

9.1 Savijanje silama prave grede konstantnog poprečnog preseka

U prethodnom poglavlju posmatrali smo deformaciju nosača samo pod dejstvom momenta savijanja (čisto savijanje).

Posmatrajmo sada složeniji slučaj - savijanje silama. Kod savijanja silama, u poprečnim presecima se pored momenta savijanja javljaju i transversalne sile ($T \neq 0$; $M_s \neq 0$; $N = 0$; $M_t = 0$), dok se trag ravni opterećenja, i u ovom slučaju, poklapa sa jednom od glavnih osa.

Za razliku od čistog savijanja kod savijanja silama, poprečni preseki nosača ne ostaju ravni ni upravni na osu nosača. Ovo je posledica pojave smičućih napona koji su neravnomerno raspoređeni po preseku. Međutim, pokazuje se u teoriji elastičnosti, za pravougaone preseke, da kada je visina preseka h velika u odnosu na širinu b , tada se može približno uzeti da preseki ostaju ravni. Pored toga se u otpornosti materijala, pri izvođenju smičućih napona kod savijanja silama polazi od

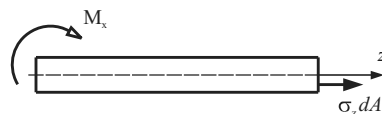
Hipoteza 1 (Žuravskog) ¹ *Pri pravom savijanju grede silama, komponenta smičućeg napona paralelna ravni savijanja može da se smatra konstantnom duž pravih paralelnih sa neutralnom osom, a komponente upravne na ravan savijanja mogu da se zanemare.*

¹Žuravski

9.1.1 Normalni napon

Izraz za normalni napon se na isti način dobija kao i kod čistog savijanja, jer su i pretpostavke iste.

$$\sum_i M_{xi} = M_x - \int_A y \sigma_z dA = 0.$$



Slika 9.1: Normalni napon u poprečnom preseku.

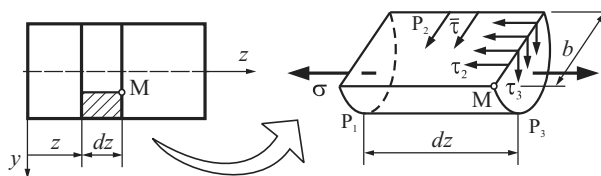
Dalje, pošto smo pretpostavili da i ovde ravni preseki približno ostaju ravni posle deformacije, prema (8.25) i (8.27) dobijamo:

$$\sigma_z = \frac{M_x(z)}{I_x} y. \quad (9.1)$$

9.1.2 Tangencijalni naponi

Za razliku od čistog savijanja, gde je tangencijalni napon bio jednak nuli, u ovom slučaju se on javlja (kao posledica transverzalnih sila!).

Da bismo izveli obrazac za izračunavanje tangencijalnih napona u proizvoljnoj tački M , posmatraćemo deo nosača između dva beskonačno bliska preseka (jedan presek prolazi kroz tačku M). Dalje, presecimo ovaj deo sa ravni koja je paralelna sa osom nosača (kroz tačku M) i posmatrajmo ravnotežu ovako nastalog elementa.



Slika 9.2: Tangencijalni naponi.

Na osnovu stava o konjugovanosti smičućih napona, τ_2 u poprečnom preseku P_2 (površine A_2) i τ_3 u poprečnom preseku P_3 (površine A_3) su jednaki ($\tau_2 = \tau_3 = \tau$). Dalje, prema hipotezi Žuravskog, komponente $\bar{\tau}$ (vidi sl. 9.2) jednake su nuli, a τ su ravnomerno raspoređene duž preseka (ne zavise od x !).

Iz uslova ravnoteže slede jednačine:

$$\sum_i X_i \equiv 0,$$

$$\sum_i Y_i = \int_{A_3} \tau_3 dA_3 - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \int_{A_3} \tau dA_3, \quad (9.2)$$

(po pretpostavci, pored unutrašnjih sila postoje i transversalne sile $T(z)$, u preseku nosača).

$$\sum_i Z_i = - \int_{A_1} \sigma_z dA_1 - \int_{A_2} \tau_2 dA_2 + \int_{A_3} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dA_3 = 0, \quad (9.3)$$

(nema aksijalnih spoljašnjih sila!). U narednim koracima, odredićemo vrednost ovih integrala.

Kako smo pretpostavili da τ ne zavisi od x , a kako je $A_2 = b dz$ (vidi sl. 9.2), to je:

$$\int_{A_2} \tau dA_2 = \tau A_2 = \tau b dz, \quad (9.4)$$

gde je b širina poprečnog preseka u tački M (vidi sl. 9.2).

Prema početnoj pretpostavci, greda je prizmatična ($A_1 = A_3 = A$), pa je:

$$\int_{A_1} \sigma_z dA_1 = \int_{A_3} \sigma_z dA_3 \equiv \int_A \sigma_z dA. \quad (9.5)$$

Kada ove relacije, (9.4) i (9.5), uvrstimo u (9.3) dobijamo

$$\tau b dz = \int_A \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz dA. \quad (9.6)$$

Dalje, prema (9.1), imamo

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{dM_z}{dz} \frac{y}{I_x} = T(z) \frac{y}{I_x}. \quad (9.7)$$

Ovde smo iskoristili vezu između momenata savijanja i transversalne sile (videti (3.5) na str. 39) $dM/dz = T$. Kako smo pretpostavili da je nosač prizmatičan, to A (površina poprečnog preseka elementa ispod tačke M) ne zavisi od z , pa dz može da izađe ispred integrala (relacija (9.6)) i dobijamo:

$$\tau b dz = \frac{T(z) dz}{I_x} \int_A y dA. \quad (9.8)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Integral $S_x = \int_A y dA$ - predstavlja statički moment površi, koja se nalazi ispod tačke M , pa konačno dobijamo:

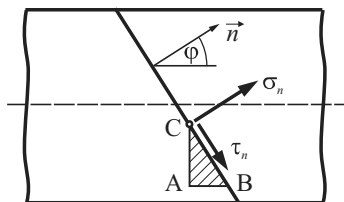
$$\tau = \frac{T(z)S_x}{I_x b}, \quad (9.9)$$

gde je b – širina poprečnog preseka u tački M , kao što je već rečeno..

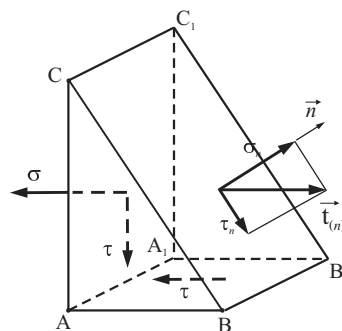
9.1.3 Glavni naponi kod savijanja silama

Prethodno smo izveli izraze za tangencijalni i normalni napon, za slučaj savijanja silama. Ovi izrazi su izvedeni za proizvoljnu tačku (C) poprečnog preseka nosača. Ranije smo videli da napon u nekoj tački tela zavisi od položaja presečne ravni (funkcija od $\mathbf{n}$!).

Odredimo sada vrednost tangencijalnog τ_n i normalnog σ_n napona u tački C , a za ravan čija normala $\mathbf{n}$ gradi ugao φ sa osom nosača z , ako su za ovu tačku poznati naponi σ (9.1) i τ (9.9) u poprečnoj ravni.



Slika 9.3: Proizvoljan presek, pod uglom φ u odnosu na osu nosača.



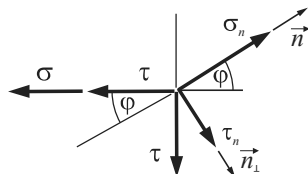
Slika 9.4: 3-D položaj preseka.

Vrednost odgovarajućih napona odredićemo (kao kod ravnog stanja napona) posmatrajući ravnotežu dela $ABCA_1B_1C_1$ (sl. 9.4).

Uslov ravnoteže sila, u vektorskom obliku, je²:

$$\mathbf{t}_{(n)} dP_{BB_1CC_1} + \boldsymbol{\tau} dP_{AA_1CC_1} + \boldsymbol{\tau} dP_{AA_1BB_1} + \boldsymbol{\sigma} dP_{AA_1CC_1} = 0. \quad (9.10)$$

²Ovde ćemo koristiti slovo P za površ/površinu, jer se slovo A često javlja na slikama, pa da ne bi došlo do nesporazuma.



Ako projektujemo ovu vektorsku jednačinu na pravac normale ($\mathbf{n}$) i upravani pravac $\mathbf{n}_\perp$ (leži u tangennoj ravni), dobijamo:

Slika 9.5: Položaj komponentalnih napona.

$$\begin{aligned} \sigma_n dP_{BB_1CC_1} - \tau \sin \varphi dP_{AA_1CC_1} - \tau \cos \varphi dP_{AA_1BB_1} - \\ - \sigma \cos \varphi dP_{AA_1CC_1} = 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} \tau_n dP_{BB_1CC_1} + \tau \cos \varphi dP_{AA_1CC_1} - \tau \sin \varphi dP_{AA_1BB_1} - \\ - \sigma \sin \varphi dP_{AA_1CC_1} = 0. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Međutim, kako možemo da uspostavimo vezu između odgovarajućih površina (vidi sl. 9.4):

$$dP_{AA_1CC_1} = dP_{BB_1CC_1} \cos \varphi, \quad dP_{AA_1BB_1} = dP_{BB_1CC_1} \sin \varphi, \quad dP_{BB_1CC_1} \equiv dP,$$

to jednačine (9.11) i (9.12) postaju:

$$\begin{aligned} \sigma_n dP - \tau \sin \varphi dP \cos \varphi - \tau \cos \varphi dP \sin \varphi - \\ - \sigma \cos \varphi dP \cos \varphi = 0 \mid : dP, \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} \tau_n dP + \tau \cos \varphi dP \cos \varphi - \tau \sin \varphi dP \sin \varphi - \\ - \sigma \sin \varphi dP \cos \varphi = 0 \mid : dP. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Na osnovu poznatih relacija iz trigonometrije (videti str. 63), iz (9.13) i (9.14), dobijamo:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma \cos^2 \varphi + 2\tau \sin \varphi \cos \varphi = \\ &= \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\varphi) + \tau \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sigma \sin \varphi \cos \varphi - \tau (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi - \tau \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (9.16)$$

Na ovaj način dobili smo izraze za normalni (σ_n) i tangencijalni (τ_n) napon za bilo koju presečnu ravan kroz tačku C . Međutim, nas interesuju ekstremne vrednosti ovih veličina.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Već smo ranije rekli da ekstremne vrednosti normalnog napona određuju glavne napone. Pravac glavnih napona je pravac normale na glavnu ravan, ravan u kojoj je tangencijalni napon jednak nuli.

Ekstremnu vrednost normalnog napona (σ_n) dobijamo iz uslova:

$$\frac{d\sigma_n}{d\varphi} = 0,$$

jer se, prema jednačini (9.16), σ_n menja u zavisnosti od φ (σ i τ su poznati!). Ova jednačina postaje:

$$\frac{d\sigma_n}{d\varphi} = -\sigma \sin 2\varphi + 2\tau \cos 2\varphi = 0, \quad (9.17)$$

odakle dobijamo:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (9.18)$$

Ovde smo sa φ_0 označili ugao φ čija vrednost zadovoljava jednačinu (9.18). Odavde dobijamo:

$$2\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau}{\sigma} \right) + k\pi,$$

($\operatorname{tg}\varphi$ je periodična funkcija sa periodom $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) odnosno:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau}{\sigma} \right) + k \frac{\pi}{2}. \quad (9.19)$$

Dakle, rešenje jednačine (9.18) daje dva upravna pravca:

$$\begin{aligned} \varphi_0' &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau}{\sigma} \right), & \text{za } k = 0, \\ \varphi_0'' &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau}{\sigma} \right) + \frac{\pi}{2}, & \text{za } k = 1. \end{aligned}$$

Za ostale k -ove dobijamo iste pravce (zbog periodičnosti).

Da bismo dobili izraze za glavne napone, potrebno je izračunati vrednosti $\sin 2\varphi_0$ i $\cos 2\varphi_0$, pa ih zameniti u (9.15):

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_0 &= \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}} = \frac{2\tau}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \\ \cos 2\varphi_0 &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}} = \frac{\sigma}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Sada (9.15) postaje:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \right) + \tau \frac{2\tau}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right).\end{aligned}\quad (9.21)$$

Uvrstimo relacije (9.20) u (9.16):

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma \frac{2\tau}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} - \tau \frac{\sigma}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = 0. \quad (9.22)$$

Ovim smo pokazali da su tangencijalni naponi u glavnim ravnima jednaki nuli.

Odredimo sada ekstremne vrednosti tangencijalnih napona (9.16):

$$\frac{d\tau_n}{d\varphi} = \sigma \cos 2\varphi + 2\tau \sin \varphi = 0. \quad (9.23)$$

Odavde dobijamo:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_* = -\frac{\sigma}{2\tau}. \quad (9.24)$$

Poredeći relacije (9.18) i (9.24) dobijamo vezu između uglova φ_0 (položaj ekstremnih normalnih napona) i φ_* (položaj ekstremnih tangencijalnih napona):

$$\operatorname{tg} 2\varphi_* = -\operatorname{ctg} 2\varphi_0. \quad (9.25)$$

Kako je $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg}(\varphi + \pi/2)$, za svako φ , to iz (9.25) dobijamo traženu vezu:

$$2\varphi_* = 2\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_* = \varphi_0 + \frac{\pi}{4}. \quad (9.26)$$

Jednačina (9.24) takođe, kao i (9.19), daje dva ortogonalna pravca φ'_* i φ''_* u kojima tangencijalni naponi imaju ekstremne vrednosti. Da bismo odredili te vrednosti, izrazimo prvo $\sin 2\varphi_*$ i $\cos 2\varphi_*$ preko $\operatorname{tg} 2\varphi_*$, a zatim iskoristimo relaciju (9.24):

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi_* &= \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_*}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_*}} = \frac{-\sigma}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \\ \cos 2\varphi_* &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_*}} = \frac{2\tau}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}},\end{aligned}\quad (9.27)$$

pa, uvrstivši u (9.16), dobijamo:

$$\begin{aligned}\tau_{1,2} &= -\frac{\sigma^2}{\pm 2\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} - \frac{2\tau^2}{\pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\end{aligned}\quad (9.28)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Kako je:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

a njihova razlika:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

to relacija (9.28) dobija oblik:

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (9.29)$$

Na kraju, napišimo izraz za intenzitet ukupnog napona u tački C , za presečnu ravan sa normalom $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} t_{(\mathbf{n})} &= \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} = \\ &= \sqrt{(\sigma \cos^2 \varphi + 2\tau \sin \varphi \cos \varphi)^2 + (\sigma \sin \varphi \cos \varphi - \tau \cos 2\varphi)^2}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Veličine i pravce glavnih napona, u proizvoljnoj tački C , možemo da odredimo i grafičkim putem, pomoću Morovog kruga napona.

9.1.4 Elipsa napona

U poglavlju o naponima već smo rekli da svi vektori napona u nekoj tački (C) tela određuju stanje napona, u toj tački. U slučaju ravnog stanja napona geometrijsko mesto krajeva vektora napona $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ određuje elipsu - **elipsu napona**.

Posmatrajmo, u tački C , napon $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$, za presečnu ravan sa normalom $\mathbf{n}$, u odnosu na glavne napone σ_1 i σ_2 . Veza između odgovarajućih napona, u slučaju ravnog stanja napona, data je relacijama (6.15) i (6.16), na str. 105:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi, \\ \tau_n &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (9.31)$$

gde je φ - ugao između glavnog napona σ_1 i normale $\mathbf{n}$. Dalje, ako projektujemo napon, na pravce glavnih napona, dobijamo:

$$\begin{aligned} t_{(\mathbf{n})1} &= \sigma_n \cos \varphi + \tau_n \sin \varphi = \\ &= (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi + (\sigma_1 - \sigma_2) \sin^2 \varphi \cos \varphi \Rightarrow \\ t_{(\mathbf{n})1} &= \sigma_1 \cos \varphi \equiv t_1, \\ t_{(\mathbf{n})2} &= \sigma_n \sin \varphi - \tau_n \cos \varphi = \\ &= \sigma_2 \sin^3 \varphi + \sigma_2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \Rightarrow \\ t_{(\mathbf{n})2} &= \sigma_2 \sin \varphi \equiv t_2. \end{aligned} \quad (9.32)$$

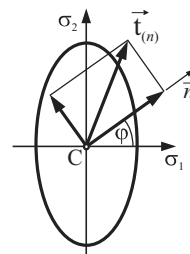
Ove relacije možemo da napišemo i u obliku:

$$\cos \varphi = \frac{t_1}{\sigma_1}, \quad \sin \varphi = \frac{t_2}{\sigma_2}.$$

Dalje, eliminacijom ugla φ iz ovih relacija dobijamo:

$$\left(\frac{t_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\sigma_2}\right)^2 = 1, \quad (9.33)$$

elipsu napona.



Slika 9.6: Elipsa napona.

Otporni moment preseka

Posmatrajući izraz za normalni napon (9.1):

$$\sigma_z = \frac{M_x(z)}{I_x} y, \quad (9.34)$$

vidimo da će, u određenom preseku (M_x i I_x imaju tada neku određenu vrednost), njegova maksimalna vrednost biti u tačkama koje su najudaljenije od neutralne ose ($y_{\max}$):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max}. \quad (9.35)$$

Uvedimo oznaku $y_{\max} = c$, pa (9.35) možemo da napišemo u obliku:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} c = \frac{M_x}{I_x/c} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (9.36)$$

Veličina, definisana izrazom:

$$W_x = \frac{I_x}{c} \quad (9.37)$$

zove se **otporni moment preseka**. Njegova dimenzija je $[(\text{dužina})^3]$.

Analizirajući dalje izraz (9.34) zapažamo da su naponi u blizini neutralne ose veoma mali, pa materijal nije dovoljno iskorišćen. Presek je *ekonomski najpovoljniji* kada je za njegovu zadatu visinu h i površinu P materijal tako raspoređen (oblik preseka) da se dobije *najveći otporni moment*.

Iz definicije (9.37) sledi:

$$W_x = \frac{I_x}{c} = \frac{1}{c} \int_P y^2 dP = \frac{c^2}{c} \int_P \frac{y^2}{c^2} dP = c \int_P \left(\frac{y}{c}\right)^2 dP, \quad (9.38)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

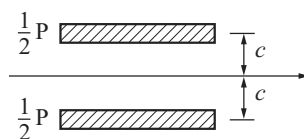
a pošto je $y/c \leq 1$, to dobijamo:

$$W_x = c \int_P \left(\frac{y}{c}\right)^2 dP < c \int_P dP = cP = W_0. \quad (9.39)$$

W_0 - je **idealni otporni moment**. Možemo da ga predstavimo u obliku:

$$W_0 = cP = \frac{1}{2}hP. \quad (9.40)$$

Idealni otporni moment W_0 odgovara zamišljenom preseku, čiji je materijal potpuno iskorišćen (sl. 9.7).



Slika 9.7: Idealni otporni moment – zamišljeni presek.

Međutim, ovakav presek nije moguće napraviti, jer pojasevi moraju da se povežu rebrom, što smanjuje veličinu otpornog momenta.

Veličina, definisana relacijom:

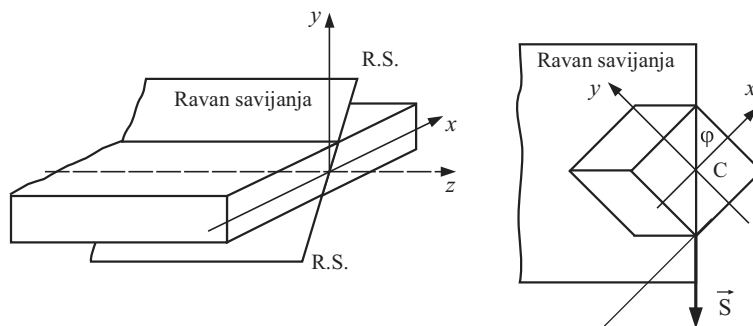
$$\eta = \frac{W}{W_0} < 1, \quad (9.41)$$

zove se **koeficijent iskorišćenja preseka**.

9.1.5 Koso savijanje

U prethodnim poglavljima proučavali smo samo slučajeve kada se trag ravni savijanja (opterećenja) poklapao sa jednom od glavni težišnih osa. Međutim, često u praksi to nije slučaj.

U ovom poglavlju ćemo da posmatramo slučaj kada *trag ravni opterećenja prolazi kroz težište i gradi ugao φ sa glavnom težišnom osom*. Ovakvu vrstu opterećenja nazivamo **koso savijanje**.



Slika 9.8: Ravan savijanja.

Koso savijanje može da bude izazvano samo spregovima i tada ga nazivamo **čisto koso savijanje**, a ako je izazvano silama, govorimo o **kosom savijanju silama**. Suštinska razlika (kao i kod pravog čistog savijanja i savijanja silama) je u tome što se kod čistog kosog savijanja javljaju samo normalni naponi, a kod kosog savijanja silama pored normalnih javljaju se i tangencijalni naponi. Međutim, naponi usled smicanja su mali, pa se obično zanemaruju. Izrazi za izračunavanje normalnih napona i kod čistog kosog i kod kosog savijanja silama su isti, pa ćemo nadalje govoriti samo o kosom savijanju.

Normalni napon kod kosog savijanja

Neka trag ravni savijanja (R.S.) gradi ugao φ sa glavnom težišnom osom x . *Glavne ose orijentišimo tako da trag R.S. prolazi kroz prvi kvadrant.*

Moment savijanja $\mathbf{M}_s$ možemo da razložimo u dve komponente $\mathbf{M}_x$ i $\mathbf{M}_y$, pri čemu je (sl. 9.9):

$$M_x = M_s \sin \varphi, \quad M_y = M_s \cos \varphi. \quad (9.42)$$

Moment $\mathbf{M}_x$ izaziva savijanje u ravni Oyz , pa se usled toga javlja normalni napon, u nekoj tački $A(x, y)$ (kao kod savijanja silama ili čistog savijanja):

$$\sigma'_z = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (9.43)$$

Moment $\mathbf{M}_y$ izaziva savijanje u ravni Oxz , pa imamo normalni napon u tački $A(x, y)$:

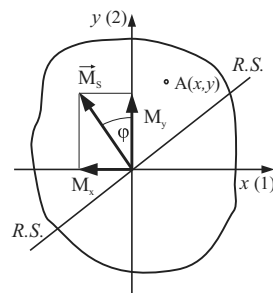
Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

$$\sigma_z'' = \frac{M_y}{I_y} x. \quad (9.44)$$

Ukupan normalni napon u tački $A(x, y)$ jednak je, prema principu superpozicije:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'',$$

ili, prema (9.43), (9.44) i (9.42):



Slika 9.9: Trag ravni savijanja i moment savijanja.

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = M_s \left(\frac{\sin \varphi}{I_x} y + \frac{\cos \varphi}{I_y} x \right).$$

Ako uvedemo oznaku $M_s \equiv M$, konačno dobijamo:

$$\sigma_z = M \left(\frac{\sin \varphi}{I_x} y + \frac{\cos \varphi}{I_y} x \right). \quad (9.45)$$

☞ Napomenimo sledeće: ova jednačina je izvedena pod uslovom da trag R.S. prolazi kroz I kvadrant, pa su $\sin \varphi > 0$ i $\cos \varphi > 0$, kao i da se tačka $A(x, y)$ nalazi u I kvadrantu, pa su njene koordinate pozitivne. Oдавde sledi da će vrednost izraza u zagradi, relacija (9.45), biti pozitivna. Da bi napon imao odgovarajući znak ("+" zatezanje, "-" pritisak), potrebno je da se znak momenta savijanja M uzme sa "+", ako se vlakna u I kvadrantu izdužuju, odnosno sa "-", ako se ova vlakna skraćuju.

Neutralna osa

Već smo rekli da neutralnu osu čine one tačke preseka u kojima je normalni napon jednak nuli, tj.:

$$\sigma = 0.$$

U našem slučaju je:

$$\sigma_z = M \left(\frac{\sin \varphi}{I_x} y + \frac{\cos \varphi}{I_y} x \right) = 0, \quad M \neq 0, \quad (9.46)$$

pa dobijamo:

$$\frac{\sin \varphi}{I_x} y + \frac{\cos \varphi}{I_y} x = 0, \quad (9.47)$$

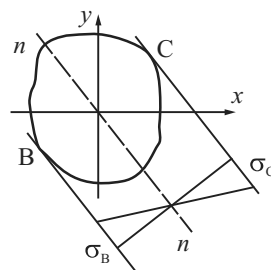
ili konačno:

$$y = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{I_x}{I_y} x = -\left(\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \varphi\right) \cdot x. \quad (9.48)$$

Pravac neutralne ose, određen uglom ψ , je:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{I_x/A}{I_y/A} \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{i_x^2}{i_y^2} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (9.49)$$

Dijagram normalnih napona dat je na slici 9.10. Tačke B i C su najudaljenije tačke u odnosu na $n - n$ osu (leže na tangentama na poprečni presek, koje su paralelne sa $n - n$).

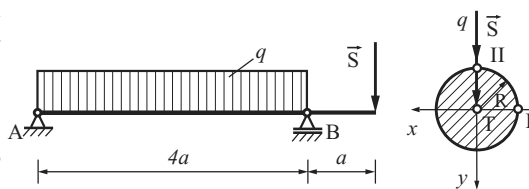


Slika 9.10: σ – dijagram kod kosog savijanja silama.

9.2 Zadaci – savijanje silama

Zad. 9.1.

Odrediti veličine i pravce glavnih napona u tačkama I i II poprečnog preseka grede, u kome se javlja, po apsolutnoj vrednosti, najveći moment savijanja. U zadatku uzeti da je: $q = 20 [kN/m]$, $S = 40 [kN]$, $R = 15 cm$



Slika 9.11: uz zad. 9.1.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!