u toj tački sila (koja predstavlja koeficijent pravca tangente na momentnu krivu) ima prekid (skok), kriva koja prikazuje promenu momenta nije glatka u toj tački, tj. koeficijent pravca tangente, levi i desni, nije isti. U tački z_2 moment ima skok (pojava sprega u ovoj tački) za vrednost sprega $M = 2$.



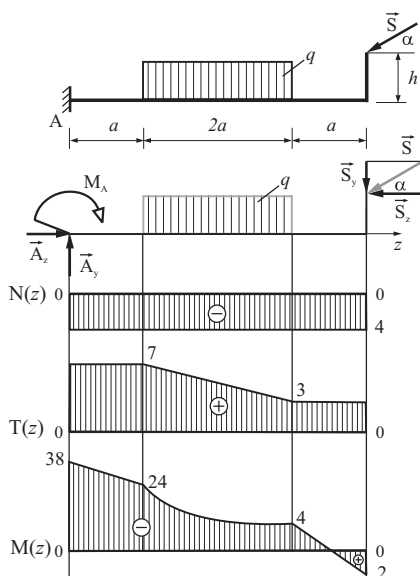
Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Zad. 3.7.

Za nosač prikazan na slici 3.29 izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. Dijagrame nacrtati za posebne vrednosti: $q = 1 \text{ [kN/m]}$, $a = 2 \text{ [m]}$, $h = 0,5 \text{ [m]}$, $S = 5 \text{ [kN]}$, $\sin \alpha = 3/5$.



Slika 3.29: uz zadatak 3.7.

Rešenje:

Slika 3.30: uz rešenje zadatka 3.7.

Uslova ravnoteže:

$$\sum_i Y_i = -A_y + 2aq + S \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i Z_i = A_z - S \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_i M_A = M_A + 2aq \cdot 2a + S \sin \alpha \cdot 4a - S \cos \alpha \cdot h = 0$$

Oдавde dobijamo:

$$A_y = 2aq + S \sin \alpha$$

$$A_z = S \cos \alpha$$

$$M_A = -4a^2q - 4a \cdot S \sin \alpha + h \cdot S \cos \alpha.$$

Napišimo sada analitičke izraze za sile: aksijalne (normalne) N i transverzalne T , kao i za momente savijanja M . Posmatračemo karakteristične preseke, kojih u ovom slučaju ima 3, za koje su ovi izrazi:

$$N(z) = \begin{cases} -S \cos \alpha, & 0 < z < 4a. \end{cases}$$

$$T(z) = \begin{cases} A_y, & 0 < z < a \\ A_y - q(z-a), & a < z < 3a \\ S \sin \alpha, & 3a < z < 4a. \end{cases}$$

$$M(z) = \begin{cases} -M_A + A_y z, & 0 < z < a \\ -M_A + A_y z - \frac{1}{2}q(z-a)^2, & a < z < 3a \\ Sh \cos \alpha - S \sin \alpha(4a-z), & 3a < z < 4a. \end{cases}$$

Zamenivši vrednosti za otpore oslonaca, dobijamo

$$N(z) = \begin{cases} -S \cos \alpha, & 0 < z < 4a. \end{cases}$$

$$T(z) = \begin{cases} S \sin \alpha + 2aq, & 0 < z < a \\ S \sin \alpha + 3aq - qz, & a < z < 3a \\ S \sin \alpha, & 3a < z < 4a. \end{cases}$$

$$M(z) = \begin{cases} -4a^2q - 4aS \sin \alpha + Sh \cos \alpha + S \sin \alpha z + 2aqz, & 0 < z < a \\ -4a^2q - 4aS \sin \alpha + Sh \cos \alpha + (S \sin \alpha + 2aq)z - \frac{1}{2}q(z-a)^2, & a < z < 3a \\ Sh \cos \alpha - S \sin \alpha(4a-z), & 3a < z < 4a. \end{cases}$$

Momenti u krajnim tačkama intervala 1 i 2 su:

$$M_1 = -2a^2q - 3aS \sin \alpha + Sh \cos \alpha, \quad M_2 = Sh \cos \alpha - Sa \sin \alpha.$$

Otpori oslonaca za date vrednosti su:

$$A_y = 7 [kN], \quad A_z = 4 [kN], \quad M_A = -38 [kNm].$$

Analitički izrazi, za zadate vrednosti, su:

$$T(z) = \begin{cases} 7, & 0 < z < 2 \\ 9-z, & 2 < z < 6 \\ 3, & 6 < z < 8. \end{cases} \quad M(z) = \begin{cases} -38+7z, & 0 < z < 2 \\ -\frac{1}{2}z^2+9z-40, & 2 < z < 6 \\ 3z-22, & 6 < z < 8. \end{cases}$$

Aksijalna sila je konstantna u celom intervalu, tj. $N(z) = -4$, $0 < z < 8$.

Izračunajmo transverzalne sile i momente u krajnjim tačkama prvog i drugog intervala:

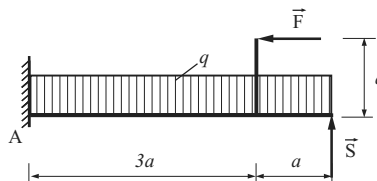
$$T_1^\ell = T_1^d = 7, \quad M_1^\ell = -38 + 14 = -24, \quad M_1^d = -\frac{1}{2}2^2 + 9 \cdot 2 - 40 = -24,$$

$$T_2^\ell = T_2^d = 3, \quad M_2^\ell = -\frac{1}{2} \cdot 36 + 54 - 40 = -4, \quad M_2^d = 18 - 22 = -4.$$

Oдавде zaključujemo da moment u tački 1 nema skok, a pošto je vrednost transverzalne sile, levo i desno, jednaka, to će kriva, koja predstavlja moment, biti glatka u ovoj tački. $\square$

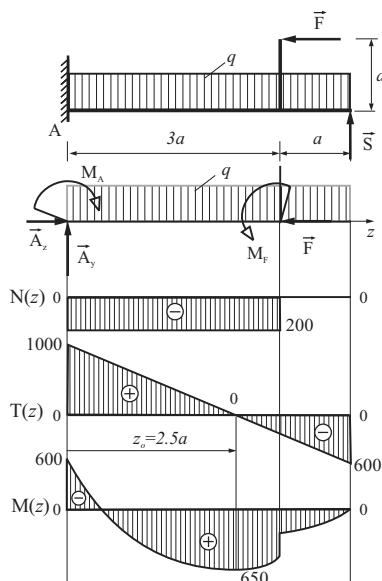
Zad. 3.8.

Za dati nosač (sl. 3.31) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. U zadatku uzeti da je: $q = 400 [N/m]$, $F = 200 [N]$, $S = 600 [N]$, $a = 1 [m]$.



Slika 3.31: uz zadatak 3.8.

Rešenje:



Slika 3.32: uz rešenje zadatka 3.8.

Provera:

$$\begin{aligned} \sum_i M_B &= M_u - F \cdot a + A_y \cdot 4a - 4aq \cdot 2a = \\ &= -8a^2q + Fa + 4aS - 8a^2q - Fa + 4a(4aq - S) \equiv 0. \end{aligned}$$

Ovde je tačka B slobodan kraj konzole. Za date podatke, otpori oslonaca su:

$$A_y = 1000 [N], \quad A_z = 200 [N], \quad M_u = -600 [Nm].$$

Analitički izrazi:

– za aksijalne sile (opšti brojevi)

$$N(z) = \begin{cases} -A_z, & 0 < z < 3, \\ 0, & 3 < z < 4. \end{cases}$$

– za aksijalne sile (za date vrednosti)

$$N(z) = \begin{cases} -200, & 0 < z < 3, \\ 0, & 3 < z < 4. \end{cases}$$

– za transverzalne sile

$$T(z) = A_y - qz, \quad 0 < z < 4.$$

– za transverzalne sile

$$T(z) = 1000 - 400z, \quad 0 < z < 4.$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -M_u + A_y \cdot z - \frac{1}{2}qz^2, \\ -M_u + A_y \cdot z - \frac{1}{2}qz^2 - F \cdot h, \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -600 + 1000 \cdot z - 200z^2, \\ -800 + 1000 \cdot z - 200z^2, \end{cases}$$

Iz uslova ravnoteže odredimo prvo otpore oslonaca:

$$\sum_i Y_i = -A_y + 4q - S = 0,$$

$$\sum_i Z_i = A_z - F = 0,$$

$$\sum_i M_A = M_u - Fa + 8a^2q - 4aS = 0.$$

Odavde dobijamo:

$$A_y = 4aq - S,$$

$$A_z = F,$$

$$M_u = -8a^2q + Fa + 4aS.$$

Posmatrajmo presek ($z_1 = 3$) u kom deluje ekscentrična sila i izračunajmo levu i desnu vrednost tansverzalne sile i momenta:

$$T_1^\ell = 1000 - 400z_1 = -200, \quad M_1^\ell = -600 + 1000 \cdot z_1 - 200z_1^2 = 600,$$

$$T_1^d = 1000 - 400z_1 = -200, \quad M_1^d = -800 + 1000 \cdot z_1 - 200z_1^2 = 400.$$

Oдавde vidimo da moment ima skok na mesu delovanja ekscentrične sile, i to za vrednost $F \cdot a = 200$. Kako transverzalna sila nema promene, to je parabola (ista) na tom mestu "smaknuta" za vrednost skoka.

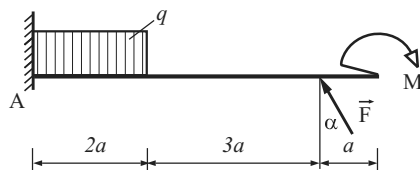
Ekstremna vrednost momenta:

$$\frac{dM}{dz} = T = 0 = 1000 - 400z \Rightarrow z_{ext} = 2,5 [m] \quad \text{i} \quad M_{ext} = 650 [Nm].$$



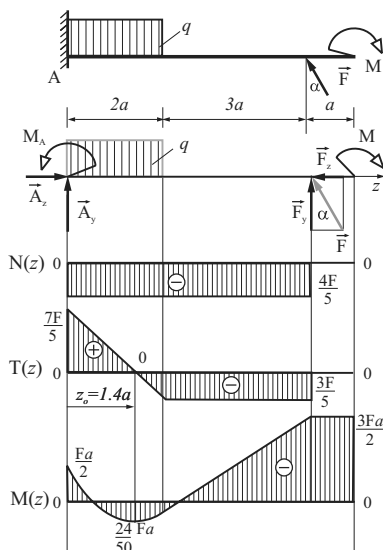
Zad. 3.9.

Za dati nosač (sl. 3.33) izračunati otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame. Uzeti da je: $M = \frac{3}{2}F \cdot a$, $q = F/a$, $\sin \alpha = 4/5$.



Slika 3.33: uz zadatak 3.9.

Rešenje:



Iz uslova ravnoteže odredimo prvo otpore oslonaca:

$$\sum_i Y_i = -A_y - F \cos \alpha + 2aq = 0,$$

$$\sum_i Z_i = A_z - F \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i M_A = -M_u + M + 2aq \cdot a - F \cos \alpha \cdot 5a = 0.$$

Oдавde se dobija: $A_y = \frac{7}{5}F$, $A_z = \frac{4}{5}F$ i $M_u = 0,5 \cdot Fa$.

Slika 3.34: uz rešenje zadatka 3.9.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Analitički izrazi:

– za aksijalne sile (opšti brojevi)

$$N(z) = \begin{cases} -A_z, & 0 < z < 5a, \\ 0, & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

– za aksijalne sile (za date vrednosti)

$$N(z) = \begin{cases} -\frac{4}{5}F, & 0 < z < 5a, \\ 0, & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

– za transversalne sile

$$T(z) = \begin{cases} A_y - qz, & 0 < z < 2a, \\ A_y - 2aq, & 2a < z < 5a, \\ 0, & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

– za transversalne sile

$$T(z) = \begin{cases} \frac{7}{5}F - \frac{F}{a}z, & 0 < z < 2a, \\ -\frac{3}{5}F, & 2a < z < 5a, \\ 0, & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} A_y \cdot z - \frac{1}{2}qz^2 - M_u, & 0 < z < 2a, \\ A_y \cdot z - 2aq(z - a) - M_u, & 2a < z < 5a, \\ -M, & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

– za momente savijanja

$$M(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{F}{a}z^2 + \frac{7}{5}F \cdot z - \frac{1}{2}aF, & 0 < z < 2a, \\ -\frac{3}{5}F \cdot z + \frac{3}{2}aF, & 2a < z < 5a, \\ -\frac{3}{2}Fa. & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

Ekstremna vrednost momenta je u prvom polju, jer transversalna sila može jedino tu da bude nula. Dakle, $F - \frac{F}{a}z = 0$ odakle sledi da je $z_e = 7/5a$, a ova vrednost se nalazi u ovom opsegu, pa postoji ekstremna vrednost, koja iznosi $M_{ext} = M(z_e) = 7/5F \cdot 7/5a - \frac{1}{2}\frac{F}{a}(7/5a)^2 - \frac{1}{2}aF = 24/50aF$.

□

Na kraju, napomenimo da u zadacima u kojima se posmatra konzola, nije neophodno da odredimo otpore oslonaca, da bismo mogli da crtamo statičke dijagrame. Naime, ako krenemo od slobodnog kraja možemo da ispišemo analitičke izraze posmatrajući onu stranu preseka u kojoj su sve veličine poznate.

Kao primer, posmatrajmo poslednji zadatak 3.9. Napišimo samo izraze za moment, vodeći računa o konvenciji o znaku i posmatrajući desni deo preseka.

$$M(z) = \begin{cases} -M + F(\cos \alpha)(5a - z) - \frac{1}{2}q(2a - z)^2, & 0 < z < 2a, \\ -M + F(\sin \alpha)(5a - z), & 2a < z < 5a, \\ -M, & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

Zamenivši izračunate veličine, dobijamo:

$$M(z) = \begin{cases} -\frac{F}{2a}z^2 + \frac{7}{5}Fz - \frac{1}{2}Fa, & 0 < z < 2a, \\ -\frac{3}{5}F \cdot z + \frac{3}{2}aF, & 2a < z < 5a, \\ -\frac{3}{2}Fa, & 5a < z < 6a. \end{cases}$$

Vidimo da se ovi izrazi poklapaju.