

GLAVA 5

DEFORMACIJA

5.1 Uvod

Proučavajući razne konstrukcije, građevine, mašine i vozila, zadatak inženjera je da, između ostalog, odredi dimenzije pojedinih delova (elementa konstrukcije), tako da posmatrani deo ima čvrstinu da se odupre spoljašnjim silama, koje se prenose na njega preko susednih elemenata, da ne dođe do loma. Pored toga treba da vodi računa i o ekonomičnosti konstrukcije (manji utrošak materijala).

Pri rešavanju ovih zadataka potrebno je da se sagleda kako se pojedina tela menjaju pod dejstvom spoljašnjih sila. Naime, realna tela pod dejstvom spoljašnjih sila menjaju svoj oblik i dimenzije (zapreminu), tj. deformabilna su. S druge strane, pod dejstvom istih sila neće, na isti način, da se deformišu elementi istog oblika, ako su napravljeni od različitih materijala. Takođe, u opštem slučaju, ako na delove od istog materijala, ali različitog oblika, delujemo istim silama njihove deformacije će da se razlikuju.

Dakle, potrebno je proučiti uticaj spoljašnjih sila, vrste materijala i oblika tela na njegovu deformaciju. Nauka koja se bavi proučavanjem ovih zakonitosti je Mehanika neprekidnih sredina (mehanika kontinuuma).

U okviru Mehanike neprekidnih sredina nalazi se i Teorija elastičnosti. Ova teorija takođe polazi od osobina materijala, dobijenih eksperimentalno, a zatim primenjuje zakone mehanike.

Međutim, kako je matematički aparat, koji se koristi u ovoj teoriji, često složen i nepristupačan za mnoge praktične probleme, pribegava se drugom prilazu.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Do mnogih relacija koje se izvode u Teoriji elastičnosti, a odnose se na tehnički važne probleme, može da se dođe na jednostavniji način, uvodeći izvesne hipoteze o deformaciji tela. Polazeći od tih hipoteza, iz Teorije elastičnosti, izdvaja se posebna tehnička disciplina - Otpornost materijala. Međutim, ova disciplina ima svojih nedostataka koji se ogledaju u proizvoljnosti osnovnih pretpostavki, zbog čega nije uvek jasno do koje mere su ovako izvedeni zaključci primenljivi u praksi. Zbog toga Otpornost materijala koristimo za rešavanje onih problema za koje postoji dugogodišnje i isprobano iskustvo.

Navedimo sada osnovne **pretpostavke o materijalu i deformaciji**, pod kojim se izvode odgovarajuće relacije u Otpornosti materijala:

- a) Pri izvođenju odgovarajućih relacija pretpostavićemo da je telo neprekidno ispunjeno materijom – **pretpostavka o neprekidnosti materijala**. Savremena fizika je dokazala da su stvarna tela, u stvari, sastavljena od diskretno raspoređenih materijalnih čestica. Međutim, ova pretpostavka može da se prihvati s obzirom da je broj materijalnih čestica, u maloj zapremini, veoma veliki.
- b) **Materijal je izotropan**. Ovo je osobina materijala da se podjednako ponaša pod istim uslovima, u svim pravcima. Napomenimo da postoje materijali koji u različitim pravcima ispoljavaju različite mehaničke osobine (anizotropni materijali). Karakterističan primer anizotropnih materijala je drvo, kod koga su različita svojstva u pravcu vlakana od onih u upravnim pravcima. Armirani beton, armirano staklo su karakteristični primeri anizotropnih materijala. Međutim, mi nećemo da proučavamo ovu vrstu materijala.
- c) **Materijal je homogen**. Ovo znači da tela imaju jednaku strukturu po čitavoj zapremini, pa odatle sledi da su i mehanikčka svojstva u svim tačkama ista.
- d) **Materijal je elastičan**. Dakle, pretpostavićemo da tela izložena spoljnim silama imaju samo elastične deformacije, tj. po prestanku sila vraćaju se u prvobitno stanje. Ova pretpostavka je za konstruktivne materijale ispunjena do izvesnih granica.¹
- e) **Pretpostavićemo da su deformacije**, koje se javljaju u telu, **male**. Dakle, relacije koje ćemo da izvedemo važiće samo pod uslovom da su deformacije tela male u odnosu na dimenzije tela.

¹Napomenimo da se u literaturi iz ove oblasti mogu da nađu i knjige u kojima se proučavaju i plastične kao i visko-elastične deformacije.

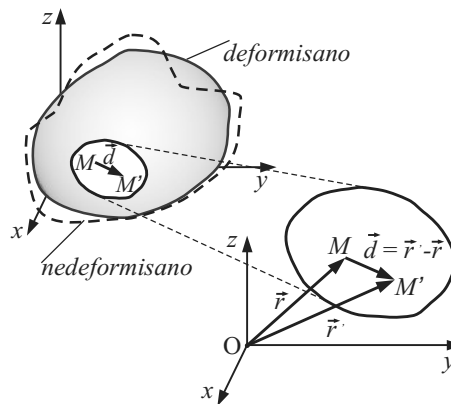
- f) Na kraju, navedimo i jedan princip, **princip superpozicije**, koji važi samo u slučaju malih deformacija. Prema ovom principu mala elastična deformacije tela, izazvana istovremenim dejstvom više sila, jednaka je geometrijskom zbiru deformacija izazvanih svakom silom posebno.

5.2 Pomeranje tačke. Komponente pomeranja

Posmatrajmo čvrsto deformabilno telo koje je pod dejstvom spoljnih sila iz nedeformisanog stanja (početna konfiguracija) prešlo u deformisani oblik (trenutna konfiguracija).

U nedeformisanom stanju tela, čija je kontura, na slici 5.1, označena isprekidanom linijom, uočimo proizvoljnu tačku tela M , čiji je položaj određen vektorom položaja $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ u odnosu na proizvoljno izabran ortogonalni koordinatni sistem $Oxyz$.

U deformisanom stanju tela, čija je kontura prikazana punom linijom (sl. 5.1), položaj iste materijalne tačke, posle deformacije tela, određen je tačkom M' , a njen vektor položaja je $\mathbf{r}' = \overrightarrow{OM'}$.



Slika 5.1: Vektor pomeranja.

Tada je pomeranje tačke M , usled deformacije tela, određeno **vektorom pomeranja $\mathbf{d}$**

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}.$$

Vektor pomeranja možemo da razložimo na **komponente pomeranja** u , v i w , duž koordinatnih osa, tj.

$$\mathbf{d} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}. \quad (5.1)$$

U opštem slučaju, pomeranja tačaka tela zavise od njihovog položaja u telu, odnosno od njenih koordinata x , y i z , tj.:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

Pretpostavljamo da su ove funkcije neprekidne, diferencijabilne i da imaju izvode do potrebnog reda.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Razmatraćemo samo slučajeve kod kojih su komponentalna pomeranja tačaka veoma mala u odnosu na dimenziju tela. Iz tog razloga se proizvodi komponentnih pomeranja, odnosno proizvodi njihovih izvoda, mogu zanemariti kao male veličine višeg reda.

Nadalje, posmatraćemo samo probleme, kao što je u Uvodu rečeno, za koje je pretpostavka, o malim deformacijama, ispunjena.

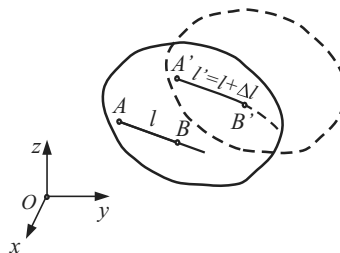
Deformisani oblik tela je poznat ako poznamo vektore pomeranja svih tačaka tela, odnosno ako poznamo komponentna pomeranja u , v i w kao funkcije koordinata.

5.3 Deformacija

Pod dejstvom spoljašnjih sila tela se deformišu, tj. menjaju svoj oblik i zapreminu. Pri promeni zapremine dolazi do promene rastojanja između dve uočene tačke tela. Ovakvu deformaciju nazivamo **dilatacija** (**izduženje**, odnosno **skraćenje**). Pri promeni oblika tela, u opštem slučaju, menja se ugao između dva uočena pravca. Ovakvu (ugaonu) deformaciju nazivamo **klizanje** (**smicanje**). Dakle, proizvoljnu deformaciju možemo da izrazimo preko dilatacije i klizanja.

5.3.1 Dužinska deformacija – dilatacija

Posmatrajmo neku tačku A u telu i njoj blisku tačku B (sl. 5.2). Neka je njihovo rastojanje $\overline{AB} = \ell$. Pod dejstvom sila telo se deformiše i tačke A i B prelaze u položaje A' i B' , čije je rastojanje $\overline{A'B'} = \ell'$.



Slika 5.2: Dužinska deformacija – dilatacija.

Definicija:

Neka se prvobitna dužina promenila za $\Delta\ell$, tj.: $\ell' - \ell = \Delta\ell$, tada se količnik:

$$\varepsilon_{\ell sr} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

naziva **srednja dilatacija** (srednje izduženje) u okolini tačke A , u pravcu AB .

Definicija:

Veličina ε_l , definisana sa:

$$\varepsilon_l = \lim_{B \rightarrow A} \frac{\Delta l}{l}, \quad (5.2)$$

naziva se **dilatacija** (specifično izduženje) u tački A , za pravac AB .

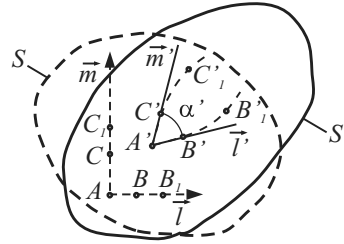
Prema definiciji, dilatacija je pozitivna pri izduženju, a negativna pri skraćanju rastojanja između dve tačke. Dilatacija je bezdimenzionalna veličina.

Na ovaj način videli smo kako može da se meri promena dužine, ali jasno je da pored ovog imamo i promenu pravca, kao što smo prethodno rekli. Dakle, da bismo znali deformaciju u okolini neke tačke A , potrebno je da znamo kako promenu rastojanja između poznate tačke A i njoj bliske tačke, tako i promenu uglova između pravaca, koji prolaze kroz tačku A .

5.3.2 Ugaona deformacija – klizanje

Uočimo u nedeformisanom telu prav ugao $\angle BAC$, određen jediničnim vektorima ℓ i $\mathbf{m}$, koji posle deformacije obrazuju ugao $\alpha' = \angle B'A'C'$ (slika 5.3).

Veličina $\gamma = \pi/2 - \alpha'$ određuje promenu pravog ugla u tački A . Međutim, kada bismo posmatrali neke druge tačke, recimo B_1, C_1 , itd., tada bi, u opštem slučaju, ugao α' , pa samim tim i γ , bio različit. Zato posmatrajmo tačke veoma bliske tački A :



Slika 5.3: Ugaona deformacija – klizanje.

$$\gamma_{lm} = \lim_{B, C \rightarrow A} \left[\frac{\pi}{2} - \angle B' A' C' \right] = \frac{\pi}{2} - \alpha'. \quad (5.3)$$

Definicija:

Veličina (γ_{lm}), definisana relacijom (5.3), naziva se **klizanje** u tački A između pravaca određenih jediničnim vektorima ℓ i $\mathbf{m}$.

Usvojicemo da je klizanje pozitivno, ako se prav ugao (pre deformacije) smanjio (posle deformacije), a negativno, ako se prav ugao povećao, posle deformacije.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Iz definiciji sledi:

$$\gamma_{\ell m} = \gamma_{m\ell},$$

simetrija po indeksu, tj. smer, u kome merimo ugao, u ovom slučaju nije bitan.

5.3.3 Poprečna deformacija

Prethodno smo definisali dilataciju (5.2). Tako definisana veličina, u stvari, predstavlja **uzdužnu dilataciju**. Međutim, jasno je da ako na telo delujemo sa dve aksijalne sile (suprotnog smera) da pored promene dužine, u pravcu tih sila, dolazi i do **poprečne deformacije**. Eksperimentalno je uočeno da postoji sledeća veza između uzdužne i poprečne dilatacije:

$$\varepsilon_p = -\mu\varepsilon, \quad (5.4)$$

gde je: ε_p - poprečna dilatacija, ε - uzdužna dilatacija, μ - Poasonov² koeficijent (koeficijent bočne kontrakcije ili koeficijent poprečne dilatacije), čija je vrednost u granicama $0 < \mu < \frac{1}{2}$.

5.3.4 Deformacija usled promene temperature

Do promene rastojanja između tačaka tela može da dođe i usled promene temperature tela. U slučaju malih deformacija smatra se da je dilatacija, koja je nastala usled promene temperature, proporcionalna toj promeni:

$$\varepsilon_t = \alpha_t \Delta t, \quad (5.5)$$

gde je: α_t - **koeficijent toplotnog širenja**, Δt - promena temperature ($\Delta t > 0$, ako t raste, tj. telo se zagreva, $\Delta t < 0$, ako t opada, tj. telo se hladi).

5.3.5 Zapreminska deformacija

Pored dilatacije i klizanja definiše se i **zapreminska deformacija** ili kubna dilatacija. Ona predstavlja relativnu promenu zapremine V , a određena je izrazom:

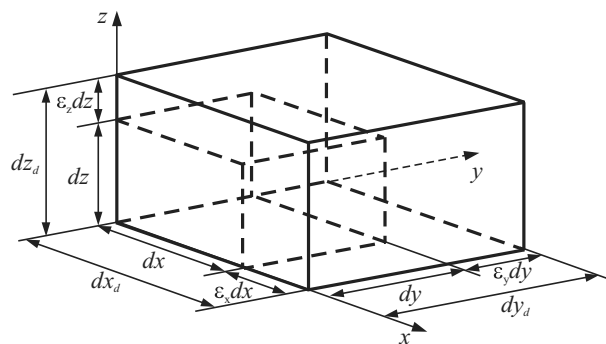
$$\varepsilon_v = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V} = \frac{dV_d - dV}{dV}, \quad (5.6)$$

gde je $dV = dx dy dz$ zapremina elementarnog paralelopipeda pre deformacije, a $dV_d = dx_d dy_d dz_d$ posle deformacije (sl. 5.4).

²Simon Dany Poisson (1781-1840), francuski matematičar. Dao je niz rešenja, u oblasti mehanike deformabilnog tela, primenljivih u praksi

5.3.6 Veza između zapreminske i podužne deformacije

Na slici 5.4 isprekidanom linijom prikazan je elementarni kvadar u nedeformisanom telu, a punom linijom isti kvadar u deformisanom stanju.



Slika 5.4: Veza dužinskih deformacija i zapreminske deformacije.

Kako je (vidi sl. 5.4) $dx_d = (1 + \varepsilon_x)dx$, $dy_d = (1 + \varepsilon_y)dy$ i $dz_d = (1 + \varepsilon_z)dz$, to je:

$$\begin{aligned} dV_d &= dx_d dy_d dz_d = (1 + \varepsilon_x)dx \cdot (1 + \varepsilon_y)dy \cdot (1 + \varepsilon_z)dz = \\ &= (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dx dy dz = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dV = \\ &= (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z)dV. \end{aligned}$$

Kada se radi sa malim deformacijama, što je kod nas slučaj, mogu se zanemariti male veličine drugog i trećeg reda, tj. $\varepsilon_x \varepsilon_y \ll 1, \dots, \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \ll 1$, pa dobijamo

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (5.7)$$

Pri posmatranju zapreminske deformacije nismo uzeli u obzir uticaj ugaonih deformacija, jer pri malim deformacijama njihov uticaj na promenu zapremine može se zanemariti.

5.3.7 Matrica tenzora deformacije

Da bismo znali kako će da se telo deformiše u okolini neke tačke M , potrebno je da poznamo dilataciju i klizanje za sve pravce kroz tu tačku (M).

Definicija:

Skup svih dilatacija i klizanja za sve pravce kroz tačku M naziva se **stanje deformacije u tački M** .

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Može da se pokaže da ako znamo ove veličine (dilatacija, klizanje) za tri međusobno upravna pravca, tada je poznato stanje deformacije u tački M . Ako obeležimo te pravce sa x , y , z , tada dilatacije i klizanja možemo da predstavimo matricom (više videti u [4], str.59):

$$D_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

ili

$$D_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Ovu matricu nazivamo **matrica tenzora deformacije**. Elemente matrice ε_{ij} nazivamo **komponentalne deformacije**.

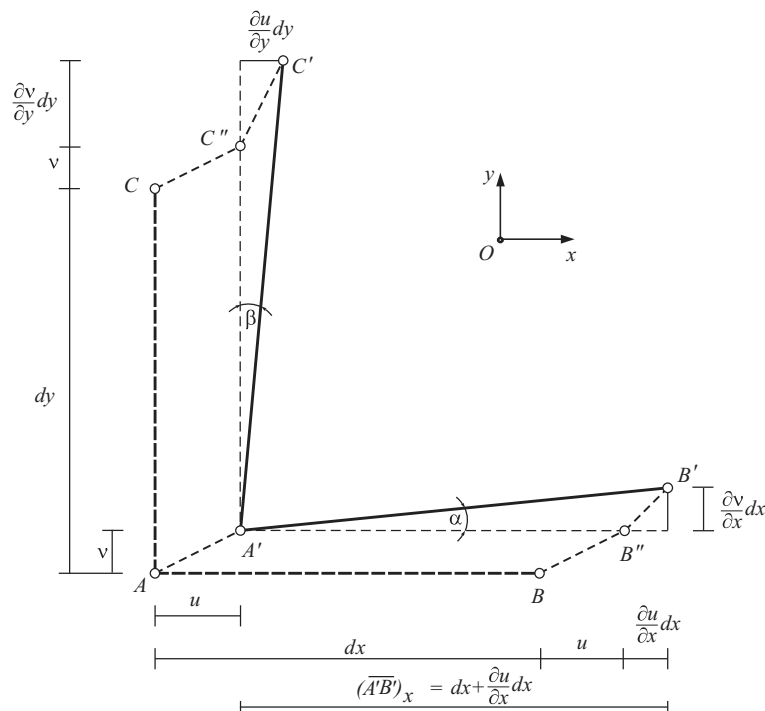
Stanje deformacije u okolini tačke predstavlja, kao što smo videli, neograničen broj dilatacija za različite pravce i neograničen broj klizanja za različite parove ortogonalnih pravaca. Možemo postaviti pitanje: za koliko pravaca i za koliko parova ortogonalnih pravaca kroz tačku treba da poznamo i dilatacije i klizanja, da bismo poznavali stanje deformacije u okolini te tačke.

Stanje deformacije u okolini tačke poznato je ako je poznata matrica komponentalnih deformacija, odnosno ako su poznate tri dilatacije i tri klizanja za tri međusobno upravna pravca povučena kroz uočenu tačku.

Već smo napomenuli da su veličine: dilatacija i klizanje, veličine vezane za tačku tela, tj. menjaju se od tačke do tačke. Međutim, ako su u posebnom slučaju, dilatacije u svim tačkama tela za jedan isti pravac jednake, kao i klizanja između paralelnih pravaca jednaka, tada kažemo da je **deformacija** u telu **homogena**.

5.3.8 Veza između pomeranja i komponentalnih deformacija

Prethodno smo definisali dilataciju ε_{AB} (5.2) i klizanje γ_{lm} (5.3). Nađimo sada vezu između pomeranja i komponentalnih deformacija. U tu svrhu, uočimo tri tačke A , B i C u nedeformisanoj konfiguraciji, tako da je ugao $\widehat{BAC}$ prav ugao. Prepostavićemo da su rastojanja između ovih tačaka infinitezimalna: $\overline{AB} = dx$ i $\overline{AC} = dy$ (slika 5.5).



Slika 5.5: Komponentalne deformacije.

Prema slici 5.5, duž $\overline{AB}$ (nedeformisana konfiguracija – isprekidana linija) prelazi u $\overline{A'B'}$ (trenutna konfiguracija – puna linija), pa prema (5.2), za pravac x , imamo (za male deformacije):

$$\varepsilon_x = \frac{(\overline{A'B'})_x - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.9)$$

Na sličan način bi dobili dilatacije u y i z pravcu:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (5.11)$$

Sa u , v i w označili smo komponente pomeranja tačke A u pravcima x , y i z osa, respektivno.

Odredimo sada klizanja. Prema definiciji (5.3), a prema slici 5.5, imamo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B'A'C'} = \alpha + \beta. \quad (5.12)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Kako je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

jer je za male deformacije $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$. Takođe, zbog malih deformacija ($\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, za male uglove), sledi:

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.13)$$

Analogan izraz dobijamo i za β :

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.14)$$

Konačno za γ_{xy} dobijamo (za male deformacije !):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.15)$$

Na sličan način se dobijaju i preostala klizanja:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.16)$$

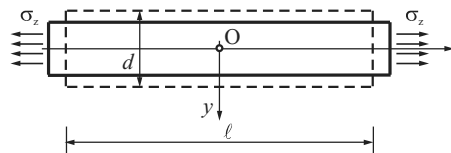
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5.17)$$

Dilatacije ε_x , ε_y , ε_z i klizanja γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} nazivamo **komponentalne deformacije**.

5.4 Zadaci

Zad. 5.1.

Na štap prečnika $d = 20 [mm]$, dužine $\ell = 200 [mm]$, deluje na krajevima jednoliko raspodeljeno normalno opterećenje (sl. 5.6).



Slika 5.6: uz zad.5.1.

Merenjem je ustanovljeno da se štap produžio za $0,03 [mm]$, a prečnik smanjio za $0,01 [mm]$. Odrediti uzdužnu deformaciju ε_z i poprečnu deformaciju ε_y .

Rešenje:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{0,03}{200} = 0,0015,$$
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta d}{d} = \frac{-0,01}{20} = -0,0005.$$

Izračunate vrednosti su srednje vrednosti, ali kako su deformacije u štapu homogene one su i stvarne deformacije. 

GLAVA 6

NAPON

6.1 Uvod

Za telo koje je izloženo dejstvu spoljašnjih sila kažemo da je opterećeno ili **napregnuto**.

Spoljašnje sile mogu na telo da deluju preko spoljašnje površi - **površinske sile** ili na svaki element tela - **zapreminske sile** (karakterističan primer za ovu vrstu sile je sila Zemljine teže). Kao posledica dejstva spoljašnjih sila u telu javljaju se **unutrašnje sile**.

Posmatrajmo neko telo na koje deluju spoljašnje sile, koje su u ravnoteži. Da bismo objasnili postojanje unutrašnjih sila u napregnutom telu, podelićemo ga na dva dela (I i II) nekom zamišljenom površi π (vidi sliku 6.1). Da bi na ovaj način dobijeni delovi tela bili u istom stanju (stanju ravnoteže) kao i dok su pripadali celini, potrebno je da uticaj jednog dela na drugi zamenimo odgovarajućim silama koje deluju na zamišljenu presečnu ravnu površ. Kako je celo telo bilo u ravnoteži, to je i svaki njegov deo u ravnoteži. Na osnovu ovog sledi

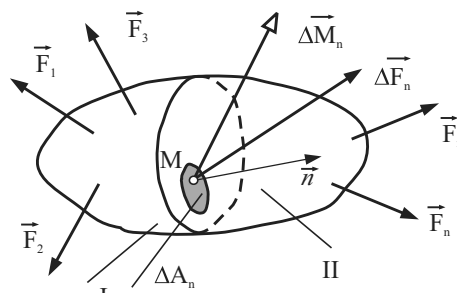
Postulat 1 (Osnovni postulat Otpornosti materijala) *Ako zamislimo da smo iz napregnutog tela, pomoću jedne ili više presečnih ravni, izdvojili konačan ili beskonačno mali deo njegove zapremine, tada spoljašnje sile, koje deluju na taj deo tela, i unutrašnje sile, raspoređene po njegovim presečnim površima, čine ravnotežni sistem.*

Ovaj postulat omogućava primenu metoda Statike krutog tela na deo napregnutog (deformabilnog) tela.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

6.2 Napon

Uočimo u presečnoj ravni, čiji je položaj određen jediničnim vektorom normale $\mathbf{n}$, element površine ΔA_n , koji sadrži tačku M (slika 6.1). Na površinski element ΔA_n (površine ΔA_n) deluju površinske sile u svakoj tački. Njihovom redukcijom na posmatranu tačku M dobija se glavni vektor sile $\Delta \mathbf{F}_n$ i glavni vektor momenta $\Delta \mathbf{M}_n$.



Slika 6.1: Unutrašnje sile - napon.

Definicija:

Veličina definisana relacijom

$$\frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A_n}$$

naziva se **srednji napon**.

Definicija:

Veličina definisana sa

$$\frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta A_n}$$

naziva se **srednji naponski spreg**.

Definicija:

Veličina definisana sa:

$$\mathbf{t}_{(n)} = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A_n} = \frac{d\mathbf{F}_n}{dA_n}, \quad (6.1)$$

nazive se **vektor napona** (u daljem tekstu kratko **napon**) u tački M za presečnu ravan koja je određena jediničnim vektorom normale $\mathbf{n}$.

Veličina $\mathbf{t}_{(n)}$ naziva se i **ukupan** ili **totalni napon**.

☞ Napomenimo da pri graničnom procesu tačka M uvek ostaje u ΔA .

Dimenzija napona, prema (6.1), je:

$$|\mathbf{t}_{(n)}| = |\text{sila/površina}|,$$

a jedinica u SI sistemu mera je *Paskal* (označava se sa Pa):

$$\left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa].$$

U opštem slučaju, napon će u nekoj drugoj tački da bude različit. Međutim, i u istoj tački, ali za neku drugu presečnu ravan vrednosti napona nisu iste, pa zaključujemo da napon zavisi od vektora položaja i od položaja presečne ravni, tj. on je funkcija oblika:

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{n}),$$

gde je $\mathbf{r}$ - vektor položaja. Takođe, pretpostavlja se da je ova funkcija neprekidna.

Neka je $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ vektor napona u nekoj tački za presečnu ravan sa normalom $\mathbf{n}$. Unutrašnju silu, koja deluje na element površi dA , možemo sada, prema (6.1), da izrazimo u obliku:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} dA, \quad (6.2)$$

a rezultujuća površinska sila, koja deluje na konačnu površ A , je:

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} dA. \quad (6.3)$$

Za sve vrste naprezanja, koja ćemo razmatrati, naponski spregovi se zanemaruju¹, tj. smatra se da je

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta A} = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Napred je rečeno da je napon funkcija položaja presečne ravni, pa odatle sledi da u svakoj tački imamo beskonačno mnogo vektora napona, jer kroz tačku prolazi beskonačno različitih ravni.

Definicija:

Vektori napona, za sve presečne ravni, koje prolaze kroz jednu tačku tela, određuju **stanje napona** u toj tački.

¹U osnovnim kursevima Otpornosti materijala obično se ova veličina zanemaruje, dok u naprednijim kursevima se i ona uzima u obzir. Recimo, u teoriji ljuski ne bi trebala da se zanemari.

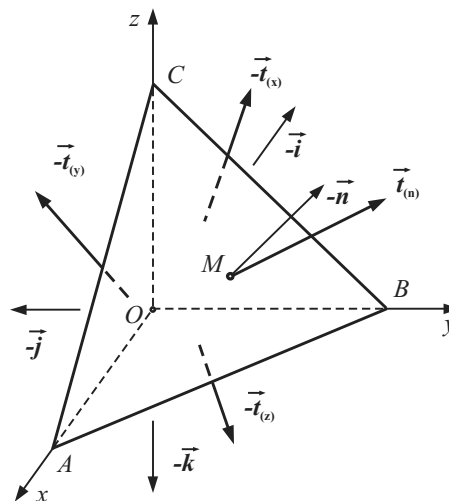
Kao što je već rečeno, napon je neprekidna funkcija položaja, odakle zaključujemo da su naponi u dve bliske tačke, a za paralelne presečne ravni različiti. Međutim, zbog pretpostavke o neprekidnosti ove funkcije, njihove vrednosti će se razlikovati za malu vrednost, koja može da se zanemari u odnosu na vrednost samog napona. Zbog toga kažemo da je stanje napona u okolini tačke napregnutog tela – **homogeno**.

Nameće se pitanje, koliko je najmanje vektora napona potrebno da poznajemo, u nekoj tački, da bismo znali stanje napona u toj tački? O tome govori sledeći

Stav 1 *Stanje napona u svakoj tački tela je potpuno određeno vektorima napona za bilo koje tri nekomplanarne presečne ravni u toj tački.*

Dokaz: Da bismo dokazali ovaj stav, posmatrajmo ravnotežu elementarnog tetraedra isečenog oko tačke M (sl. 6.2), napregnutog tela.

Na osnovu pretpostavke o homogenosti stanja napona u okolini tačke možemo da smatramo da su naponi na stranicama tetraedra jednaki naponima u posmatranoj tački M , za paralelne presečne ravni, koje prolaze kroz ovu tačku.



Slika 6.2: Ravnotežni tetraedar.

Uslov ravnoteže (po silama!) je:

$$\mathbf{t}_{(n)} dA_{ABC} - \mathbf{t}_x dA_{OBC} - \mathbf{t}_y dA_{OAC} - \mathbf{t}_z dA_{OAB} = 0. \quad (6.5)$$

Kako je:

$$\begin{aligned} dA_{ABC} &\equiv dA, & dA_{OBC} &= dA \cos \alpha, \\ dA_{OAC} &= dA \cos \beta, & dA_{OAB} &= dA \cos \gamma, \end{aligned}$$

gde su α, β, γ - uglovi koje normala $\mathbf{n}$ zaklapa sa x, y i z osom, respektivno, to, zamenom prethodnih izraza u (6.5), dobijamo:

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{t}_x \cos \alpha + \mathbf{t}_y \cos \beta + \mathbf{t}_z \cos \gamma. \quad (6.6)$$

Dakle, ako su poznati naponi za tri nekomplanarne ravni (u ovom slučaju $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$, $\mathbf{t}_z$), tada možemo da odredimo napon $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ za bilo koju presečnu ravan (određenu normalom $\mathbf{n}$ – tj. poznavanje uglova α , β i γ). Ovim je stav dokazan. $\square$

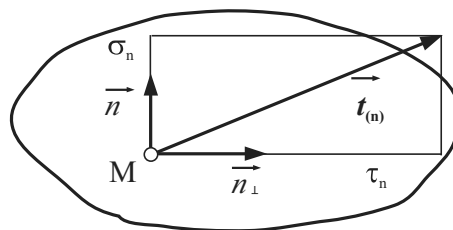
Jednačina (6.6) u literaturi poznata je kao **Košijeva² jednačina**.

6.2.1 Normalni i smičući (tangencijalni) naponi

Vektor napona možemo da razložimo na dve komponente:

jednu koja je u pravcu normale $\mathbf{n}$ – **normalni napon** σ_n , i drugu koja leži u presečnoj ravni – **smičući** (tangencijalni) **napon** τ_n , tako da je:

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_n \mathbf{n}_\perp, \quad (6.7)$$

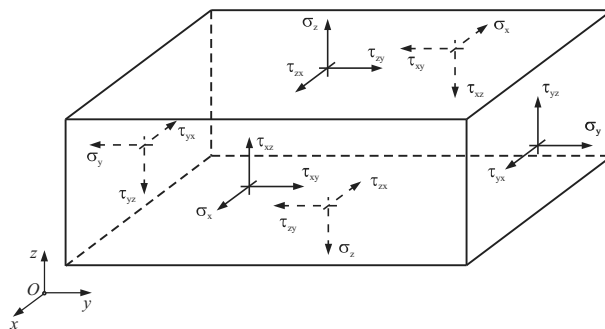


gde je $\mathbf{n}_\perp$ jedinični vektor koji je upravavan na $\mathbf{n}$ (leži u ravni preseka). Slika 6.3: Normalna i tangencijalna komponenta.

6.2.2 Komponentalni naponi

Svaki od vektora $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$, $\mathbf{t}_z$ (6.6) može da se razloži na komponente u pravcima x , y , z osa (sl. 6.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_x &= \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}, \\ \mathbf{t}_y &= \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}, \\ \mathbf{t}_z &= \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6.8)$$



Slika 6.4: Komponentalni naponi.

²Augustin Louis Cauchy (1798-1857), francuski matematičar.

Dakle, stanje napona u potpunosti je određeno poznavanjem veličina σ_x , $\tau_{xy}, \dots, \tau_{zy}, \sigma_z$. Od ovih veličina, koje nazivamo **komponentalni naponi**, može da se formira matrica:

$$D_\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Ova matrica naziva se **matrica tenzora napona**³.

Pri izvođenju izraza (6.6) iskoristili smo samo uslov ravnoteže po silama. Da bi elementarni paralelopiped (slika 6.4) bio u ravnoteži, potrebno je da i zbir svih momenata sila bude jednak nuli:

$$\sum_i \mathbf{M}^{\mathbf{F}_i} = \mathbf{0},$$

ili u skalarnom obliku:

$$\sum_i M_x^{\mathbf{F}_i} = 0; \quad \sum_i M_y^{\mathbf{F}_i} = 0; \quad \sum_i M_z^{\mathbf{F}_i} = 0.$$

U našem slučaju moment za osu x , prema slici 6.6, je:

$$\sum M_x = (\tau_{zy} dy dx) dz - (\tau_{yz} dz dx) dy = 0.$$

Oдавde dobijamo: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Na sličan način, uzimajući momente za ose z i y dobija se:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (6.10)$$

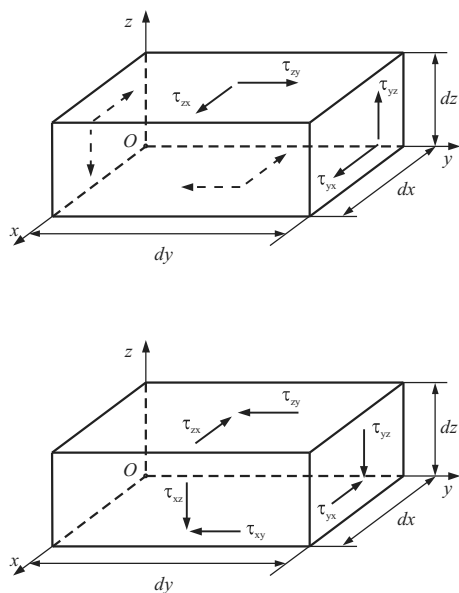
Dakle, dobija se da su naponi u međusobno upravnim ravnima jednaki.

Jednačina (6.10) izražava:

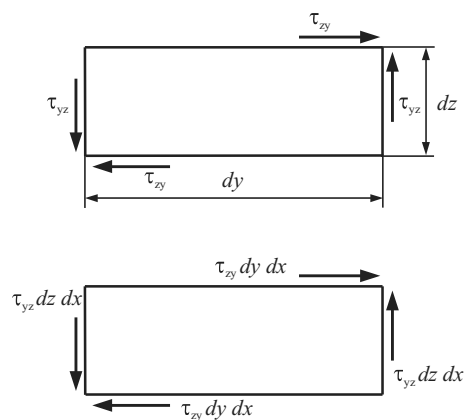
Stav 2 (o konjugovanosti smičućih napona) *U dvema međusobno upravnim ravnima komponente tangencijalnih napona, koje su upravne na presečnu pravu tih ravni, jednake su po intenzitetu, a obe imaju smer ili ka presečnoj pravoj ili od nje.*

Ovo je posledica zanemarivanja naponskih spregova.

³Ovde se spominje pojam "tenzor". Šta se pod tim pojmom podrazumeva videti u Dodatku, str. 262.



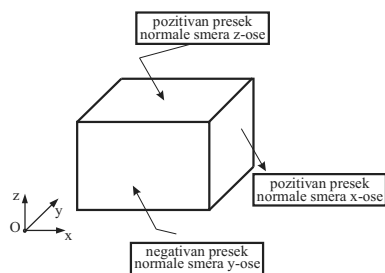
Slika 6.5: Tangencijalni naponi: negativni (gore) i pozitivni (dole).



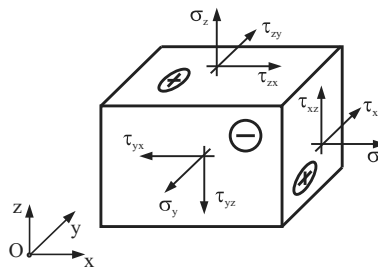
Slika 6.6: Tangencijalni naponi (gore) i sile (dole).

6.2.3 Konvencija o znaku

Uvođenjem koordinatnog sistema olakšava se rad s komponentama napona, kao i njihovo označavanje. Zbog toga treba označiti pojedine preseke i komponente napona koje deluju na njima u skladu s datim koordinatnim sistemom. Preseci su označeni na slici 6.7.



Slika 6.7: Definicija predznaka preseka.



Slika 6.8: Komponente tenzora napona u pravouglim koordinatama.

Presek ima oznaku one koordinatne ose na koju je upravan. Ako je spoljašnja normala na presek usmerena u pozitivnom smeru koordinatne ose, presek je pozitivan, a ako je spoljašnja normala usmerena suprotno od smera koordinatne ose, presek je negativan. Komponente napona označavaju se

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

simbolom σ , za normalne napone, i jednim indeksom, koji označava pravac ovog vektora. Tangencijalni naponi obično se (u tehničkoj literaturi) označavaju slovom τ i sa dva indeksa (slika 6.8). Prvi indeks označava presek (pravac normale odgovarajućeg preseka) na kojem deluje komponenta, a drugi indeks se odnosi na osu sa kojom je komponenta paralelna. Tako, na primer, τ_{xy} je komponenta napona koja deluje u preseku sa normalom $\mathbf{i}$ (x -osa), a paralelna je sa osom y . Normalni napon σ_x deluje u ravni sa normalom $\mathbf{i}$ (x -osa), a u pravcu iste ose x ⁴.

Znak komponente napona određen je sledećim pravilima:

- a) komponenta napona je pozitivna ako na pozitivnom preseku deluje u pozitivnom smeru ili ako na negativnom preseku deluje u negativnom smeru,
- b) komponenta napona je negativna ako na negativnom preseku deluje u pozitivnom smeru ili ako na pozitivnom preseku deluje u negativnom smeru.

Sve komponente napona, prikazane na slici 6.8, su pozitivne.

6.3 Stanje napona – specijalni slučajevi

U opštem slučaju, kao što je ranije rečeno, stanje napona, u nekoj tački napregnutog tela, je **prostorno**. Naime, prema Košijeovoj jednačini (6.6), vektori napona u nekoj tački tela, u potpunosti su određeni poznavanjem tri vektora napona za tri nekomplanarne presečne ravni, recimo $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$ i $\mathbf{t}_z$. Međutim, mogući su i specijalni slučajevi kada su ova tri vektora komplanarna ili kolinearna. Tada govorimo o ravanskom ili linearnom stanju napona, respektivno.

6.3.1 Ravansko stanje napona u tački napregnutog tela

Ako svi vektori napona, za proizvoljnu tačku tela, a za sve presečne ravni kroz tu tačku, leže u jednoj ravni, tada kažemo da je **stanje napona u telu ravansko**. U tom slučaju, vektori $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$ i $\mathbf{t}_z$ (jednačine (6.8)) moraju da leže u jednoj ravni, tj. da budu komplanarni. Iz (6.6) sledi da će i svi vektori $\mathbf{t}_n$ ležati u toj ravni. Iz matematike je poznato da su tri vektora, u ovom

⁴U nekim knjigama koriste se i oznake: σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{xz} , ...

slučju $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y, \mathbf{t}_z$, komplanarna akko⁵ je njihov mešoviti proizvod jednak nuli:

$$\mathbf{t}_x \cdot (\mathbf{t}_y \times \mathbf{t}_z) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \det(D_\sigma) = 0,$$

pri čemu je bar jedan minor drugog reda ove determinante različit od nule.

Pretpostavimo da svi vektori napona leže u ravni yz , tj. u njoj leže vektori napona za sve presečne ravni koje prolaze kroz tačku M napregnutog tela pa, prema tome, i svi komponentalni naponi. Kako je, prema pretpostavci $\mathbf{t}_x = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} = \mathbf{0}$ (nenapregnuta ravan yz), to je:

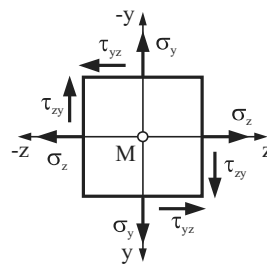
$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0, \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Poslednje dve jednačine su posledica Stava o konjugovanosti smičućih napona (6.10). Matrica komponentalnih napona, u proizvoljnoj tački tela, je sada simetrična matrica drugog reda ($\tau_{yz} = \tau_{zy}$):

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Prikažimo ove napone na pravougaoniku isečenom oko tačke M (slika 6.9).

Pretpostavili smo da su svi komponentalni naponi pozitivni, prema konvenci o znaku komponentalnih napona. Komponentalni naponi, prikazani na isečenom elementu, su istovremeno i naponi u tački M za opisane presečne ravni, jer je u okolini tačke M homogeno stanje napona.



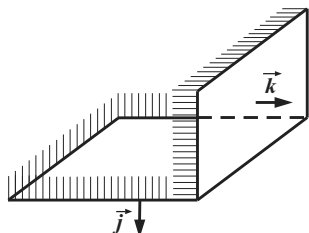
Slika 6.9: Komponentalni naponi u slučaju ravnog stanja napona.

6.3.2 Transformacija komponentalnih napona

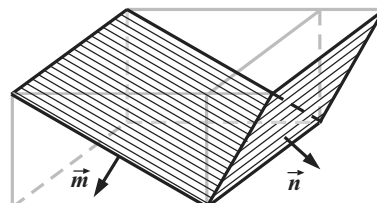
Videli smo da vektor napona, samim tim i komponente napona, zavisi od položaja presečne ravni. Ako se za presek veže koordinatni sistem,

⁵U matematici je uobičajeno da se "... ako i samo ako.." kratko označava sa akko. Dakle, ovo nije greška u kucanju!

komponente napona, očigledno, zavise od položaja koordinatnog sistema. Posmatrajmo ravansko stanje napona, prikazano na slici 6.9.



Slika 6.10: Početni par ortogonalnih ravni sa spoljašnjim normalama $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$.



Slika 6.11: Zarotiran par ortogonalnih ravni sa spoljašnjim normalama $\mathbf{n}$ i $\mathbf{m}$.

Prilikom rotacije koordinatnog sistema yz u nenapregnutoj ravni (ravan sa normalom u pravcu x ose, vidi sliku 6.10) oko tačke M koordinatnim osama, dobijamo druge presečne ravni, koje su takođe upravne na nenapregnutu ravan (slika 6.11). U njima se javljaju druge vrednosti komponentalnih napona. Zadatak je da se uspostavi veza između komponenti ova dva skupa ortogonalnih ravni (početni sa normalama $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ prelazi u ravni sa normalama $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$).

Da bismo našli vezu između komponentalnih napona za dva zarotirana koordinatna sistema (na slici 6.12 prikazan presek ovih ravni za nenapregnutom ravni), iskoristićemo Košijeovu jednačinu (6.6)).

Kako je stanje napona određeno matricom (6.12), to se vektori napona za nove presečne ravni sa normalama $\mathbf{n}$ i $\mathbf{m}$ mogu izraziti (prema Košijeovoj jednačini (6.6)) u obliku:

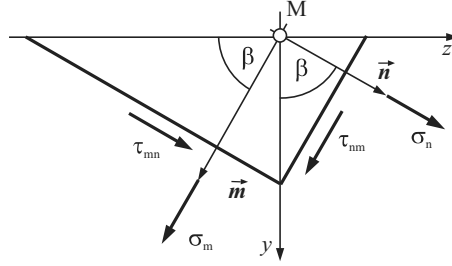
$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= \mathbf{t}_y \cos \beta + \mathbf{t}_z \sin \beta, \\ \mathbf{t}_m &= \mathbf{t}_y \sin \beta - \mathbf{t}_z \cos \beta, \end{aligned} \quad (6.13)$$

pri čemu su poznati naponi (dati matricom (6.12)):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_y &= \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}, \\ \mathbf{t}_z &= \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Kako nas interesuju veze između komponentalnih napona, to iz definicije normalnih i tangencijalnih napona (6.7) sledi:

$$\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n}, \quad \sigma_m = \mathbf{t}_m \cdot \mathbf{m}, \quad \tau_{nm} = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{m}.$$



Slika 6.12: Presek paralelepipeda sa nenapregnutom ravni.

Kako je

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (0, \cos \beta, \sin \beta) = \cos \beta \mathbf{j} + \sin \beta \mathbf{k}, \\ \mathbf{m} &= (0, \sin \beta, -\cos \beta) = \sin \beta \mathbf{j} - \cos \beta \mathbf{k}\end{aligned}$$

to iz (6.13) i (6.14) za komponentalne napone dobijamo:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{t}_y \cos \beta + \mathbf{t}_z \sin \beta) \cdot (\cos \beta \mathbf{j} + \sin \beta \mathbf{k}) = \\ &= \sigma_y \cos^2 \beta + 2\tau_{yz} \sin \beta \cos \beta + \sigma_z \sin^2 \beta,\end{aligned}\quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}\tau_{nm} &= \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{m} = (\mathbf{t}_y \cos \beta + \mathbf{t}_z \sin \beta) \cdot (\sin \beta \mathbf{j} - \cos \beta \mathbf{k}) = \\ &= \sigma_y \sin \beta \cos \beta + \tau_{yz} \sin^2 \beta - \tau_{yz} \cos^2 \beta - \sigma_z \sin \beta \cos \beta,\end{aligned}\quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \mathbf{t}_m \cdot \mathbf{m} = (\mathbf{t}_y \sin \beta - \mathbf{t}_z \cos \beta) \cdot (\sin \beta \mathbf{j} - \cos \beta \mathbf{k}) = \\ &= \sigma_y \sin^2 \beta - 2\tau_{yz} \sin \beta \cos \beta + \sigma_z \cos^2 \beta.\end{aligned}\quad (6.17)$$

☞ Napomenimo da smo ove relacije mogli da izvedemo i posmatrajući ravnotežu trostrane prizme isečene oko tačke M (videti [11] str. 36, [1] str. 26, [14], str. 43).

6.3.3 Glavni pravci i glavni naponi

Prethodno smo videli kako se menja napon (odnosno njegove komponente) sa promenom (rotacijom) koordinatnog sistema, pa se nameće sledeće pitanje: *u kojim presečnim ravnima se javljaju ekstremne vrednosti normalnih napona i kolike su te vrednosti?*

Kako je normalni napon (6.15) funkcija ugla β , to se ekstremne vrednosti normalnih napona dobijaju iz jednačine

$$\frac{d\sigma_n}{d\beta} = -2(\cos \beta \sin \beta)\sigma_y + 2\tau_{yz}(\cos \beta \cos \beta - \sin \beta \sin \beta) + 2\sigma_z \sin \beta \cos \beta = 0,\quad (6.18)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

čije je rešenje

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\beta_0 = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z}}. \quad (6.19)$$

Kako je $\operatorname{tg} \beta$ periodična funkcija sa periodom $k\pi$ (k je ceo broj, tj. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), to iz poslednje jednačine sledi da je⁶ $2\beta_0 = \arctg() + k\pi$, pa imamo dva različita rešenja (za $k = 0$ i $k = 1$) $\beta_{1,2} = \arctg() + \frac{1}{2}k\pi$.

☞ Napomenimo da za sve ostale vrednosti k dobijaju se samo ova dva ortogonalna pravca.

Definicija:

Od svih presečnih ravni kroz tačku M ekstremne vrednosti normalnih napona javljaju se u dve, međusobno upravne presečne ravni, čije pravce simbolički označavamo sa (1) i (2), i nazivamo ih **glavni pravci** ili **pravci glavnih napona**.

Ugao β_1 (za $k = 0$) između pozitivne ose y i glavnog pravca (1), meri se od ose y ka z , određen je izrazima (6.19). Glavni pravac (2) zaklapa sa osom y ugao $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$.

Odredili smo pravce presečnih ravni u kojima se javljaju ekstremne vrednosti normalnih napona. Drugi deo zadatka je da se odrede ekstremne vrednosti normalnih napona. To rešenje dobija se iz (6.15) kada zamenimo (6.19). Da bismo to izračunali, koristeći (6.15), potrebno je izraziti $\sin 2\beta_0$ i $\cos 2\beta_0$ preko $\operatorname{tg} 2\beta_0$. Iskoristivši trigonometrijske identičnosti:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi); & \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \\ \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}}, \\ \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} \end{aligned}$$

i (6.19) za $\sin 2\beta$ i $\cos 2\beta$ dobijamo:

$$\sin 2\beta_0 = \pm \frac{2\tau_{zy}}{\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zy}^2}}, \quad (6.20)$$

$$\cos 2\beta_0 = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zy}^2}}. \quad (6.21)$$

⁶Ovde smo rešenje za ugao označili sa β_0 , jer samo za tu vrednost, a ne za svako β , važi ova relacija.

Konačno, za ekstremne vrednosti normalnih napona (6.15), dobijamo:

$$\sigma_n \Big|_{\beta=\beta_0} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2} = \sigma_{1,2}. \quad (6.22)$$

Definicija:

Ekstremne vrednosti normalnih napona, koje simbolički označavamo sa σ_1 i σ_2 , nazivaju se **glavni naponi**. Po dogovoru, usvaja se da je $\sigma_1 > \sigma_2$.

Njihove vrednosti su:

$$\sigma_{1/2} = \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (6.23)$$

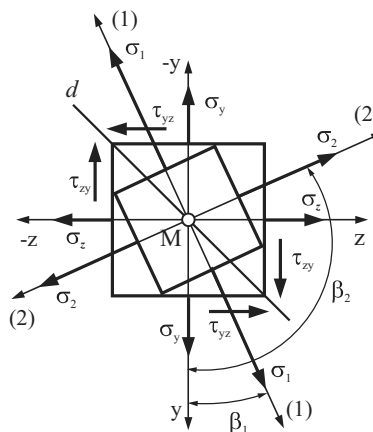
Važno je uočiti da u presečnim ravnima, u kojima se javljaju glavni naponi σ_1 i σ_2 , smičući naponi jednaki su nuli (zameniti u (6.16) vrednosti za β_0 iz (6.19)):

$$\tau_{12} = \tau_{21} = 0. \quad (6.24)$$

6.3.4 Jedan praktičan način za određivanje glavnih pravaca

Već smo rekli da iz (6.19) dobijamo dve vrednosti za ugao $2\beta_0$. Da bismo jednoznačno odredili ugao β_1 , potrebno je da znamo znak $\sin 2\beta_1$ (6.20). Iz ove relacije vidi se da je, u stvari, potrebno da znamo znak smičućeg napona τ_{zy} . Ako je on pozitivan, ugao $2\beta_1$ pripada intervalu $(0, \pi)$, a ako je negativan on je u intervalu $(\pi, 2\pi)$.

Pretpostavimo da su komponentalni naponi pozitivni i da je $\sigma_y > \sigma_z$. Za taj slučaj, na isečenim elementima u nenapregnutoj ravni yz (sl.6.13) prikazano je stanje napona u tački M napregnutog tela. U ravnima upravnim na nenapregnutu ravan, čije su spoljne normale glavni pravci (1), (2), -(1) i -(2), vide se glavni naponi σ_1 i σ_2 . Na slici 6.13 označeni su i uglovi β_1 , odnosno β_2 , između glavnih pravca (1) i (2), i y ose.



Slika 6.13: Dijagonala smicanja.

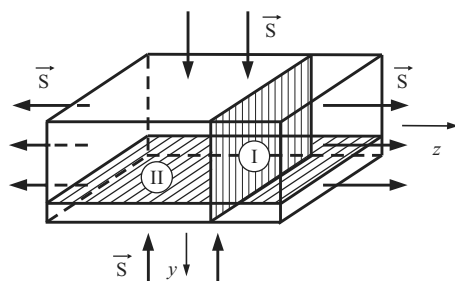
Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Dijagonala elementa, koja prolazi kroz temena u kojima se susreću smičući naponi $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, zove se **dijagonala smicanja**. Na slici 6.13 ona je označena sa $d - d$. Može da se pokaže da važi sledeće pravilo: *pravac većeg glavnog napona σ_1 (glavni pravac (1)), leži između dijagonale smicanja i algebarski većeg normalnog komponentnog napona*. Prema pretpostavci je $\sigma_y > \sigma_z$, pa glavni pravac (1) na slici 6.13 leži između y ose i dijagonale smicanja.

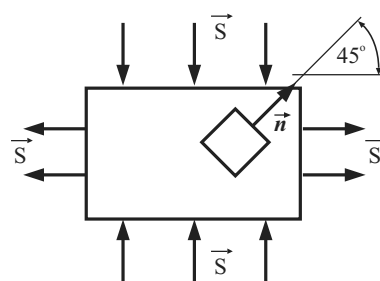
6.3.5 Čisto smicanje

Specijalan slučaj ravnog stanja napona, kada je element zapremine izložen samo smičućim naponima, zovemo **čisto smicanje**. Ovakvo stanje napona se javlja kod tanke pravougaone ploče, stalne debljine, koja je u jednom pravcu zategnuta, a u drugom pritisnuta silama istog intenziteta. Ove sile su ravnomerno raspoređene po osnovi ploče i u ravnoteži su. Čisto smicanje se, kod ovako napregnute ploče, javlja u ravnima koje grade ugao od 45° u odnosu na stranice ploče (slika 6.15). Ovo ćemo kasnije i da dokažemo.

Ovaj specijalan slučaj ćemo da posmatramo, jer je najlakše proučiti deformacije koje nastaju pod dejstvom tangencijalnih napona, u slučaju čistog smicanja.



Slika 6.14: Ravni I i II.



Slika 6.15: Čisto smicanje.

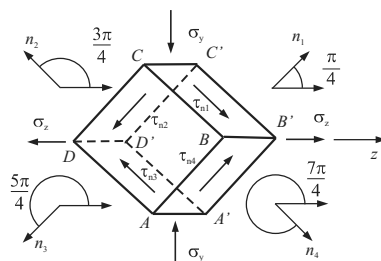
Zapazimo (slika 6.14) da su ravni I i II glavne ravni, pa su naponi koji se u njima javljaju:

$$\sigma_z = \sigma - \text{zatezanje}, \quad (6.25)$$

$$\sigma_y = -\sigma - \text{pritisak}. \quad (6.26)$$

Ovi naponi su jednaki, jer su i bočne sile, po pretpostavci, jednake.

Da bismo odredili stanje u ravnima pod uglom od 45° , "iscimo", jedan takav element (sl. 6.15, 6.16):



Slika 6.16

Kako su uglovi $\varphi_i = \frac{2i-1}{4}\pi$, za $i = 1, 2, 3, 4$, a $\tau_{zy} = 0$, jer su ravni I i II glavne, to relacije (6.15) i (6.16) postaju:

$$\sigma_{ni} = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma) = 0, \quad (6.27)$$

$$\tau_{ni} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \frac{1}{2}[\sigma - (-\sigma)] = \sigma, \quad \Rightarrow \tau_{ni} \equiv \tau = \sigma \quad (6.28)$$

Ovim smo dokazali prethodno tvrđenje. □

Pri izvođenju pošli smo od toga da posmatrane ravni grade uglove od $\pi/4$ i da su glavni naponi:

$$\sigma_z = -\sigma_y = \sigma. \quad (6.29)$$

Međutim, kada bismo pošli od relacija (6.15) i (6.16), uz uslov (6.29), dobili bismo:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sigma \cos 2\varphi, \\ \tau_n &= \tau \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (6.30)$$

i ako sada zahtevamo da su u ovim ravnima normalni naponi jednaki nuli ($\sigma_n = 0$), dobijamo:

$$\cos 2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Ovim smo pokazali da je prizma, sa osnovom $ABCD$, sl. 6.16, opterećena na čisto smicanje. Ovu činjenicu ćemo kasnije da iskoristimo pri nalaženju veze između tangencijalnih napona i klizanja.

6.3.6 Morov krug napona

Prethodno smo videli kako možemo da odredimo napon u nekoj tački, pri zadanom položaju presečne ravni (poznato: $\varphi, \sigma_y, \sigma_z, \tau$ ($\tau_{yz} \equiv \tau$); traži se: σ_n, τ_n). Međutim, možemo da postavimo i obrnuti zadatak. Kako naći položaj ravni ($\varphi=?$) za koju znamo napone (σ_n, τ_n)?

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Da bismo rešili ovaj zadatak, možemo ponovo da iskoristimo jednačine (6.15) i (6.16). Međutim, za zadato σ_n iz (6.15) mogli bismo da nađemo φ , ali kako je i τ_n poznato, to φ ne bi moralo da zadovolji i drugu jednačinu (6.16). Odavde sledi da postoji neka veza između σ_n i τ_n . Nađimo je! Prvo napišimo (6.15) i (6.16) u obliku:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi, \quad (6.31)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \sin 2\varphi - \tau \cos 2\varphi. \quad (6.32)$$

Dalje, koristeći osnovnu trigonometrijsku identičnost:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,$$

dobijamo:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau^2. \quad (6.33)$$

Dakle, samo one vrednosti σ_n , τ_n koje zadovoljavaju ovaj uslov mogu da predstavljaju normalni i tangencijalni napon u nekoj presečnoj ravni kroz tačku tela, u kojoj su poznati komponentalni naponi σ_y , σ_z , τ .

Geometrijski ova relacija (6.33) predstavlja krug (u koordinatnom sistemu σ , τ) poluprečnika:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau^2},$$

sa centrom u tački $O_1 \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$. Ovaj krug zovemo **Morov krug napona**⁷.

Konstrukcija Morovog kruga

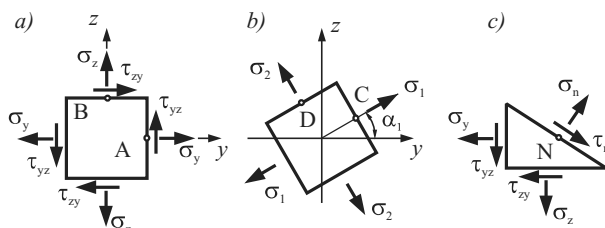
Činjenica da sve vrednosti napona (u jednoj tački) leže na kružnici (ravno stanje napona)/krugu (prostorno stanje) iskorišćena je da bismo grafički odredili vrednost napona za neku presečnu ravan, ako su poznati naponi za dve ravni (ravno stanje napona), odnosno za tri ravni (prostorno stanje).

⁷U ovom slučaju, ravansko stanje napona, radi se o kružnici. U opštem slučaju, stanje napona u tački određeno je delovima kruga, pa i u ovom slučaju govorimo o krugu iako sve vrednosti napona leže na kružnici.

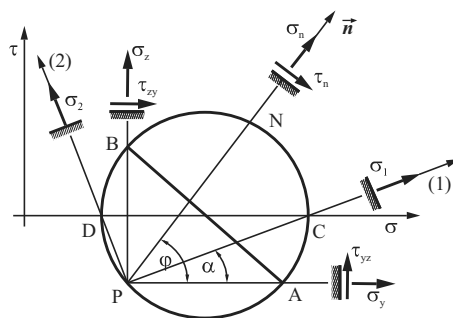
Pretpostavimo da su poznati naponi u ravnima sa normalama u pravcu y i z – ose (sl. 6.17-a):

$$\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz} \quad (\sigma_y > \sigma_z > 0, \tau_{yz} < 0).$$

Zadatak je da nađemo vrednost glavnih napona (σ_1, σ_2) i položaj glavnih ravni (α), kao i vrednost napona za presečnu ravan čija normala $\mathbf{n}$ gradi ugao φ sa y -osom.



Slika 6.17: Napregnut element.



Slika 6.18: Morov krug napona.

Konstrukcija:

- Skicira se element u okolini posmatrane tačke i na njemu se, u tačkama A i B , nacrtaju zatate komponente σ_y, σ_z i τ_{yz} i τ_{zy} (slika 6.17).
- U koordinatnom sistemu $O\sigma\tau$ ucrtaju se tačke $A(\sigma_y, -\tau)$ i $B(\sigma_z, \tau)$. Pri tome, znak tangencijalnog napona određujemo prema konvenciji o znaku prema kojoj je smičući napon pozitivan ako teži da okrene element, na koji deluje, u smeru kazaljke na satu. Prema ovoj konvenciji, koja važi za konstrukciju Morovog kruga, tangencijalni napon τ u tački A je negativan, a u B pozitivan.
- Konstruiše se kružnica koja prolazi kroz tačke A i B . Njen centar S nalazi su u preseku σ – ose i pravca AB .

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

- Duži $\overline{OD}$ i $\overline{OC}$, preseka Morovog kruga sa σ – osom, određuju veličine glavnih napona σ_1 i σ_2 , respektivno⁸. Orijentisani element prikazan je na sl. 6.17-b.
- Pravce glavnih napona (1) i (2) određuju prave koje prolaze kroz tačke P i C , odnosno P i D . Tačku P nazivamo **pol normala**, koja ima sledeće osobine (vidi [7], str. 69): bilo koja prava koja prolazi kroz pol P paralelna je sa normalom presečne ravni kojoj odgovara tačka na Morovoj kružnici koja se nalazi u preseku posmatrane prave i kružnice. Na primer, prava određena tačkama P i Q je paralelna sa normalom $\mathbf{n}$ kose presečne ravni (vidi sl. 6.17-c) kojoj odgovara tačka Q na Morovoj kružnici sa koordinatama (σ, τ) . Imajući u vidu ovu osobinu pola P , zaključujemo da se on nalazi u preseku prave paralelne sa osom y kroz tačku A i prave paralelne sa osom z kroz tačku B .
- Duži $\overline{SE}$ i $\overline{SF}$ određuju ekstremne vrednosti tangencijalnih napona, a pravci, koji prolaze kroz tačke P i E , odnosno P i F , predstavljaju normale ravni u kojim se ti naponi javljaju.

6.4 Linearno stanje napona u tački napregnutog tela

U specijalnom slučaju kada vektori napona, za sve presečne ravni, u tački napregnutog tela leže na jednom pravcu u tački je **linearno stanje napona**.

Iz Košijeve jednačine (6.6), sledi da vektori napona $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$ i $\mathbf{t}_z$, za tri ortogonalne presečne ravni moraju da budu kolinearni, tj.:

$$\mathbf{t}_x = \lambda \mathbf{t}_z, \quad \mathbf{t}_y = \mu \mathbf{t}_z, \quad (6.34)$$

gde su λ i μ proizvoljne skalarne konstante. Dakle, vektor napona $\mathbf{t}_n$ za proizvoljnu presečnu ravan, kroz posmatranu tačku, prema (6.6), je:

$$\mathbf{t}_n = (\lambda \cos \alpha + \mu \cos \beta + \cos \gamma) \mathbf{t}_z.$$

Determinanta matrice komponentalnih napona D_σ (6.9) tada je jednaka nuli, jer su, zbog (6.34), sve tri vrste ove determinante proporcionalne:

$$\det(D_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0,$$

⁸Veća duž određuje σ_1 , jer je on po dogovoru veći!

a uz to su i svi njeni minori drugog reda jednaki nuli. Dakle, ako je pravac na kome leže svi vektori napona pravac z ose, komponentalni naponi pravaca osa x i y su tada jednaki nuli. Kada još uzmemo u obzir Stav o konjugovanosti tangencijalnih napona, imamo:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0,$$

pa je matrica komponentalnih napona (6.9) oblika:

$$(D_\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

U ovom slučaju postoji neograničen broj nenapregnutih ravni, a to je skup ravni koje prolaze kroz z osu.

U ovom slučaju postoji samo jedan glavni napon različit od nule i jedan glavni pravac za koji je $\beta_1 = 0$:

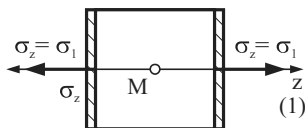
$$\sigma_1 = \sigma_z, \quad (1) \equiv z. \quad (6.36)$$

Stanje napona u tački M napregnutog tela pokazano je na isečenom elementu u jednoj od nenapregnutih ravni. Pretpostavljeno je da je napon σ_z pozitivan. Osa z je istovremeno glavni pravac (1), a σ_z je glavni napon σ_1 .

Kako postoji samo jedan glavni napon različit od nule, $\sigma_1 \neq 0$, to je maksimalna vrednost smičućeg napon u tački napregnutog tela:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_z|. \quad (6.37)$$

Ona se javlja u presečnim ravnima kroz tačku M čije spoljne normale zaklapaju uglove $\frac{\pi}{4}$ sa osom $(1) \equiv z$.



Slika 6.19: Linearno stanje napona.

6.5 Zadaci

Zad. 6.1. Stanje napona u datoj tački tela zadato je, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem x, y, z , matricom

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 36 & 27 & 0 \\ 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

pri čemu je vrednost napona u [MPa]. Naći:

- vektor napona u odnosu na ravan sa normalom $\mathbf{n} = \{2/3, -2/3, n_z > 0\}$,
- intenzitet tog vektora,
- normalni i smičući napon u toj ravni,
- ugao između vektora napona i normale na ravan.

Rešenje:

a) Prvo odredimo treću koordinatu jediničnog vektora normale. Njegov intenzitet je jednak jedinici, pa je

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + (n_z)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_z = \frac{1}{3}.$$

Iz Košijeve jednačine

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_x \cos \alpha + \mathbf{t}_y \cos \beta + \mathbf{t}_z \cos \gamma$$

sada sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= (36\mathbf{i} + 27\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot \frac{2}{3} + (27\mathbf{i} - 36\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 18\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3} \\ \mathbf{t}_n &= 6\mathbf{i} + 42\mathbf{j} + 6\mathbf{k}. \end{aligned}$$

b) Intenzitet vektora napona, za ovu presečnu ravan je

$$|\mathbf{t}_n| = \sqrt{6^2 + 42^2 + 6^2} = 42,85 \text{ [MPa]}.$$

c) Normalni napon, po definiciji je

$$\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = (6\mathbf{i} + 42\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) = -22 \text{ [MPa]}.$$

Znak "-" znači da je napon pritiska.

Intenzitet tangencijalnog (smičućeg) napona, u datoj ravni, je

$$\sigma_n = \tau_n = \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{42,85^2 - 22^2} = 36,77 [MPa].$$

d) Ugao između vektora napona i normale ravni je

$$\cos \angle(\mathbf{t}_n, \mathbf{n}) = \cos \alpha = \frac{\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{t}_n| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-22}{42,85 \cdot 1} = -0,5134 \Rightarrow \alpha = 120,89^\circ.$$



Zad. 6.2.

U datoj tački tela stanje napona dato je matricom

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

pri čemu je vrednost napon u [MPa].

Odrediti:

- nepoznatu komponentu σ_x iz uslova da postoji ravan kroz datu tačku tela za koju je vektor napona jednak nuli (nenapregnuta ravan) i
- normalu $\mathbf{n}$ te ravni.

Rešenje:

a) Prema uslovu zadatka, postoji ravan u kojoj je vektor napona jednak nuli, tj.

$$\mathbf{t}_n = (\sigma_x \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}) \cdot n_x + (2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot n_y + (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot n_z = \mathbf{0}.$$

Iz ove vektorske jednačine sledi sistem od tri skalarne:

$$\begin{aligned} \sigma_x \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 1 \cdot n_z &= 0, \\ 2 \cdot n_x + 0 \cdot n_y + 2 \cdot n_z &= 0, \\ 1 \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 0 \cdot n_z &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Ovo je homogen sistem jednačina po n_x , n_y i n_z . On ima rešenje ako je njegova determinanta jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_x(0 \cdot 0 - 2 \cdot 2) - 2(2 \cdot 0 - 2 \cdot 1) + 1(2 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = 0,$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

odakle sledi

$$-4\sigma_x + 4 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = 2 [MPa].$$

b) Sa ovako određenom komponentom napona, iz sistema (a) možemo da odredimo koordinate vektora normale

$$\begin{aligned} 2 \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 1 \cdot n_z &= 0, \\ 2 \cdot n_x + 0 \cdot n_y + 2 \cdot n_z &= 0, \\ 1 \cdot n_x + 2 \cdot n_y + 0 \cdot n_z &= 0. \end{aligned} \quad (a')$$

Kako je homogen sistem jednačina, izrazimo sve veličine preko $n_x = a$, pa dobijamo:

$$n_y = -\frac{1}{2}a, \quad n_z = -a.$$

Međutim, pošto je $\mathbf{n}$ jedinični vektor, to je

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 = a^2 + (-a/2)^2 + (-a)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm \frac{2}{3}.$$

Dobijamo dva rešenja:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}, \\ \mathbf{n}_2 &= -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ova dva vektora definišu istu ravan, samo što je jedan vektor vektor spoljašnje, a drugi unutrašnje normale, jer je $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$.



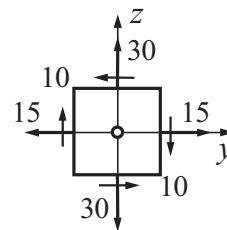
Zad. 6.3.

U nekoj tački tela poznato je ravansko stanje napona (sl. 6.21). Vrednosti napona date su u $[MPa]$.

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{pmatrix}$$

Odrediti:

- a) normalni i smičući napon u ravni čija normala sa osom y zaklapa ugao $\varphi = 60^\circ$,
- b) veličine i pravce glavnih napona,
- c) maksimalnu vrednost smičućih napona za presečnu ravan čija normala leži u ravni yz ,



Slika 6.20: uz zad.6.3.

i

- d) nacrtati Morov krug napona.

Rešenje:

- a) Iz relacije (6.31) i (6.32), za $\varphi = 60^\circ$, dobijamo

$$\sigma = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi = 17,6 [MPa],$$

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \sin 2\varphi - \tau \cos 2\varphi = -11,5 [MPa].$$

Ovi naponi prikazani su na sl. 6.21.

- b) Vrednosti glavnih napona dobijamo iz

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = 22,5 \pm 12,5 \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = 35 [MPa], \quad \sigma_2 = 10 [MPa].$$

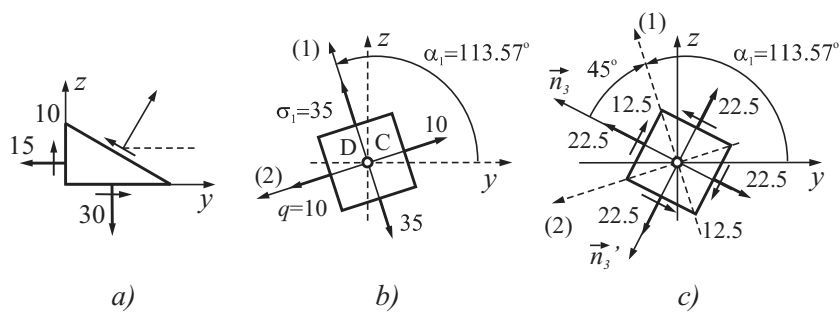
Glavni pravac, prema (6.19), određen je relacijom

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{2(-10)}{15 - 30} = 1,3 \Rightarrow \beta = 26,57^\circ.$$

Kako je $\tau < 0$ i $\sigma_y - \sigma_z < 0$, glavni pravci određeni su uglovima

$$\beta_1 = \beta + 90^\circ = 116,57^\circ, \quad \beta_2 = \beta_1 + 90^\circ = 206,57^\circ.$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

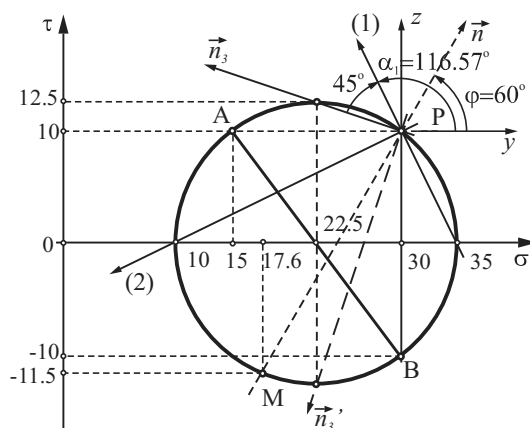


Slika 6.21: uz zad.6.3.

- c) Maksimalni smičući naponi javljaju se u ravnima čije normale grade uglove od 45° sa glavnim pravcima. Vrednost smičućeg napona u tim ravnima je

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} = \frac{35 - 10}{2} = 12,5 [MPa].$$

- d) Morov krug napona dat je na sl. 6.22



Slika 6.22: Morov krug napona – zadatak 6.3.



GLAVA 7

MEHANIČKA SVOJSTVA MATERIJALA

Već je rečeno u Uvodu da različiti materijali različito reaguju na iste spoljašnje uticaje. Ponašanje materijala se ispituje u laboratorijama i na osnovu toga se (ponašanje) opisuje nekim analitičkim izrazom koji predstavlja **matematičke modele** ponašanja materijala.

Najprostiji eksperiment se odnosi na istezanje uzorka (epruvete), koji je napravljen od materijala koji ispituujemo. Pri ovakvom eksperimentu meri se dužina posle istezanja – ℓ i sila – S , a na dijagram, kojim se prikazuju rezultati eksperimenta, nanose se:

– **srednja dilatacija**

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0},$$

gde je ℓ_0 –početna, ℓ – dužina uzorka posle istezanja, a $\Delta \ell$ – promena početne dužine, i

– **napon:**

$$\sigma = \frac{S}{A_0},$$

gde je S –aksijalna sila koja je izdužila uzorak na dužinu ℓ , a A_0 –površina poprečnog preseka uzorka u početku eksperimenta (neopterećenog uzorka).

Kao što se vidi, napon se ne meri već se meri sila, a napon se izračunava kao kod aksijalnog naprezanja.

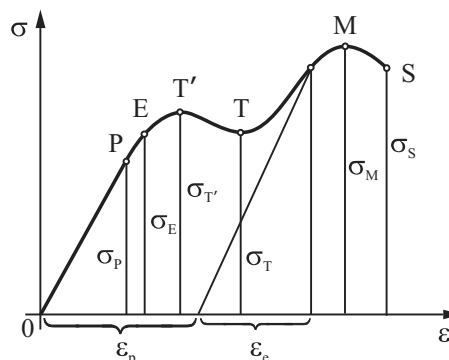
Ovako dobijen dijagram naziva se **radni** ili $\sigma - \varepsilon$ **dijagram materijala**.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

☞ Napomenimo da ovaj napon (koji se nanosi na σ -osu) nije srednji napon, jer se tokom eksperimenta površina poprečnog preseka menja, a mi uvek delimo sa početnom površinom A_0 .

Karakterističan radni dijagram, za čelik, prikazan je na sl.7.1.

Označene tačke na ovom dijagramu predstavljaju određena granična područja. Tako, na primer, tačka P predstavlja granicu do koje je napon proporcionalan dilataciji (granica proporcionalnosti), tj. deo krive OP je pravolinijski. Ovaj deo se karakteriše i time što pri rasterećenju (sila se smanjuje do nule) dobijamo istu duž $\overline{PO}$. Dakle, materijal se ponaša elastično.



Slika 7.1: Radni dijagram za čelik.

Međutim, ako nastavimo sa opterećenjem, pa sa rasterećenjem, ove "putanje" (po kojima se odvijaju ovi procesi) biće iste (i za opterećenje i za rasterećenje), dok ne dođemo do granice elastičnosti. Ta granična vrednost elastičnosti je na ovom dijagramu označena sa E .

☞ Napomenimo da na delu PE dijagram nije pravolinijski, pa na tom delu napon nije proporcionalan deformaciji.

Ako pređemo sa opterećenjem preko granice E , tada se rasterećenje ne odvija duž iste krive kao i opterećenje, već se vraća (ali ne u prvobitno stanje!) po pravoj koja je približno paralelna sa pravom OP . Dakle, ako je uzorak opterećen preko granice elastičnosti, tada se ukupna deformacija sastoji iz dva dela:

- ϵ_e – **elastična deformacija** (ovaj deo se vraća u prvobitno stanje po rasterećenju),
- ϵ_p – **plastična deformacija** (trajno-nepovratna deformacija):

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p. \quad (7.1)$$

Na datom dijagramu (sl. 7.1) uočavamo još neke karakteristične tačke: tačke T' i T – nazivaju se **gornja** i **donja granica tečenja** materijala. Do tačke T' sa povećanjem sile raste i deformacija. Međutim, kada dostignemo vrednost sile koja odgovara naponu σ' , tada dolazi do pojave deformacija iako ne

povećavamo silu (čak i sa manjom silom, jer na dijagramu napon se smanjuje do tačke T).

Često se granica tečenja u slučaju zatezanja naziva **granica razvlačenja**, a u slučaju pritiska **granica gnječenja**.

Od tačke T dilatacija (deformacija) ponovo raste sa povećanjem napona sve do tačke M (maksimum ovog dijagrama). Ova oblast se naziva **oblast ojačanja** materijala.

Napon u tački M naziva se **jačina materijala**.

Posle tačke M naglo dolazi do smanjenja napona i loma (kidanja) uzorka. Napon u tački S zove se **napon pri kidanju**.

U praksi su deformacije do granice tečenja veoma male, pa je teško odrediti granicu proporcionalnosti i elastičnosti. Iz tog razloga se za rešavanje problema daje jedan podatak (propisan standardima) koji zovemo **tehnička granica elastičnosti** (ovoj granici odgovara vrednost napona σ_E). Sve dok je stvarni napon $\sigma \leq \sigma_E$ smatramo da je materijal elastičan i da je proporcionalan deformaciji.

U praksi se primena otpornosti materijala svodi na rešavanje dva zadatka:

1. dato: sile koje deluju na deo konstrukcije,
odrediti: dimenzije tog elementa.
Ovaj zadatak nazivamo **dimenzionisanje**.
2. Dat je: deo konstrukcije,
odrediti: najveći intenzitet sile koju taj deo može da izrži, a da se ne slomi ili plastično deformiše.

Ovo je zadatak o **proveri nosivosti**.

U oba slučaja koristimo kriterijum koji se svodi na to da najveći naponi u telu ne smeju da prekorače dopuštene vrednosti napona.

Dopušteni napon (σ_{dop}) je vrednost napona koja se propisuje zakonom. Ova vrednost se određuje na osnovu ispitivanja (dijagram sl. 7.1).

Kao što smo rekli, pri proučavanju konstrukcija, ili njihovih delova, dobijeni naponi ne smeju da pređu granicu tečenja ili da dovedu do loma, pa dopušteni napon određujemo sa:

$$\sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_M}{n_M} \quad \text{ili} \quad \sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad (7.2)$$

Sa n_M , odnosno n_T , označili smo neimenovan broj koji nazivamo **koeficijent** (stepen) **sigurnosti**. Njegova vrednost se kreće između 1 i 10,

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

što zavisi od vrste materijala, tačnosti pri određivanju opterećenja, namene konstrukcije, itd.

7.1 Hukov zakon

Već smo videli da su na jednom delu dijagrama (OP , sl. 7.1), napon i deformacija proporcionalni, tj.:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (7.3)$$

gde je: σ —normalan napon, ε —dilatacija u pravcu ose štapa, a E —modul elastičnosti (Jungov¹ modul).

Pored toga, već smo rekli, eksperimentalno je primećeno da se delovanjem aksijalnih sila javljaju i poprečne deformacije (5.4):

$$\varepsilon_p = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (7.4)$$

Analitički izrazi:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{i} \quad \varepsilon_p = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad (7.5)$$

u literaturi poznati su kao **Hukov² zakon**. Međutim, u slučaju prostornog stanja napona, prema stavu sa str. 98, imali bismo tri glavna napona. Ovim naponima bi odgovarale sledeće deformacije, od napona:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \quad \varepsilon_1' &= \frac{\sigma_1}{E}, & \varepsilon_2' &= \varepsilon_3' = -\frac{\mu \sigma_1}{E}, \\ \sigma_2 : \quad \varepsilon_2'' &= \frac{\sigma_2}{E}, & \varepsilon_1'' &= \varepsilon_3'' = -\frac{\mu \sigma_2}{E}, \\ \sigma_3 : \quad \varepsilon_3''' &= \frac{\sigma_3}{E}, & \varepsilon_1''' &= \varepsilon_2''' = -\frac{\mu \sigma_3}{E}. \end{aligned}$$

Primenom principa superpozicije dobijamo ukupne dilatacije u pravcu glavnih napona:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

¹Young

²Robert Hooke (1635-1703), engleski naučnik, pre svega eksperimentator. U delu "De potentia restitutiva or of spring", objavljenom 1678. god. dao je rezultate eksperimenta sa elastičnim telima. To je bio prvi štampani red u kom se razmatraju elastična svojstva materijala.

Relacije (7.6) predstavljaju **generalisani Hukov zakon** za prostorno stanje napona, izražen u odnosu na glavne napone.

Odavde možemo da izrazimo i glavne napone preko dilatacija:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2G \left[\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right], \\ \sigma_2 &= 2G \left[\varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right], \\ \sigma_3 &= 2G \left[\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right],\end{aligned}\tag{7.7}$$

gde smo uveli sledeću oznaku:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Konstanta G naziva se **modul klizanja (smicanja)**.

Relacijama (7.6) uspostavili smo vezu između glavnih napona i glavnih dilatacija. Da bismo uspostavili vezu između napona i dilatacija za bilo koja tri ortogonalna pravca (x, y, z) , potrebno je uspostaviti veze između napona za glavne ose i ose x, y, z kao i za odgovarajuće deformacije. Kada se ovo uradi, dobijamo sledeće relacije:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Ove relacije u literaturi poznate su kao **generalisani Hukov zakon**.

Do relacija za $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ bismo mogli da dodemo na isti način kao i do relacija $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, ali ne bismo mogli da dobijemo i relacije za tangentne napone $\gamma_{ij} = \frac{1}{G} \tau_{ij}$ (oni su jednaki nuli za glavne ose!).

Prethodno smo izveli generalisani Hukov zakon. U tim relacijama zanemarili smo uticaj temperature na deformaciju. Međutim, imajući na umu (5.5), možemo uticaj temperature da uključimo primenom principa superpozicije (za slučaj malih deformacija!), pa dobijamo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta t, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha \Delta t, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta t, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}.\end{aligned}$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

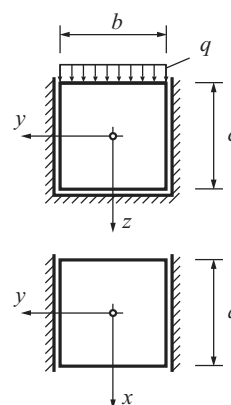
Ove jednačine poznate su u literaturi kao Nojman³ – Dijamelove⁴ jednačine.

Na kraju napomenimo da se veze između napona i deformacija zovu i **konstitutivne jednačine** ili jednačine ponašanja materijala.

7.2 Zadaci

Zad. 7.1.

Blok materijala, čije je širenje slobodno u pravcu x , a u pravcu y je sprečeno, opterećen je površinskim opterećenjem q u pravcu z ose (sl. 7.2). Izračunati smanjenje bloka, ako je: $q = 7500 [kN/m^2]$, $a = 40 [cm]$, $b = 30 [cm]$, $c = 20 [cm]$, $E = 25 [GPa]$, $\nu = 0,16$.



Slika 7.2: uz zad.7.1

Rešenje:

Komponenta napona $\sigma_x = 0$, jer je širenje bloka, u pravcu x , slobodno. U pravcu y sprečeno je pomeranje, pa je $\varepsilon_y = 0$, ali postoji napon $\sigma_y \neq 0$. Komponenta napona u pravcu z ose je $\sigma_z = -q$. Iz (7.8)

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = 0,$$

pa je

$$\sigma_y = \nu(\sigma_z + \sigma_x) = -\nu q.$$

Srednji normalni napon je

$$\sigma_{sr} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = -\frac{1 + \nu}{3} q.$$

³Neumann

⁴Duhamel

Kubna dilatacija (jednačine (5.6) i (5.7) na str. 88) je

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}3\sigma_{sr} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \left(-\frac{1+\nu}{3}q \right) = \frac{\Delta V}{V}.$$

Za promenu zapremine dobijamo

$$\Delta V = \varepsilon_v \cdot V = -(1+\nu)(1-2\nu)\frac{q}{E}V,$$

gde je V zapremina bloka $V = a \cdot b \cdot c = 24 \cdot 10^3 [cm^3]$.

Konačno, promena zapremine bloka je

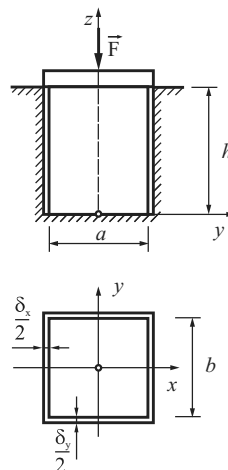
$$\Delta V = -(1+0,16)(1-2 \cdot 0,16)\frac{7,5 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^9}24 \cdot 10^3 = -5,68 [cm^3].$$

Dakle, zapremina bloka smanjila se za $5,68 [cm^3]$.



Zad. 7.2.

Elastični blok $a \cdot b \cdot h$ modula elastičnosti E i Poasonovog koeficijenta ν postavljen je u pravouglu šuplinu preseka $(a + \delta_x)(b + \delta_y)$. Modul elastičnosti materijala zidova mnogo je veći od modula elastičnosti bloka, pa se zidovi mogu smatrati idealno krutim. Blok je pritisnut silom F (sl. 7.3).



Slika 7.3: uz zad.7.2.

Odrediti:

- silu F_1 pri kojoj će blok s dve strane dodirnuti zidove i promenu visine h_1 koja pri tome nastaje,
- silu F_2 pri kojoj će blok i sa preostale dve strane dodirnuti zidove, kao i napone σ_x , σ_y i σ_z i promenu visine Δh_2 koja pri tome nastaje.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Trenje bloka o prsten zidove šupljine zanemariti. Poznate vrednosti: $E = 200 [MPa]$, $\nu = 0,4$, $a = 0,1 [m]$, $b = 2a$, $h = 3a$, $\delta_1 = 0,002 a$, $\delta_2 = 0,0032 a$.

Rešenje:

- a) U trenutku kad blok dodirne zidove još nema pritiska između zida šupljine i bloka, pa su naponi

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = -\frac{F_1}{2a^2}. \quad (7.9)$$

Ako zanemarimo trenje, u bloku će vladati jednoliko stanje napona i deformacije. Srednja deformacija po širini bloka jednaka je stvarnoj deformaciji, pa će u trenutku kad blok ispuni šupljinu biti

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_1}{a} = 0,002, \quad \varepsilon_y = \frac{\delta_2}{a} = 0,0016. \quad (7.10)$$

Kako je deformacija ε_y manja, prvo će se zatvoriti zazor δ_2 . Potrebnu silu, odnosno napon, određujemo iz Hukovog zakona

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_x). \quad (7.11)$$

Kako je $\sigma_x = \sigma_y = 0$, to sledi

$$\sigma_z = -\frac{E}{\nu} \varepsilon_y = -0,0016 \frac{E}{\nu}, \quad (7.12)$$

odnosno

$$F_1 = -\sigma_z \cdot 2 \cdot a^2 = 0,0032 \frac{E \cdot a^2}{\nu} = 0,008 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,1^2 [MN] = 16 [kN]. \quad (7.13)$$

Kako je $\varepsilon_z = \Delta h_1 / h_1$, to je promena visine h

$$\Delta h_1 = \varepsilon_z \cdot h. \quad (7.14)$$

Vrednost za ε_z određujemo iz odnosa $\nu = -\varepsilon_y / \varepsilon_z$, pa za promenu dobijamo

$$\Delta h_1 = -\frac{\varepsilon_y \cdot h}{\nu} = -\frac{0,0016 \cdot 0,1}{0,4} = 0,0008 [m].$$

- b) U ovom slučaju, deformacije su određene izrazom (7.10). Napon σ_x jednak je nuli, jer nema pritiska na blok u pravcu x , jer je blok upravo dodirnuo zid.

Iz Hukovog zakona dobijamo

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = 0,002, \quad (7.15)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_z = 0,0016, \quad (7.16)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y. \quad (7.17)$$

Iz (7.15) i (7.16) za σ_y i σ_z dobijamo

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\sigma_y - E\varepsilon_y}{\nu} = -0,2857 \cdot 10^{-3} \cdot E = -57,15 [kPa], \\ \sigma_y &= -E \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{1 + \nu} = -4,7143 \cdot 10^{-3} \cdot E = -942,86 [kPa]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Intenzitet sile, kojom treba pritisluti blok, je

$$F_2 = 2a^2 \sigma_z = 9,429 \cdot 10^{-3} \cdot E \cdot a^2 = 18,857 [kN].$$

Iz (7.18) i (7.17) dobijamo

$$\varepsilon_z = [-4,7143 - 0,4(-0,2857)] \cdot 10^{-3} = -4,6 \cdot 10^{-3},$$

pa je

$$\Delta h_2 = \varepsilon_z \cdot h = -4,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3 = -1,38 \cdot 10^{-3} [m] = -1,38 [mm].$$



GLAVA 8

NAPREZANJA I DEFORMACIJE NOSAČA

8.1 Uvod

Određivanje zakona rasporeda unutrašnjih sila na presečnim površima napregnutog tela je statički neodređen zadatak. Za posmatranu vrstu opterećenja grednog nosača uvodimo zbog toga ili pretpostavke o rasporedu unutrašnjih sila u poprečnim presecima ili pretpostavke o deformaciji nosača.

Ako se uvedu pretpostavke o rasporedu unutrašnjih sila, tada se, primenom Osnovnog postulata Otpornosti materijala (vidi str. 95), odnosno uslova ravnoteže Statike krutog tela, izvodi zakon promene unutrašnjih sila u poprečnim presecima nosača. Deformacije nosača dobijaju se iz Hukovog zakona, pod pretpostavkom da je telo idealno elastično.

Ako se uvedu pretpostavke o deformaciji nosača, tada se, primenom Hukovog zakona i Osnovnog postulata Otpornosti materijala, izvode izrazi za deformacije, a nakon toga zakon promene unutrašnjih sila u poprečnim presecima nosača.

U Uvodu (str. 84) uvedena je pretpostavka o malim deformacijama prema kojoj se proizvodi komponentnih pomeranja i proizvodi njihovih izvoda mogu zanemariti. Pored toga u posmatranim slučajevima naprezanja komponentna pomeranja tačaka nosača nisu tolika da bi uticala na veličine napona koji se u njemu javljaju. Iz tog razloga uslove ravnoteže postavljamo na nedeformisanom nosaču i sile u preseku određujemo takođe u odnosu na nedeformisanu osu nosača.

Koji će se komponentalni naponi javiti u poprečnom preseku nosača i

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

kakve su njegove deformacije, zavisi i od oblika štapa, kao i od spoljašnjeg opterećenja. Iz tog razloga se, radi izučavanja pojedinih vrsta naprezanja, uvode još pretpostavke o obliku nosača i spoljnim silama.

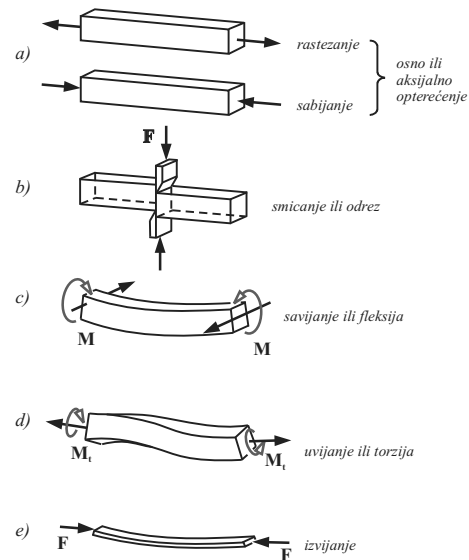
Nosač kod koga je jedna dimenzija znatno izraženija u odnosu na ostale dve, nazivamo **štap** ili **greda**. Pojam štap koristimo za nosače koji su opterećeni aksijalnim silama ili momentima uvijanja, a pojam greda za nosače koji su opterećeni i poprečnim (transverzalnim) silama.

U ovom kursu proučavaćemo uglavnom ovakve nosače.

Napregnuto stanje nekog grednog nosača izazivaju sile (aksijalna - N , transversalna - T) i momenti (moment savijanja - M_s , moment uvijanja (torzije) - M_t).

U zavisnosti od kombinacije ovih sila i momenata razlikujemo osnovna naprezanja, prikazana na sl. 8.1.

- a) **aksijalno naprezanje**
(zatezanje, pritisak),
- b) **čisto smicanje**,
- c) **čisto savijanje**,
- d) **uvijanje (torzija)**,
- e) **izvijanje**.



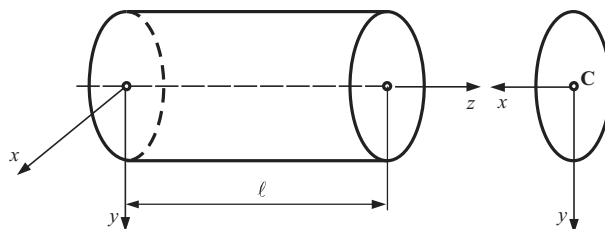
Slika 8.1: Specijalni slučajevi.

Pored osnovnih naprezanja, imamo i složena naprezanja, kao kombinacije osnovnih, npr. uvijanje i savijanje.

Jedan od glavnih zadataka u Otpornosti materijala je određivanje stanja napona u pojedinim tačkama tela. Tek kad odredimo stanje napona, možemo da vidimo u kom će preseku da se jave ekstremne vrednosti napona (glavni naponi!), što je važno za praktičnu primenu.

8.2 Linearno naprezanje - pretpostavke. Određivanje napona

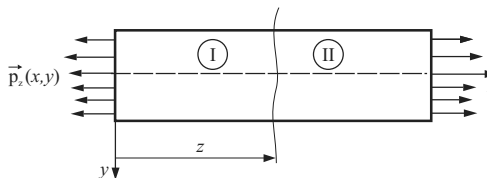
Posmatraćemo prizmatični ili cilindrični nosač¹, proizvoljnog poprečnog preseka. Dekartov koordinatni sistem ćemo da postavimo tako da x i y ose budu proizvoljne centralne² ose poprečnog preseka, a z - osa bude uzdužna osa nosača (slika 8.2).



Slika 8.2: Položaj koordinatnog sistema.

Pretpostavimo da je nosač, preko svojih osnova, opterećen aksijalnim (podužnim) silama, koje su u ravnoteži (vidi sliku 8.3),

tj. opterećen je samo na osnovama $z = 0$ i $z = \ell$ ravnotežnim spoljašnjim površinskim silama. Zapreminske sile se zanemaruju.



Slika 8.3: Raspored sila po poprečnom preseku (prikaz u yz - ravni).

Redukcijom ovih sila na težište poprečnog preseka C i projektovanjem dobijenih veličina na odgovarajuće ose, dobijamo (vidi sl. 8.4):

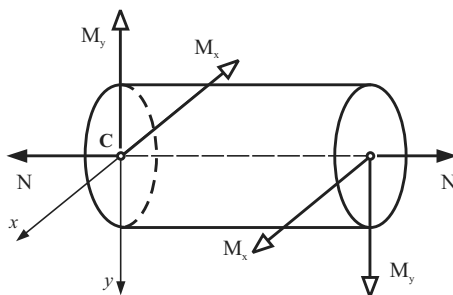
- aksijalnu silu $N = \int_A p_z(x, y) dA$, na oba kraja, i
- momente savijanja za x i y osu:

$$- M_x = - \int_A y p_z(x, y) dA, \quad M_y = \int_A x p_z(x, y) dA,$$

respektivno.

¹Poprečni presek je konstantan.

²Koordinatni početak je u centru (težištu) C .



Slika 8.4: Veličine dobijene redukcijom na težište.

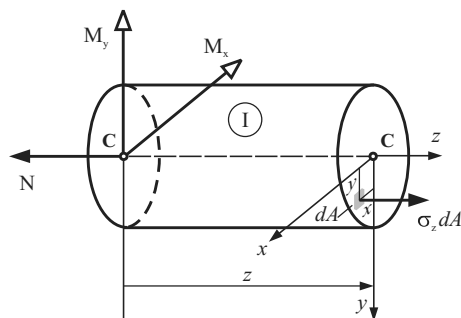
8.2.1 Izraz za normalni napon

Na osnovu prethodnih pretpostavki, može da se pokaže (videti [7], str. 230) da je u svakoj tački nosača linearno stanje napona. U poprečnim presecima postoji samo normalni napon σ_z koji je linearna funkcija koordinata x i y , tj.

$$\sigma_z = a + bx + cy, \quad (8.1)$$

gde su: a , b i c , za sada, neodređene konstante.

Zamišljenom presečnom ravni, upravnom na osu štap, delimo štap na dva dela I i II. Posmatrajmo deo štapa I (slika 8.5). Kako je nosač, prema pretpostavci, bio u ravnoteži pre "presecanja" (vidi sl. 8.4), to je u ravnoteži i svaki njegov deo, posle "presecanja".



Slika 8.5: Normalni napon.

Odstranjeni deo ćemo zameniti silama koje deluju u svakoj tački poprečnog preseka, tj. na svaki element dA poprečnog preseka, površine A , u presečnoj ravni deluje elementarna sila $\sigma_z dA$ paralelna osi z .

Prema osnovnom postulatu Otpornosti materijala, tada spoljašnje sile, koje deluju na deo I tela (F , M_x , M_y), i unutrašnje sile ($\sigma_z dA$), raspoređene po njegovim presečnim površinama, čine ravnotežni sistem, pa možemo da iskoristimo uslove ravnoteže (2.26). Od šest skalarnih uslova ravnoteže tri su identički zadovoljena:

$$\sum X \equiv 0, \quad \sum Y \equiv 0, \quad \sum M_z \equiv 0,$$

dok su preostala tri:

$$\sum Z = 0 : \quad \int_A \sigma_z dA - N = 0, \quad (8.2)$$

$$\sum M_x = 0 : \quad \int_A y \sigma_z dA - M_x = 0, \quad (8.3)$$

$$\sum M_y = 0 : \quad - \int_A x \sigma_z dA - M_y = 0. \quad (8.4)$$

Zamenom σ_z iz (8.1) u jednačine (8.2)-(8.4), pri čemu su a , b i c konstante, dobijamo jednačine za njihovo određivanje:

$$\begin{aligned} a \int_A dA + b \int_A x dA + c \int_A y dA &= N, \\ a \int_A y dA + b \int_A xy dA + c \int_A y^2 dA &= M_x, \\ a \int_A x dA + b \int_A x^2 dA + c \int_A xy dA &= -M_y. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Ovaj sistem može da se pojednostavi pogodnim izborom koordinatnog sistema. Naime, ako pretpostavimo da su x, y glavne težišne (centralne) ose inercije, tada je:

$$S_x = \int_A y dA = 0, \quad S_y = \int_A x dA = 0, \quad I_{xy} = \int_A xy dA = 0.$$

Kako je, prema definiciji,

$$A = \int_A dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA,$$

to iz (8.5) dobijamo:

$$a = \frac{N}{A}, \quad b = -\frac{M_y}{I_y}, \quad c = \frac{M_x}{I_x}. \quad (8.6)$$

Konačno, za normalni napon σ_z (8.1) dobijamo:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x. \quad (8.7)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Veličina normalnog napona σ_z zavisi od spoljašnjeg opterećenja, geometrijskih karakteristika poprečnog preseka i od koordinata tačke poprečnog preseka, u kojoj se napon računa.

Zapazimo da je sila N dovedena u vezu s površinom poprečnog preseka A , a momenti savijanja M_x i M_y , s aksijalnim momentima inercije poprečnog preseka.

Raspored normalnih napona σ_z i njihove veličine jednake su u svakom poprečnom preseku štapa, jer, prema (8.1), ne zavise od koordinate z .

Na kraju, recimo da je, posle svega, jasan razlog zbog koga smo izabrali glavne centralne ose inercije za ose koordinatnog sistema. Ovako dobijen izraz (8.7) za normalni napon σ_z je najjednostavnijeg oblika.

Specijalni slučajevi

Specijalne slučajeve smo već naveli u uvodnom delu. U ovom poglavlju opisaćemo ih i izvesti odgovarajuće relacije.

8.3 Aksijalno naprezanje

Aksijalno naprezanje štapa izaziva par aksijalnih sila u ravnoteži (ili sistem sila koji se redukuje na ovaj par), a koje deluju na krajevima štapa. Pri tome su transversalna sila, moment savijanja i moment torzije jednaki nuli, tj.:

$$T = M_s = M_t = 0.$$

Da bismo odredili stanje napona, "presecimo" štap, sa ravni čija normala gradi ugao φ sa osom štapa, na dva dela (slika 8.6).

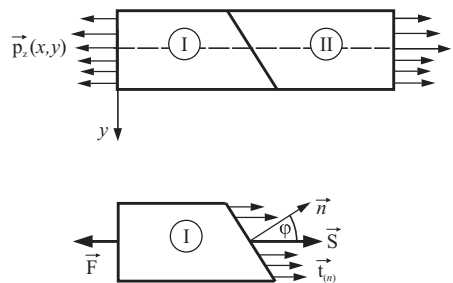
Označimo sa A_n - površinu poprečnog preseka, dobijenu ovim presecanjem, a sa A - presek upravan na osu štapa ($\varphi = 0$).

Prema (6.3), na strani 97, ukupna sila, koja deluje na presečnoj površi, je:

$$\mathbf{S} = \int_{A_n} \mathbf{t}_{(n)} dA. \quad (8.8)$$

Iz uslova ravnoteže za deo I dobijamo:

$$\sum_i \mathbf{S}_i = \mathbf{S} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{F} \quad (8.9)$$



Slika 8.6: Presek štapa.

Dakle, ove sile su istog pravca, pa je tog pravca i ukupan napon $\mathbf{t}_{(n)}$ (što se vidi iz (8.8)), kako je i nacrtano na slici 8.6.

Kada su spoljašnje sile, čija je rezultanta $\mathbf{F}$, **ravnomerno** raspoređene po osnovi štapa, tada su i unutrašnje sile ravnomerno raspoređene po površi poprečnog preseka, tj.

$$\mathbf{t}_{(n)} = t_{(n)} \mathbf{k} = \text{const.},$$

pa je:

$$S = t_{(n)} \int_{A_n} dA = t_z A_n, \quad (8.10)$$

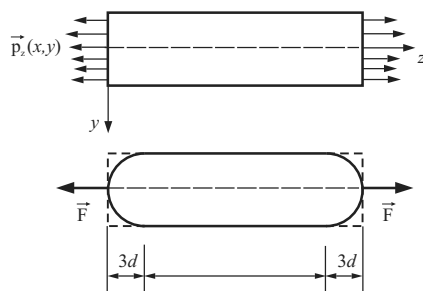
gde je $t_{(n)} = t_z$.

Odavde dobijamo ukupan napon (koji je u pravcu z -ose):

$$t_z = \frac{S}{A_n} = \frac{F}{A_n}. \quad (8.11)$$

U slučaju da spoljašnje sile, čija je rezultanta $\mathbf{F}$, nisu ravnomerno raspoređene po osnovama štapa

usvaja se, na osnovu eksperimenta, da je raspored unutrašnjih sila praktično ravnomerno raspoređen tek na rastojanju većem od $3d$ od osnove štapa, gde je d veća dimenzija poprečnog preseka štapa (**Sen-Venanov postulat**).

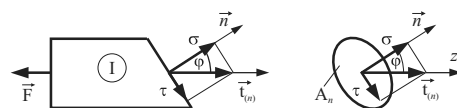


Slika 8.7: Neravnomerno raspoređene sile po osnovama.

Nadimo sada normalni i tangencijalni napon za presečnu ravan sa normalom $\mathbf{n}$.

Prema definiciji ovih veličina (6.7) imamo (vidi sl. 8.8):

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \sigma_n = \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{n} = t_z \cos \varphi, \\ \tau &\equiv \tau_n = \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{n}_\perp = t_z \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8.12)$$



Slika 8.8: Presek štapa.

Sa φ , kao što je već rečeno, označili smo ugao između normale $\mathbf{n}$ i z -ose. Ovaj ugao ćemo uzimati sa znakom $+$, ako se meri od ose štapa u smeru suprotno kretanju kazaljke na satu.

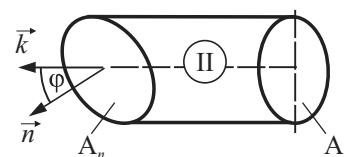
Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Iz poslednjih relacija vidimo da će τ da bude nula kada je $\varphi = 0$. U tom slučaju je $\sigma|_{\varphi=0} = \sigma_{\max}$, a ukupan napon je $t_z = \sigma_{\max}$. Odavde zaključujemo (na osnovu definicije glavnog napona) da će glavni napon da se javi u ravni upravnoj na osu štapa, a njegova vrednost je:

$$\sigma_n|_{\mathbf{n}=\mathbf{k}} \equiv \sigma_z = \sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_n \cos \varphi} = \frac{t_z}{\cos \varphi}. \quad (8.13)$$

Ovde je iskorišćena relacija (8.11) i veza $A \equiv A_k = A_n \cos \varphi$, da bismo dobili poslednju jednakost.

Na osnovu prethodnog, koristeći relacije (8.13) i (8.12), možemo da uspostavimo vezu između ukupnog (t_z), normalnog (σ) i tangencijalnog (τ) napona, za presek čija normala zaklapa sa z -osom ugao φ :



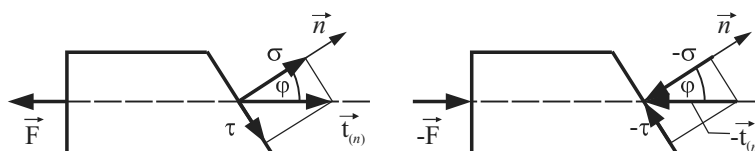
Slika 8.9: Presečne površi.

$$\begin{aligned} t_z &= \sigma_z \cos \varphi, \\ \sigma &= t_z \cos \varphi = \sigma_z \cos^2 \varphi, \\ \tau &= t_z \sin \varphi = \sigma_z \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sigma_z \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Najveći τ napon javlja se u ravni koja je određena uglom φ_0 , za koji je $\sin 2\varphi = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \left\{ \pm \frac{\pi}{4} \right\}$, tj. u preseku koji je pod uglom od 45° u odnosu na z -osu (glavnu ravan). Prema tome je:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_z. \quad (8.15)$$

☞ Napomenimo da ćemo kao pozitivan normalni napon uzimati napon pri zatezanju, a negativan pri pritisku. Tangencijalni napon ćemo uzeti da je pozitivan, ako se pravac spoljne normale preseka, krećući se u smeru kazaljke na satu, poklopi sa njim (videti sl. 8.10).



Slika 8.10: Smerovi vektora napona.

Uzdužna dilatacija ε_z - u pravcu ose štapa z , zavisi samo od glavnog napona σ_z , jer je τ - napon u tom preseku jednak nuli, pa prema Hukovom

zakonu imamo:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z.$$

Kako je, prema definiciji:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \varepsilon_z,$$

to, za promenu dužine, dobijamo:

$$\Delta\ell = \ell\varepsilon_z = \ell\frac{\sigma_z}{E} = \ell\frac{F}{EA}. \quad (8.16)$$

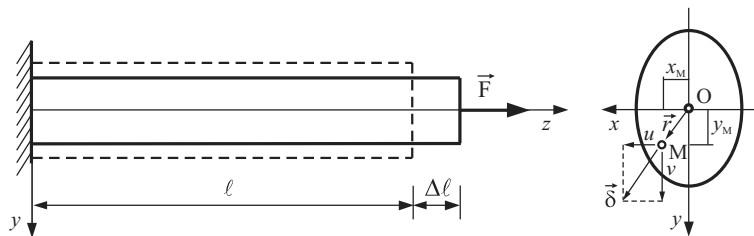
Ostale komponente deformacije dobijaju se korišćenjem Hukovog zakona:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = -\nu\frac{F}{EA}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = -\frac{\nu}{E}\sigma_z = -\nu\frac{F}{EA}, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Poprečno skraćanje štapa je:

$$\varepsilon_p = -\mu\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_z}{E} = -\mu\frac{F}{EA}.$$

Rešavanjem sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (8.17), za štap prikazan na slici 8.11a, dobijamo komponente pomeranja (u, v, w) :



Slika 8.11: Pomeranje tačaka.

$$u = -\nu\frac{F}{EA}x, \quad v = -\nu\frac{F}{EA}y, \quad w = \frac{F}{EA}z. \quad (8.18)$$

Ukupno poprečno pomeranje proizvoljne tačke M (sl. 8.11b) je:

$$\delta = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = -\nu\frac{F}{EA}x\mathbf{i} - \nu\frac{F}{EA}y\mathbf{j} = -\nu\frac{F}{EA}\mathbf{r}. \quad (8.19)$$

Za izduženje štapa, prema (8.18), dobijamo

$$\Delta\ell = w(\ell) = \frac{F\ell}{EA}. \quad (8.20)$$

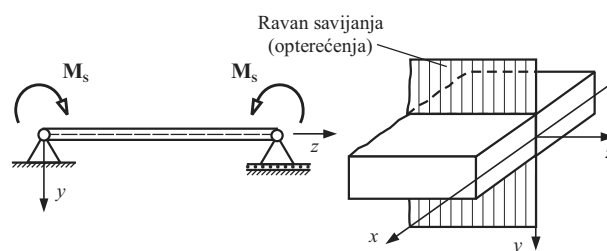
Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

8.4 Čisto savijanje

8.4.1 Uvod

Pod **savijanjem** podrazumevamo naprezanje nosača pri kome se njegova uzdužna osa, pri opterećenju nosača, savija.

Savijanje nastaje pod dejstvom momenata savijanja, koji deluju u ravni koja prolazi kroz osu nosača. Ova ravan naziva se **ravan savijanja (opterećenja)**.



Slika 8.12: Čisto savijanje – ravan savijanja.

Na slici 8.12 prikazan je primer kada je moment savijanja, kao vektor, u pravcu x -ose.

Prema položaju ravni savijanja (opterećenja), u odnosu na glavne težišne ose poprečnog preseka nosača, razlikujemo dva slučaja:

- **pravo savijanje**, kada se trag ravni savijanja poklapa sa jednom od glavnih težišnih osa poprečnog preseka nosača (slika 8.12);
- **koso savijanje**, kada se trag ravni savijanja ne poklapa ni sa jednom od glavnih težišnih osa, a prolazi kroz težište.

U zavisnosti od spoljašnjeg opterećenja savijanje može da bude:

- **čisto savijanje**, kada se spoljašnje opterećenje svodi na spreg, pri čemu je moment sprega (moment savijanja) konstantan celom dužinom nosača, a transversalna sila, aksijalna sila i moment torzije su jednaki nuli;
- **savijanje silama**, kada se pored momenta savijanja javljaju i transversalne sile, a aksijalna sila i moment torzije su jednaki nuli. Ovaj zadatak ćemo kasnije razmatrati.

8.4.2 Osnovne pretpostavke

Pri razmatranju naprezanja pri čistom savijanju uvodimo, u Otpornosti materijala, sledeće pretpostavke o deformaciji i raspodeli napona:

- poprečni preseći grede, pri deformaciji, ostaju ravni i upravni na elastičnu liniju (deformisanu osu nosača) (**Bernuli³-Ojlerova hipoteza o ravnim presecima**),
- sve komponente napona, osim σ_z , jednake su nuli.
- nosač, prizmatičnog ili cilindričnog oblika, opterećen je samo na krajevima, tako da se pri redukciji tih sila na težište dobije da su glavni vektori jednaki nuli, a glavni momenti na krajevima jednaki (ravnoteža!). Spregovi leže u kosoj ravni u odnosu na glavne ravni inercije (trag ravni sprega se ne poklapa sa glavnim osama). Za tu ravan dijagram momenata savijanja je konstantan duž ose nosača, a transverzalna sila je identički jednaka nuli.

Ovako opterećen štap izložen je **čistom savijanju**.

U specijalnom slučaju kada redukcionni momenti imaju samo jednu komponentu ($M_x \neq 0, M_y = 0$ ili $M_y \neq 0, M_x = 0$), u poprečnom preseku nosača vektor momenta savijanja poklapa se sa jednom od glavnih centralnih osa inercije x ili y – **čisto pravo savijanje**.

- u opštem slučaju, kada je $M_x \neq 0$ i $M_y \neq 0$, u poprečnom preseku vektor momenta savijanja ne poklapa se ni sa jednom od glavnih centralnih osa inercije x ili y – **čisto koso savijanje**. Ravan savijanja je kosa u odnosu na glavne ravni inercije, a upravna je na vektor $\mathbf{M}_s$ – moment savijanja.

8.4.3 Čisto savijanje prave grede konstantnog poprečnog preseka

U ovom kursu proučavaćemo samo čisto pravo savijanje, pa u daljem tekstu, radi kratkoće pisanja, govorićemo o čistom savijanju, podrazumevajući čisto pravo savijanje.

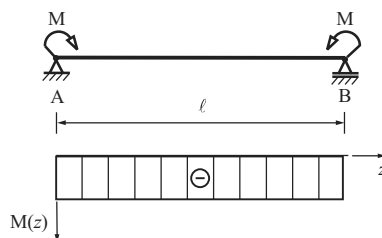
Napred je rečeno da pod pojmom **čisto savijanje** podrazumevamo naprezanje nosača koje nastaje pod dejstvom momenta savijanja, koji je isti u svim presecima nosača, pri čemu su aksijalna i transverzalna sila, kao i moment torzije jednaki nuli ($M_s = \text{const.} \neq 0, T = 0, N = 0, M_t = 0$).

³Bernoulli

Navedimo dva primera za ovu vrstu naprezanja.

Prvo, posmatrajmo prostu gredu koja je na krajevima opterećena spregovima, istih intenziteta, ali suprotnog smera.

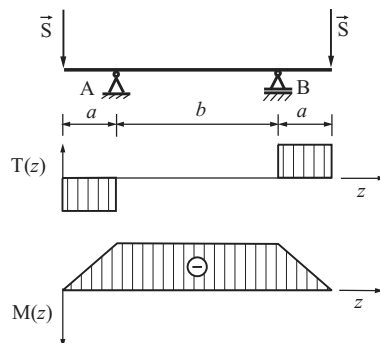
U ovom slučaju javlja se samo moment savijanja (oko x -ose), dok su transversalna i aksijalna sila, kao i moment torzije jednaki nuli. Greda je u celom rasponu izložena čistom savijanju.



Slika 8.13: Primer čistog pravog savijanja.

Kao drugi primer, posmatrajmo gredu sa prepustima koja je na krajevima opterećena silama, intenziteta S .

U ovom slučaju (sl. 8.14) javlja se, pored momenta savijanja, i transversalna sila. Međutim, između oslonaca A i B transversalna sila je jednaka nuli, a moment savijanja je konstantan. Odavde sledi da će ovaj nosač samo u delu između oslonaca da bude izložen čistom savijanju.

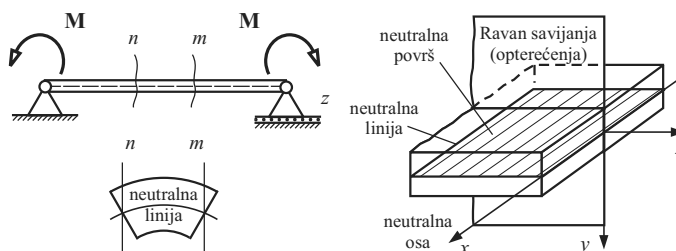


Slika 8.14: Primer delimično čisto pravo savijanje.

8.4.4 Elastična linija. Normalni napon

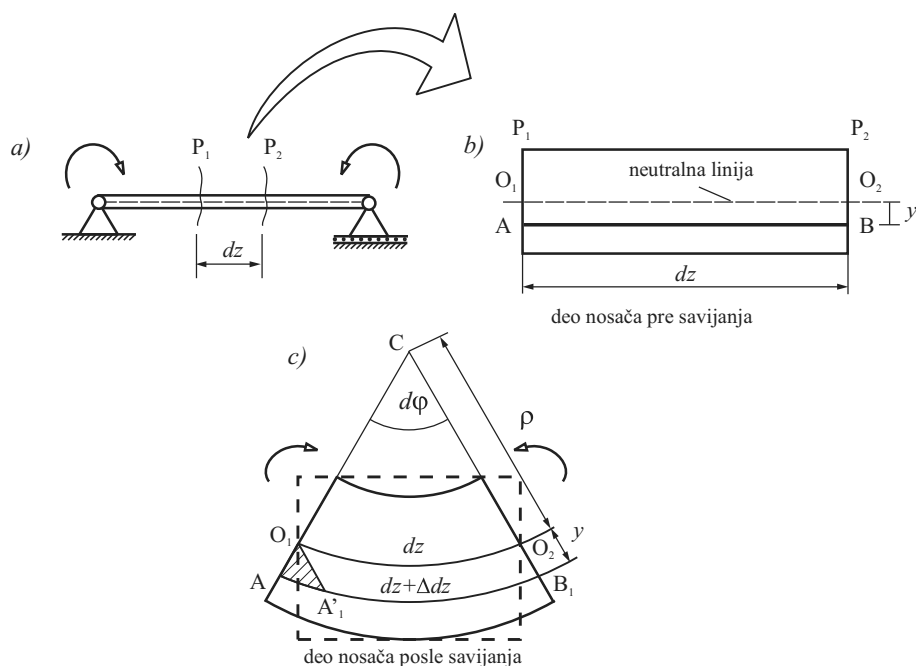
Usled delovanja spregova nosač se deformiše tako da se neka njegova vlakna izdužuju, neka skraćuju, a neka ostaju iste dužine.

Skup vlakana čije je izduženje jednako nuli obrazuje **neutralnu površ**. Presечna linija te površi i ravni savijanja naziva se **elastična** ili **neutralna linija**. **Neutralna osa** je presek neutralne površi i poprečnog preseka nosača.



Slika 8.15: Čisto pravo savijanje.

Posmatrajmo savijanje nosača, oko x -ose, spregovima $(\mathbf{M}_x, -\mathbf{M}_x)$. Da bismo dobili izraz za normalni napon, koristićemo Bernuli-Ojlerovu hipotezu ravnih preseka (navedena u pretpostavkama 8.4.2).



Slika 8.16: Deo nosača posle deformacije.

Uočimo dva veoma bliska preseka P_1 i P_2 , na rastojanju dz (sl. 8.16). Posle deformacije ovi preseki zaokrenuće se za neki ugao $d\varphi$. Neutralna linija prodire kroz poprečne preseke P_1 i P_2 u tačkama O_1 i O_2 , pa vlakno O_1O_2 ostaje nepromenjene dužine.

Posmatrajmo sada proizvoljno vlakno AB , koje se nalazi na rastojanju y od neutralne linije. Ono posle savijanja prelazi u krivu A_1B_1 , a izduži se za Δdz (sl. 8.16c). Dilatacija vlakna, udaljenog za y od neutralne ose,

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

prema definiciji, je:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (8.21)$$

Iz sličnosti trouglova $\triangle O_1 A_1 A'_1 \sim \triangle C O_1 O_2$ sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica:

$$\frac{\overline{A_1 A'_1}}{\overline{O_1 O_2}} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{C O_1}}, \quad (8.22)$$

odnosno:

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{\varrho} \quad (8.23)$$

gde je ϱ - poluprečnik krivine elastične linije, a C - centar krivine.

Iz prethodnih relacija (8.21) i (8.23) dobijamo:

$$\varepsilon_z = \frac{y}{\varrho}. \quad (8.24)$$

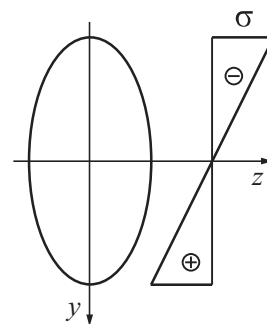
Dalje, prema Hukovom zakonu, ovoj dilataciji odgovara normalan napon $\sigma_z = E\varepsilon_z$, koji deluje u aksijalnom pravcu vlakna, u tačkama A_1 , B_1 upravno na poprečni presek, pa prema (8.24) dobijamo:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{y}{\varrho} = \frac{E}{\varrho} y. \quad (8.25)$$

Na osnovu jednačine (8.25) zaključujemo da je normalni napon linearna funkcija rastojanja od neutralne linije, u kojoj je normalni napon jednaka nuli. Ovo je posledica Bernulijeve hipoteze ravnih preseka.

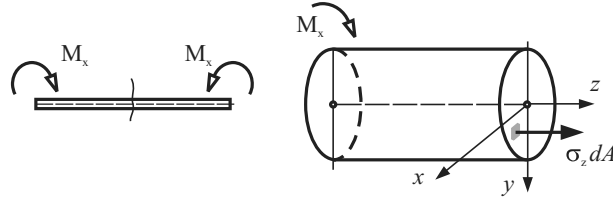
Dijagram normalnih napona (σ -dijagram), na osnovu (8.25) prikazan je na sl. 8.17.

Znak napona zavisi od toga da li su vlakna izdužena (+) ili skraćena (-).



Slika 8.17: σ - dijagram.

Da bismo uspostavili vezu između unutrašnjih sila (naponi) i spoljašnjeg opterećenja (spregovi), zamislimo da smo nosač (koji je pod dejstvom sila u ravnoteži) presekli na dva dela. Odstranimo jedan deo i njegov uticaj zamenimo unutrašnjim silama $\sigma_z dA$, koje su raspoređene po celoj površi poprečnog preseka!



Slika 8.18: Normalni napon u proizvoljnom preseku.

Sile koje deluju na nosač su u ravnoteži. Napišimo sada uslove ravnoteže, za ovaj slučaj (sve su sile paralelne sa z -osom):

$$\begin{aligned} \sum_i X_i &\equiv 0, \quad \sum_i Y_i \equiv 0, \\ \sum_i Z_i &= \int_A \sigma_z dA = 0, \quad \Rightarrow \\ \int_A \frac{E}{\varrho} y dA &= \frac{E}{\varrho} \int_A y dA = \frac{E}{\varrho} S_x = 0 \quad \Rightarrow \\ \boxed{S_x = 0}, \end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_{xi} &= M_x - \int_A y \sigma_z dA = 0 \quad \Rightarrow \\ M_x &= \int_A \frac{E}{\varrho} y^2 dA = \frac{E}{\varrho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\varrho} I_x \quad \Rightarrow \\ \boxed{\frac{1}{\varrho} = \frac{M_x}{EI_x}}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Proizvod EI_x zove se **krutost nosača** u odnosu na savijanje.

Na kraju, moment za y osu daje

$$\begin{aligned} \sum_i M_{yi} &= \int_A x \sigma_z dA = 0 \quad \Rightarrow \\ \int_A \frac{E}{\varrho} xy dA &= \frac{E}{\varrho} \int_A xy dA = \frac{E}{\varrho} I_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \\ \boxed{I_{xy} = 0}, \end{aligned} \tag{8.28}$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

dok je moment za z osu identički zadovoljen, tj.

$$\sum_i M_{zi} \equiv 0.$$

Na osnovu uslova ravnoteže zaključujemo sledeće:

- neutralna osa x mora da bude težišna osa (iz (8.26) - statički moment površi jednak je nuli);
- ose x i y su glavne ose inercije, jer je centrifugalni moment inercije jednak nuli (8.28) (videti jed. (4.21) na str. 64).

Krivinu elastične linije računamo prema (8.27), a kombinujući relacije (8.25) i (8.27) dobijamo:

$$\sigma_z = \frac{E}{\varrho} y = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (8.29)$$

Konačno, na osnovu (8.27), sledi da je elastična linija kružni luk, jer je $\varrho = \text{const.}$

Jednačina (8.27) poznata je u literaturi kao **Bernuli-Ojlerov obrazac** za krivinu elastične linije.

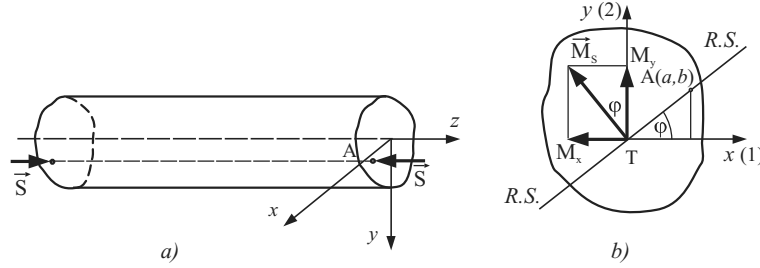
☞ Napomenimo da je tangencijalni napon (τ), za ovaj slučaj savijanja, jednak nuli:

$$\tau = 0.$$

8.5 Ekscentrični pritisak ili zatezanje kod pravih štapova, konstantnog poprečnog preseka

Posmatrajmo sada složeniji slučaj savijanja, kada na krajevima nosača deluju dve sile u ravnoteži (sl. 8.19-a). Tada, ako je njihova napadna tačka izvan težišta, a napadna linija paralelna sa osom nosača (štapa), govorimo o **ekscentričnom pritisku ili zatezanju**.

U ovom slučaju su transverzalna sila i moment torzije jednaki nuli, a aksijalna sila i moment savijanja su različiti od nule ($T = 0$, $M_t = 0$, $N \neq 0$, $M_s \neq 0$).



Slika 8.19: Sile i momenti kod ekscentričnog pritiska.

Redukcijom ovih sila na težište poprečnog preseka štapa dobijamo par ravnotežnih aksijalnih sila ($\mathbf{S}$, $-\mathbf{S}$) i par ravnotežnih spregova ($\mathbf{M}_s$, $-\mathbf{M}_s$), intenziteta $M_s = S \cdot e$ (vidi sliku 8.19). Sa R.S. označena je ravan savijanja, a sa $e = \overline{AT}$. Ose su glavne težišne ose, postavljene na desnom kraju. Koordinate napadna tačka A , sile $\mathbf{S}$, su (a, b) .

Sile $\mathbf{S}$ izazivaju aksijalno naprezanje, a spregovi savijanje. Dakle, ekscentričan pritisak je kombinacija aksijalnog pritiska i čistog kosog savijanja. Moment sprega možemo da razložimo na komponente u pravcu x i y ose. Njihovi intenziteti su:

$$\begin{aligned} M_x &= M_s \sin \varphi = S \cdot e \sin \varphi = Sb; \\ M_y &= M_s \cos \varphi = S \cdot e \cos \varphi = Sa. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Projekcija momenata M_x , pod pretpostavkom da sila pritiska deluje u prvom kvadrantu, je negativna (suprotan smer u odnosu na x osu), a projekcija momenata M_y je pozitivna (vidi sl. 8.19-b).

Ako sada ove vrednosti zamenimo u (8.7) i imajući na umu da je normalnih napona od aksijalne sile (8.13) $\sigma_s = -S/P$, dobijamo ukupan normalni napon u slučaju ekscentričnog pritiska

$$\sigma_z = - \left(\frac{S}{P} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \right), \quad (8.31)$$

gde je P površina poprečnog preseka⁴.

Iskoristivši relacije (8.30), prethodni izraz može da se napiše u obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= - \frac{S}{P} \left(1 + \frac{b}{I_x/P} y + \frac{a}{I_y/P} x \right) = \\ &= - \frac{S}{P} \left(1 + \frac{by}{i_x^2} + \frac{ax}{i_y^2} \right). \end{aligned} \quad (8.32)$$

⁴Ovde smo sa P označili površinu poprečnog preseka, jer je sa A označena proizvoljna tačka poprečnog preseka, pa da ne bi došlo do zabune.

☞ Napomenimo da su x i y glavne, težišne ose. Pri dobijanju relacija (8.32) iskoristili smo vezu između poluprečnika inercije (i_n) i momenta inercije (I_n) za neku osu n :

$$i_n^2 = I_n/P.$$

Na sličan način, kod ekscentričnog zatezanja, dobili bismo

$$\sigma_z = +\frac{S}{P} \left(1 + \frac{by}{i_x^2} + \frac{ax}{i_y^2} \right). \quad (8.33)$$

Jednačina neutralne ose

Jednačina neutralne ose ($\sigma = 0$), u ovom slučaju, ima oblik:

$$1 + \frac{by}{i_x^2} + \frac{ax}{i_y^2} = 0.$$

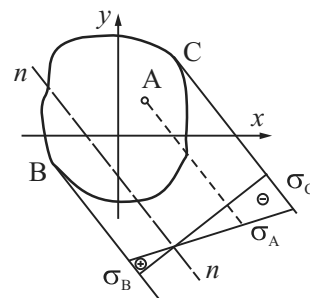
Vidimo da je neutralna osa prava koja ne prolazi kroz težište. Njeni odsecci na glavnim težišnim osama x , y su:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{i_y^2}{a}, & \text{za } y = 0, \\ y &= -\frac{i_x^2}{b}, & \text{za } x = 0. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Takođe, na osnovu (8.34), zapažamo da položaj neutralne ose kod ekscentričnog pritiska (zatezanja) ne zavisi od intenziteta sile S , već samo od njenog položaja u odnosu na težište (koordinate a , b !), kao i od oblika poprečnog preseka (i_x , i_y).

Dijagram normalnih napona dat je na sl. 8.20.

Neutralna osa deli poprečni presek na dva dela. U jednom delu imamo pritisak (-), a u drugom zatezanje (+). Kod ekscentričnog pritiska znak (-) javlja se u onom delu preseka u kome deluje sila. Kod zatezanja je suprotno.



Slika 8.20: σ – dijagram kod ekscentričnog pritiska.

Jezgro preseka

U praksi se susrećemo sa ekscentrično pritisnutim stubovima izrađenim od materijala koji dobro trpe pritisak, ali ne i zatezanje. Iz tih razloga bi bilo dobro da znamo gde treba da delujemo silom da bi ceo presek bio izložen pritisku.

Pri crtanju σ - dijagrama videli smo da neutralna osa deli površ poprečnog preseka na dva dela. U jednom delu javljaju se naponi zatezanja (+), a u drugom, u kome se kod ekscentričnog pritiska nalazi napadna tačka sile, naponi pritiska (–).

Dalje, vidi se (Dodatak, str. 259) da kada se napadna tačka sile približava težištu, tada se neutralna osa udaljuje od težišta i obrnuto. Odavde sledi da možemo da nađemo jedan položaj napadne tačke, takav da neutralna osa tangira poprečni presek, odnosno da je ceo poprečni presek izložen pritisku (ako je ekscentričan pritisak). Ako se napadna tačka još više približi težištu, tada će neutralna osa da bude van preseka, pa je opet ceo presek izložen pritisku. Međutim, ako posmatramo sve neutralne ose koje tangiraju poprečni presek, dobićemo odgovarajući skup napadnih tačaka sila. Geometrijsko mesto ovih tačaka je linija, a oblast, ograničenu ovom linijom, zovemo **jezgro preseka**.

Iz same definicije neposredno sledi da:

- kada je napadna tačka sile u jezgru preseka, tada u svim tačkama preseka vlada pritisak,
- kada je napadna tačka sile van preseka, tada neutralna osa deli površinu poprečnog preseka na dva dela:
pritisak i zatezanje.

Postupak određivanja položaja graničnih tačaka jezgra svodi se na određivanje položaja napadnih tačaka sile za one neutralne ose koje dodiruju presek (ali ga ne seku!). U Dodatku dat je primer određivanja jezgra preseka za pravougaonik.

8.6 Zadaci

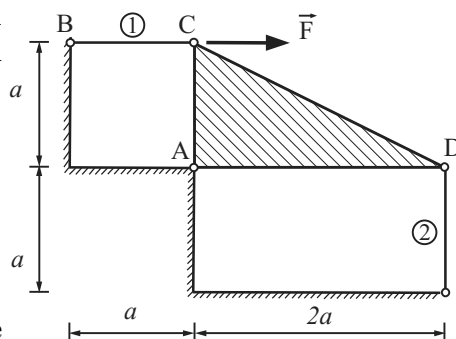
Zadaci - Aksijalno naprezanje

Zad. 8.1.

Laka kruta trougaona ploča učvršćena je za fundament pomoću dva laka štapa i zglobom A, a opterećena je u tački C silom $\vec{F}$ (Slika 8.21). Odrediti:

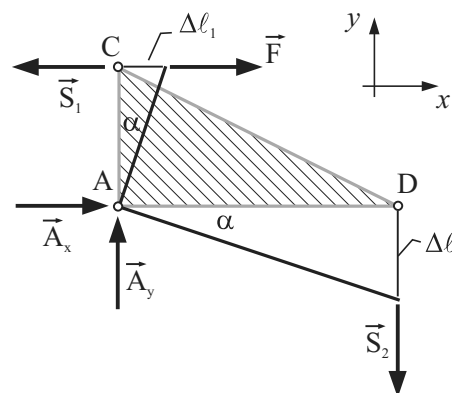
- sile u štapovima,
- napone u štapovima i
- pomeranje tačke C.

Poznate su vrednosti: sile $\vec{F}$, rastojanje a , površine poprečnih preseka A i moduli elastičnosti E štapova.



Slika 8.21: uz zad. 8.1.

Rešenje:



Slika 8.22: uz rešenje zad. 8.1.

a) Uslovi ravnoteže za posmatranu ploču, su:

$$\begin{aligned} \sum_i X_i &= A_x + F - S_1 = 0, \\ \sum_i Y_i &= A_y + S_2 = 0, \\ \sum_i M_A &= F_1 \cdot a - S_1 \cdot a - S_2 \cdot 2a = 0 \Rightarrow \\ &S_1 + 2S_2 = F_1. \end{aligned}$$

Kako imamo tri jednačine, a četiri nepoznate, to je zadatak $1 \times$ statički neodređen. Dopunski uslov je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \ell_1}{a} = \frac{\Delta \ell_2}{2a} \Rightarrow \Delta \ell_2 = 2\Delta \ell_1. \quad (8.35)$$

Kako je (kombinacija aksijalno naprezanje – Hukov zakon)

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon = E \frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{F\ell}{EA} \quad (8.36)$$

to iz (8.35) i (8.36) dobijamo

$$\frac{S_2 \cdot \ell_2}{EA} = 2 \frac{S_1 \cdot \ell_1}{EA} \Rightarrow S_2 = 2S_1 \quad \text{i} \quad S_1 = \frac{1}{5}F, \quad S_2 = \frac{2}{5}F.$$

b) Naponi su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{F}{5A}, \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{2F}{5A}.$$

c) Pomeranje tačke C

$$x_C = \Delta\ell_1 = \frac{S_1 \cdot a}{EA} = \frac{F \cdot a}{5EA}.$$



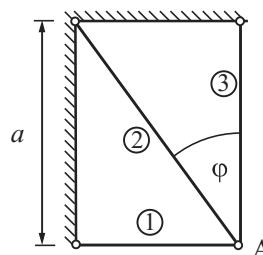
Zad. 8.2.

Konstruktivni sistem, prikazan na slici 8.23, sastoji se od tri štapa. Odrediti:

a) normalne napone u štapovima usled zagrevanja štapa 1 za $\Delta t = 40^\circ C$ i

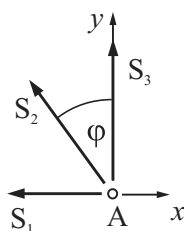
b) pomeranje tačke A,

ako je: $a = 4[m]$, $\sin \varphi = 3/5$, $E = 200[GPa]$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} C^{-1}$, a površine poprečnih preseka su iste.



Slika 8.23: uz zad. 8.2.

Rešenje:



Slika 8.24: uz rešenje zad. 8.2.

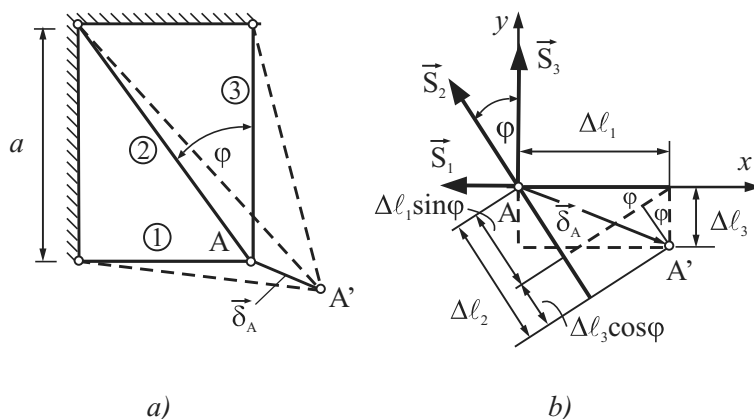
a) Uslovi ravnoteže za sučeljni sistem sila (S_1, S_2, S_3), koje se sučeljavaju u tački A, su:

$$\begin{aligned} \sum_i X_i &= -S_1 - S_2 \sin \varphi = 0, \\ \sum_i Y_i &= S_2 \cos \varphi + S_3 = 0. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Kako imamo dve jednačine, a tri nepoznate, to je zadatak $1 \times$ statički neodređen. Dopunski uslov je (videti sl. 8.25-b)

$$\Delta \ell_2 = \Delta \ell_1 \sin \varphi + \Delta \ell_3 \cos \varphi. \quad (8.38)$$



Slika 8.25: uz rešenje zad. 8.2.

Kako je (kombinacija aksijalno naprezanje – Hukov zakon)

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta \ell}{\ell}, \quad \Rightarrow \quad \Delta \ell = \frac{S \ell}{EA} + \alpha \ell \Delta T,$$

a dužina štapova su (vidi sl. 8.23): $\ell_1 = a \tan \varphi$, $\ell_2 = a / \cos \varphi$, $\ell_3 = a$, to su dilatacije štapova:

$$\begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{S_1 \ell_1}{EA} + \alpha \ell_1 \Delta T = \frac{S_1 a \tan \varphi}{EA} + \alpha a \tan \varphi \Delta T, \\ \Delta \ell_2 &= \frac{S_2 \ell_2}{EA} = \frac{S_2 a}{EA \cdot \cos \varphi}, \\ \Delta \ell_3 &= \frac{S_3 \ell_3}{EA} = \frac{S_3 a}{EA}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Kombinujući (8.38) i (8.39) dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{S_2 \cdot \ell_2}{EA} &= \left(\frac{S_1 \cdot \ell_1}{EA} + \alpha \ell_1 \Delta T \right) \sin \varphi + \frac{S_3 \cdot \ell_3}{EA} \cos \varphi \quad \Rightarrow \\ \frac{S_2 \cdot 5/4 \cdot a}{EA} &= \left(\frac{S_1 \cdot 3/4 \cdot a}{EA} + \alpha \cdot \frac{3}{4} a \Delta T \right) \cdot \frac{3}{5} + \frac{S_3 a}{EA} \cdot \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Oдавде sledi treća jednačina za određivanje intenziteta sila u štapovima

$$25 S_2 = 9 S_1 + 16 S_3 + 9 \alpha E A \Delta T. \quad (8.40)$$

Kombinujući sa jednačinama (8.37), za sile u štapovima, dobijamo:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{1}{8}\alpha EA\Delta T, \\ S_2 &= \frac{5}{24}\alpha EA\Delta T, \\ S_3 &= -\frac{1}{6}\alpha EA\Delta T. \end{aligned}$$

Naponi su:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{S_1}{A} = -\frac{1}{8}\alpha E\Delta T = -12 \text{ [MPa]}, \\ \sigma_2 &= \frac{S_2}{A} = \frac{5}{24}\alpha E\Delta T = 20 \text{ [MPa]}, \\ \sigma_3 &= \frac{S_3}{A} = -\frac{1}{6}\alpha E\Delta T = -16 \text{ [MPa]}. \end{aligned}$$

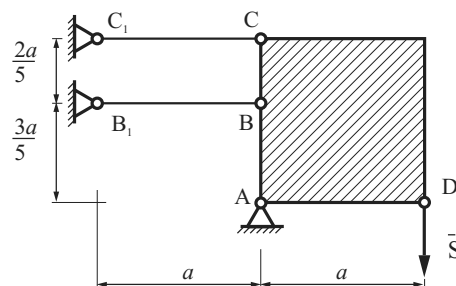
b) Pomeranje tačke C

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \sqrt{\Delta\ell_1^2 + \Delta\ell_3^2}. \\ \Delta\ell_1 &= \left(\frac{S_1}{EA} + \alpha\Delta T \right) a \operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{\sigma_1}{E} + \alpha\Delta T \right) a \operatorname{tg}\varphi = 1,26 \text{ [mm]}, \\ \Delta\ell_3 &= \frac{\sigma_3 \cdot a}{E} = -0,32 \text{ [mm]}, \Rightarrow \\ \Delta_A &= 1,3 \text{ [mm]}. \end{aligned}$$



Zad. 8.3.

Kruta kvadratna ploča, težine G , zglobno vezana u tački A , a u tačkama B i C vezana je zategama BB_1 i CC_1 . U tački D na nju deluje vertikalna sila intenziteta S (sl. 8.26). Odrediti:



Slika 8.26: uz zad. 8.3.

a) sile i napone u zategama i

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

b) pomeranje tačke D .

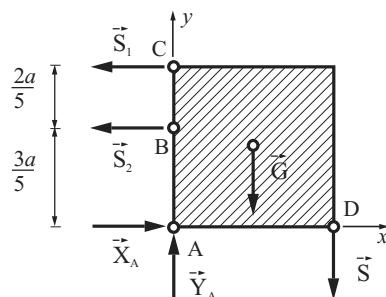
Rešenje:

Uslovi ravnoteže:

$$\sum_i X_i = -S_1 - S_2 + X_A = 0,$$

$$\sum_i Y_i = -G - S + Y_A = 0,$$

$$\sum_i M_A = -S_1 \cdot a - \frac{3}{5}a \cdot S_2 + G \cdot \frac{a}{2} + S \cdot a = 0$$

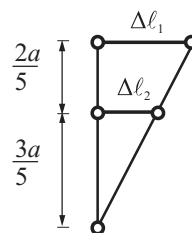


Slika 8.27: uz rešenje zad. 8.3.

Dopunski uslov

Sa sl. 8.28 vidi se da može da se uspostavi sledeća veza između pomeranja

$$\frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} = \frac{a}{(3/5)a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{5}{3} \Delta \ell_2.$$



Slika 8.28: uz rešenje zad. 8.3.

Ako sada iskoristimo vezu između pomeranja i sila $\Delta \ell = \frac{S \cdot a}{E \cdot A}$, dobijamo vezu između sila u štapovima:

$$S_1 = \frac{5}{3} S_2, \quad (8.41)$$

jer su štapovi od istog materijala (isti moduli elastičnosti $E_1 = E_2 \equiv E$), istog poprečnog preseka $A_1 = A_2$ i iste dužine a .

Iz momentne jednačine dobijamo

$$S_1 + \frac{3}{5} S_2 = \frac{1}{2} G + S. \quad (8.42)$$

Iz poslednje dve jednačine, (8.41) i (8.42), dobijamo

$$S_1 = \frac{25}{34} \left(\frac{G}{2} + S \right), \quad S_2 = \frac{15}{34} \left(\frac{G}{2} + S \right).$$

Naponi su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1} = \frac{25}{34A} \left(\frac{G}{2} + S \right), \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{A_2} = \frac{15}{34A} \left(\frac{G}{2} + S \right).$$

Pomeranje tačke D je jednako izduženju štapa CC_1 , jer se ploča okreće oko zgloba A , tj.

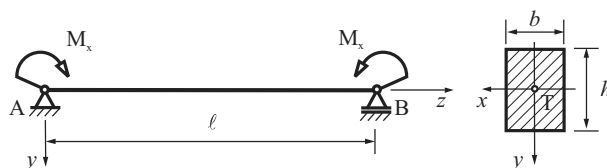
$$y_D = \Delta \ell_1 = \frac{S_1 \cdot a}{EA} = \frac{a}{EA} \frac{25}{34} \left(\frac{G}{2} + S \right).$$



Zadaci -čisto savijanje

Zad. 8.4.

Dimenzionisati gredu, koja je opterećena prema slici 8.29, ako je $\sigma_{dop} = 12 [MPa]$. Poprečni presek grede je pravougaonik, čiji je odnos strana $b/h = 1/2$. Moment savijanja je intenziteta $M_x = 25 [kNm]$.



Slika 8.29: uz zad.8.4

Rešenje:

Greda je opterećena parom spregova u ravnoteži, pa su sile u osloncima jednake nuli. Javljaju se samo momenti savijanja, koji su konstantni duž raspona grede. Statički dijagrami dati su na sl. 8.30. Ose x, y su glavne težišne ose, jer su ose simetrije. Vektor momenta savijanja poklapa se sa glavnom težišnom osom x . Prema navedenim činjenicama, nosač je izložen čistom pravom savijanju.

Poprečni presek je simetričan, u odnosu na y osu, pa su apsolutne vrednosti ivičnih napona iste, tj.

$$\sigma_{z-\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_x}{W_x} = |\sigma_{z-\min}|.$$

Prema uslovu zadatka je

$$\sigma_{z-\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_{dop} \quad \Rightarrow \quad W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{b h^2}{6} = \frac{h^3}{12}.$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!