Гаусов алгоритам и теорема Кронекер-Капели

Систем

Решење система линеарних једначина

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

је свака уређена n-торка бројева $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ таква да када се свако појављивање променљиве x_i замени бројем λ_i, једначине постају једначине које су тачне тј. тачне су једнакости

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 & + & a_{12}\lambda_2 & + & a_{13}\lambda_3 & + & \dots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \\ a_{21}\lambda_1 & + & a_{22}\lambda_2 & + & a_{23}\lambda_3 & + & \dots & + & a_{2n}\lambda_n & = & b_2 \\ a_{31}\lambda_1 & + & a_{32}\lambda_2 & + & a_{33}\lambda_3 & + & \dots & + & a_{3n}\lambda_n & = & b_3 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & = & \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 & + & a_{m2}\lambda_2 & + & a_{m3}\lambda_3 & + & \dots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m. \end{cases}$$

За два система кажемо да су **еквивалентна** уколико су им скупови решења исти.

Гаусов алгоритам

Идеја Гаусовог алгоритма за решавање система линеарних једначина је да се у корацима приближава решењу тако што се систем смањује за по једну једначину и једну непознату. Такав приступ решавању система омогућава следеће тврђење.

Ако се један систем добија тако што се у другом:

-замене места двема једначинама,

-једној једначини се дода друга помножена неким бројем,

-једначина се помножи бројем различитим од нуле,

онда су такви системи еквивалентни.

За поменуте операције на једначинама система кажемо да су елементарне трансформације система.

Конкретан опис Гаусовог алгоритма би био следећи:

У сваком кораку у било којој једначини која нема маркиране променљиве маркирамо било коју променљиву[1], а затим елементарним операцијама елиминишемо управо маркирану променљиву из једначина које немају ниједну маркирану променљиву. Поступак настављамо све док се не деси једна од две ствари:

-јавила се једнакост у којој се (ефективно) не јавља ниједна непозната и сама једнакост је нетачна,

-свака једначина има маркирану променљиву или нема променљиву уопште.

Када завршимо процедуру маркирања и елиминисања, онда даље поступамо овако:

1. Ако се појавила једнакост која не садржи непознате и нетачна је, онда систем нема решења.
2. Ако се јавила једнакост која не садржи непознате и тачна је, она не утиче на даље решавање система, занемарујемо је и настављамо са решавањем система.
3. Ако се није појавила једнакост која не садржи непознате и нетачна је, прелазимо на израчунавање

[1] Не смемо маркирати две променљиве у истој једначини.

вредности непознатих. Ту разликујемо два случаја:

3.а Ако има променљивих које нису маркиране ни у једној једначини, за њих кажемо да су слободне [2] и остале променљиве изражавамо преко њих. Маркиране променљиве изражавамо редом обрнутим од редоследа маркирања, тако да прво изражавамо променљиву коју смо последњу маркирали а последњу изражавамо променљиву коју смо прву маркирали. Уобичајен је и начин да слободним променљивим доделимо слободне параметре $\alpha, \beta, \gamma...$ па су онда све променљиве изражене преко тих параметара.

3.б Ако нема променљиве која није маркирана ни у једној једначини, онда израчунавамо вредности непознатих и то редом обрнутим од редоследа маркирања, тако да прво рачунамо вредност непознате коју смо последњу маркирали а последњу рачунамо вредност непознате коју смо прву маркирали. □

Пример 1: Решити систем

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + t = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 2x + 2y - z + t = -2 \end{cases}$$

Гаусовим алгоритмом.

Решење: У било којој једначини маркирајмо било коју непознату.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 2x + 2y - z + t = -2 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо другу помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо другу помножену бројем -2. Четвртој једначини додајмо другу помножену бројем-1. Добијамо систем:

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ -4x - 3y + z = 1\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо четврту помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо четврту помножену бројем -2. Добијамо систем:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 5x + 2y = 3 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

[2] Њихов број је степен слободе система.

$$\begin{cases} \boxed{x} - y = 2 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 5x + 2y = 3 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

Трећој једначини додајмо прву помножену бројем -5. Добијамо систем:

$$\begin{cases} \boxed{x} - y = 2 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ + 7y = -7 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1\,. \end{cases}$$

Трећу једначину помножимо бројем $\frac{1}{7}$. То је једина једначина која нема маркиране променљиве и има (тачно једну) немаркирану. Маркирајмо ту промељиву.

$$\begin{cases} \boxed{x} - y = 2 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ + \boxed{y} = -1 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

Пошто више нема једначина у којима ниједна непозната није маркирана, стајемо са процесом маркирања и елиминисања и израчунавамо вредности маркираних непознатих. Вредност сваке од непознатих рачунамо из једначине у којој је маркирана. Израчунавање вршимо у обрнутом реду од маркирања. Пошто је променљива y последња маркирана, њену вредност прву рачунамо.

$$\begin{cases} \boxed{x} - y = 2 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 \end{cases}$$

Претпоследња маркирана променљива је x. Њена вредност је она коју следећу рачунамо. Из једначине у којој је она маркирана је прво изразимо

$\boxed{x} - y = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{x} = y + 2$, а затим заменимо y њеном вредношћу.

$\Leftrightarrow \boxed{x} = 1$

$$\begin{cases} 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Трећа непозната од назад коју смо маркирали је z, па је то трећа променљива чију вредност рачунамо.

$-4x - 3y + \boxed{z} = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{z} = 1 + 4x + 3y$

$\Leftrightarrow \boxed{z} = 2$

$$\begin{cases} 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Непознату коју смо прву маркирали последњу рачунамо.

$6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3$

$\Leftrightarrow \boxed{t} = -3 - 6x - 5y + 2z$

$\Leftrightarrow \boxed{t} = 0$

Израчунате су вредности свих непознатих: $\begin{cases} y &= -1 \\ x &= 1 \\ z &= 2 \\ t &= 0\,. \end{cases}$

Скуп решења система је $P = \{(1, -1, 2, 0)\}$. ✓

Гаусовим алгоритмом називамо и поступак који се од описаног разликује само у томе што уместо прве реченице у опису стоји:
,,У сваком кораку у било којој једначини која нема маркиране променљиве маркирамо било коју променљиву, а затим елементарним операцијама елиминишемо управо маркирану променљиву из свих једначина сем из оне у којој је маркирана".

На претходном примеру, то би изгледало овако:
У било којој једначини маркирајмо било коју непознату.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 2x + 2y - z + t = -2 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо другу помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо другу помножену бројем -2. Четвртој једначини додајмо другу помножену бројем-1. Добијамо систем:

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ -4x - 3y + z = 1\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо четврту помножену бројем 2. Другој једначини додајмо четврту помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо четврту помножену бројем -2. Добијамо систем:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x - y + \boxed{t} = -1 \\ 5x + 2y = 3 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

$$\begin{cases} \boxed{x} - y = 2 \\ -2x - y + \boxed{t} = -1 \\ 5x + 2y = 3 \\ -4x - 3y + \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

Другој једначини додајмо прву помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо прву помножену бројем -5. Четвртој једначини додајмо прву помножену бројем 4. Добијамо систем:

$$\begin{cases} \boxed{x} - y = 2 \\ -3y + \boxed{t} = 3 \\ +7y = -7 \\ -7y + \boxed{z} = 9\,. \end{cases}$$

Трећу једначину помножимо бројем $\frac{1}{7}$. То је једина једначина која нема маркиране променљиве и има (тачно једну) немаркирану. Маркирајмо ту промељиву.

$$\begin{cases} \boxed{x} - y = 2 \\ -3y + \boxed{t} = 3 \\ +\boxed{y} = -1 \\ -7y + \boxed{z} = 9 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо трећу. Другој додајмо трећу помножену бројем 3. Четвртој додајмо трећу помножену бројем 7. Добијамо систем:

$$\begin{cases} \boxed{x} = 1 \\ + \boxed{t} = 0 \\ +\boxed{y} = -1 \\ + \boxed{z} = 2\,. \end{cases}$$

Овим поступком смо систем свели на четири једначине облика $a_i x_i = b_i$. У нашем случају су сви кеофицијенти a_i једнаки јединици, зато што смо једначину $7y = -7$ множили бројем $\frac{1}{7}$ у току самог поступка, па даљег рачуна нема. Скуп решења система је $R = \{(1, -1, 2, 0)\}$. ✓

Пример 2: Решити систем

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + t = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 8x + 3y - z + t = 3 \end{cases}$$

Гаусовим алгоритмом.

Решење: У било којој једначини маркирајмо било коју непознату.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 8x + 3y - z + t = 3 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо другу помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо другу помножену бројем -2. Четвртој једначини додајмо другу помножену бројем-1. Добијамо систем:

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ 2x - 2y + z = 6\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо четврту помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо четврту помножену бројем-3. Добијамо систем:

$$\begin{cases} 13x + y = 12 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -13x - y = -12 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

$$\begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -13x - y = -12 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6 \end{cases}$$

Трећој једначини додајмо прву и систем постаје:

$$\begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 0 = 0 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6\,. \end{cases}$$

Трећа једначина не зависи од променљивих (јер се не појављују у њој) и тачна је. Зато је бришемо из система (јер не носи никаква ограничења за променљиве) и систем постаје:

$$\begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6\,. \end{cases}$$

Свака једначина има по једну маркирану променљиву и ту је поступак маркирања и елиминисања променљивих завршен. Остала је једна немаркирана променљива. Она је слободна. Сада је систем:

$$\begin{cases} x = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6 \end{cases} \end{cases}$$

тј.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ \begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6 \end{cases} \end{cases} \qquad ,\alpha \in \mathbb{R}.$$

Прво рачунамо (тј. изражавамо преко слободних) вредност последње маркиране непознате.

$$\begin{cases} x & = & \alpha & & & & & & \\ & & \boxed{y} & & & & & = & 12-13x \\ 6x & + & 5y & - & 2z & + & \boxed{t} & = & -3 \\ 2x & - & 2y & + & \boxed{z} & & & = & 6 \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

тј.

$$\begin{cases} x & = & \alpha & & & & & & \\ & & \boxed{y} & & & & & = & 12-13\alpha \\ 6x & + & 5y & - & 2z & + & \boxed{t} & = & -3 \\ 2x & - & 2y & + & \boxed{z} & & & = & 6 \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

Затим рачунамо вредност претходно маркиране непознате.

$$\begin{cases} x & = & \alpha & & & & & & \\ & & \boxed{y} & & & & & = & 12-13\alpha \\ 6x & + & 5y & - & 2z & + & \boxed{t} & = & -3 \\ & & & & \boxed{z} & & & = & 6-2x+2y \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x & = & \alpha & & & & & & \\ & & \boxed{y} & & & & & = & 12-13\alpha \\ 6x & + & 5y & - & 2z & + & \boxed{t} & = & -3 \\ & & & & \boxed{z} & & & = & 30-28\alpha \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

На крају рачунамо вредност непознате коју смо прву маркирали.

$$\begin{cases} x & = & \alpha & & & & & & \\ & & \boxed{y} & & & & & = & 12-13\alpha \\ & & & & & & \boxed{t} & = & -3-6x-5y+2z \\ & & & & \boxed{z} & & & = & 30-28\alpha \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x & = & \alpha & & & & & & \\ & & \boxed{y} & & & & & = & 12-13\alpha \\ & & & & & & \boxed{t} & = & 3\alpha-3 \\ & & & & \boxed{z} & & & = & 30-28\alpha \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

Коначно је

$$\begin{cases} x & = & \alpha \\ y & = & 12-13\alpha \\ t & = & 3\alpha-3 \\ z & = & 30-28\alpha \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

па је скуп решења система $R = \{(\alpha, 12-13\alpha, 30-28\alpha, 3\alpha-3) | \alpha \in \mathbb{R}\}$. ✓

Наравно, и у овом случају смо могли користити измењени Гаусов алгоритам:
У било којој једначини маркирајмо било коју непознату.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 8x + 3y - z + t = 3 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо другу помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо другу помножену бројем -2. Четвртој једначини додајмо другу помножену бројем-1. Добијамо систем:

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ 2x - 2y + z = 6\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо четврту помножену бројем 2. Другој једначини додајмо четврту помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо четврту помножену бројем-3. Добијамо систем:

$$\begin{cases} 13x + y = 12 \\ 10x + y + \boxed{t} = 9 \\ -13x - y = -12 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6\,. \end{cases}$$

У било којој једначини маркирајмо било коју непознату која не садржи неку раније маркирану непознату.

$$\begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ 10x + y + \boxed{t} = 9 \\ -13x - y = -12 \\ 2x - 2y + \boxed{z} = 6 \end{cases}$$

Другој једначини додајмо прву помножену бројем -1, трећој додајмо прву и четвртој додајмо прву помножену бројем 2 и систем постаје:

$$\begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ -3x + \boxed{t} = -3 \\ 0 = 0 \\ 28x + \boxed{z} = 30\,. \end{cases}$$

Трећа једначина постаје једнакост која је тачна независно од вредности променљивих па систем постаје:

$$\begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ -3x + \boxed{t} = -3 \\ 28x + \boxed{z} = 30\,. \end{cases}$$

Свака једначина у себи има маркирану променљиву па је поступак маркирања и елиминисања променљивих завршен. Променљива која није маркирана ни у једној једначини је слободна.

$$\begin{cases} x = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x + \boxed{y} = 12 \\ -3x + \boxed{t} = -3 \\ 28x + \boxed{z} = 30 \end{cases}$$

тј.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ 13x + \boxed{y} = 12 \\ -3x + \boxed{t} = -3 \\ 28x + \boxed{z} = 30 \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Изразимо маркиране променљиве из једначина у којима су маркиране.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ 13x + \boxed{y} = 12 - 13x \\ -3x + \boxed{t} = 3x - 3 \\ 28x + \boxed{z} = 30 - 28x \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

тј.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ 13x + \boxed{y} = 12 - 13\alpha \\ -3x + \boxed{t} = 3\alpha - 3 \\ 28x + \boxed{z} = 30 - 28\alpha \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Наравно, опет добијамо

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 12 - 13\alpha \\ t = 3\alpha - 3 \\ z = 30 - 28\alpha \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

па је скуп решења система $R = \{(\alpha, 12 - 13\alpha, 30 - 28\alpha, 3\alpha - 3) | \alpha \in \mathbb{R}\}$. ✓

Пример 3: Решити систем

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + t = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 6x + 5y - 2z + t = 3 \end{cases}$$

Гаусовим алгоритмом.

Решење: У било којој једначини маркирајмо било коју непознату.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 2z - 2t = 6 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ 5x + 3y - z + 2t = 0 \\ 6x + 5y - 2z + t = 3 \end{cases}$$

Првој једначини додајмо другу помножену бројем 2. Трећој једначини додајмо другу помножену бројем -2. Четвртој једначини додајмо другу помножену бројем-1. Добијамо систем:

$$\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 0 \\ 6x + 5y - 2z + \boxed{t} = -3 \\ -7x - 7y + 3z = 6 \\ 0 = 6\,. \end{cases}$$

Последња једначина је постала једнакост која није тачна, па самим тим није тачна ни за један избор вредности променљивих, а то даље значи да нема избора вредности непознатих за које је свака једнакост тачна, тј. систем нема решења или скуп свих решења је $R = \emptyset$. ✓

Ранг матрице

Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ чине главну дијагоналу матрице $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

• Ако су сви елементи неке врсте (колоне) једнаки нули, онда за њу кажемо да је нула врста (колона).

• Матрица A је <u>степенаста</u> ако су испуњени следећи услови:

1. Испод сваке нула врсте је нула врста;

2. Ако нека врста није нула врста и први елемент различит од нуле у тој врсти је у колони k, онда су у следећој врсти у првих k колона сви елементи једнаки нули:

Ако $a_{i1} = a_{i2} = \ldots a_{i(k-1)} = 0$ и $a_{ik} \neq 0$, онда $a_{(i+1)1} = a_{(i+1)2} = \ldots a_{(i+1)k} = 0$.

• Матрица A је <u>јако степенаста</u> ако су испуњени следећи услови:

1. Испод сваке нула врсте је нула врста;

2. Ако је $a_{ii} = 0$, онда су сви елементи i-те врсте једнаки нули, тј. ако је неки елемент главне дијагонале једнак нули, онда су сви елементи његове врсте једнаки нули.

3. Сви елементи испод главне дијагонале су једнаки нули.

• Матрица A је <u>дијагонална</u> ако су сви елементи ван њене главне дијагонале једнаки нули, тј. ако је $a_{ij} = 0$ кад год је $i \neq j$.

Напомена: Најчешће се појмови главна дијагонала и дијагоналана матрица дефинишу само за квадратне матрице. За потребе рачунања ранга, згодно је те дефиниције проширити на матрице било ког формата, што је овде учињено.

Особине:

• Дијагонална матрица је јако степенаста матрица.

• Јако степенаста матрица је степенаста матрица.

• Свака матрица се елементарним трансформацијама може довести до јако степенасте матрице.

• Свака матрица се елементарним трансформацијама на врстама може довести до степенасте матрице.

Примери: Следеће матрице су јако степенасте:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{-2} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{3} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{5} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{6} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{7} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{8} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{9} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Следеће матрице су степенасте и нису јако степенасте:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{-2} & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 2 & 7 & 2 & 7 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{8} & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{0} & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 3 & 4 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Следеће матрице нису степенасте:

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

При рачунању ранга матрице користимо следеће чињенице.

I чињеница: Ранг матрице и њој транспоноване су једнаки.

II чињеница: Ранг матрице се не мења уколико на врстама и колонама матрице вршимо неке од елементарних трансформација:

1. замене места двема врстама (колонама),
2. множење врсте (колоне) бројем различитим од нуле,
3. додавање једне врсте (колоне) помножене неким бројем другој врсти (колони).

III чињеница:

1. Ранг јако степенасте матрице, матрице чији транспонат је јако степенаста матрица (а тиме и дијагоналне матрице) је једнак броју елемената главне дијагонале који су различити од нуле. То је истовремено број ненула врста.
2. Ранг степенасте матрице[3], матрице чији транспонат је степенаста матрица је једнак броју ненула врста.

[3] а тиме и јако степенасте

Користећи елементарне трансформације, можемо од почетне матрице направити јако степенасту матрицу. Тада је за рачунање ранга довољно пребројати елементе главне дијагонале који су различити од нуле. Такође, користећи елементарне трансформације на врстама, можемо од почетне матрице направити степенасту матрицу. Тада је за рачунање ранга довољно пребројати ненула врсте матрице.

Дакле, поступак рачунања ранга матрице би могао да буде следећи:

• Маркирамо било који елемент различит од нуле. Ако је то елемент a_{ij} онда заменимо места i-тој и првој врсти и j-тој и првој колони. На тај начин је први маркиран елемент постао први елемент главне дијагонале. Елементарним трансформацијама од елемената испод маркираног направимо нуле.

• Маркирамо било који елемент различит од нуле у било којој врсти која нема већ маркиран елемент. Заменимо врсту у којој се он налази са другом врстом и колону у којој се он налази са другом колоном. На тај начин други маркирани елемент постаје други елемент главне дијагонале. Елементарним трансформацијама од елемената испод маркираног направимо нуле.

• Маркирамо било који елемент различит од нуле у било којој врсти која нема већ маркиран елемент. Заменимо врсту у којој се он налази са трећом врстом и колону у којој се он налази са трећом колоном. На тај начин трећи маркирани елемент постаје трећи елемент главне дијагонале. Елементарним трансформацијама од елемената испод маркираног направимо нуле.

• Поступак настављамо док год постоје врсте у којима нема маркираних елемената и у њима елементи различити од нуле. На крају поступка је ранг матрице једнак броју елемената главне дијагонале који су различити од нуле.

Пример 1: Израчунајмо ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење: Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој врсти и било којој колони.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Заменимо врсту у којој се налази са првом врстом и колону у којој се налази са првом колоном. Рецимо да прво заменимо колоне.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ \boxed{-1} & 2 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & -10 & -16 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

Затим заменимо врсту у којој се налази са првом врстом.

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & -10 & -16 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

Сада правимо нуле испод маркираног елемента. Прву врсту помножену бројем 2 додајмо другој, помножену бројем 4 додајмо трећој и помножену бројем 3 додајмо четвртој.

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 12 & 9 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој врсти која не садржи раније маркиран елемент.

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 6 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 12 & 9 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Заменимо места четвртој и другој колони.

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & 9 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Сада правимо нуле испод маркираног елемента. Другу врсту помножену бројем 2 додајмо трећој и помножену бројем -3 додајмо четвртој.

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Поново маркирајмо било који елемент било које врсте која нема раније маркирани елемент.

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пошто испод последње маркираног елемента нема елемената различитих од нуле и пошто нема врста које немају маркирани елемент и истовремено имају елемент различит од нуле, овим је посао маркирања зарвшен. Ранг матрице је број елемената главне дијагонале различитих од нуле.

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \qquad \checkmark$$

Напомена: На крају овог поступка, број елемената главне дијагонале који су различити од нуле је једнак броју маркираних елемената у матрици. Дакле, у опису поступка је могло да стоји ,,ранг матрице је број маркираних елемената у матрици" уместо ,,ранг матрице је број елемената главне дијагонале који су различити од нуле"! Како се број маркираних елемената не мења заменом места врстама и колонама, не морамо их доводити на место главне дијагонале, док год држимо у глави да је ,,правити нуле испод маркираног елемента" (у оригиналном поступку) исто што и ,,правити нуле у пресецима колоне маркираног елемента и оних врста које немају маркирани елемент".

Дакле, поступак рачунања ранга матрице би могао да буде следећи:

• Маркирамо било који елемент различит од нуле у било којој врсти која нема раније маркиран елемент.

• Елементарним трансформацијама направимо нуле у колони маркираног елемента али само на местима које припадају врстама које немају маркирани елемент.

• Наставимо поступак док год постоје врсте у којима нема маркираних елемената и у њима елементи различити од нуле. На крају поступка, ранг матрице је једнак броју маркираних елемената.

Претходни пример би изгледао овако.

Пример 1(на други начин): Израчунајмо ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење: Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој врсти и колони.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Елементарним трансформацијама направимо нуле у пресецима колоне маркираног елемента и врстама које немају маркирани елемент.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ -6 & 6 & -2 & -4 & 0 \\ 9 & 12 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој врсти која не садржи маркиране елементе.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & \boxed{2} & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ -6 & 6 & -2 & -4 & 0 \\ 9 & 12 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Елементарним трансформацијама направимо нуле у пресецима колоне маркираног елемента и врстама које немају маркирани елемент.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & \boxed{2} & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 0 & 14 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој врсти која не садржи маркиране елементе.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & \boxed{2} & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 0 & 14 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ранг матрице је број маркираних елемената.

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & \boxed{2} & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 0 & 14 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \qquad \checkmark$$

Напомена: Све што смо радили на врстама, важи и за колоне.

Ево илустрације:

Пример 1(на трећи начин): Израчунајмо ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење: Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој врсти и колони.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Елементарним трансформацијама направимо нуле у пресецима врсте маркираног елемента и колонама које немају маркирани елемент.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ -6 & 6 & -2 & -4 & 4 \\ 9 & 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој колони која не садржи маркиране елементе.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ -6 & 6 & \boxed{-2} & -4 & 4 \\ 9 & 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Елементарним трансформацијама направимо нуле у пресецима врсте маркираног елемента и колонама које немају маркирани елемент.

$$\begin{bmatrix} -6 & 13 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 4 \\ -18 & 39 & 9 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

Маркирајмо било који елемент различит од нуле у било којој колони која не садржи маркиране елементе.

$$\begin{bmatrix} -6 & 13 & 3 & \boxed{-4} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 4 \\ -18 & 39 & 9 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

Елементарним трансформацијама направимо нуле у пресецима врсте маркираног елемента и колонама које немају маркирани елемент.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & \boxed{-4} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

Ранг матрице је број маркираних елемената.

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -10 & -16 & 4 \\ 15 & 6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & \boxed{-4} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -12 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3 \qquad \checkmark$$

Напомена: При трансформацији мартице дозвољено је мешати елементарне операције на врстам и елементарне операције на колонама, радити мало на врстама, мало на колонама.

Теорема Кронекер-Капели

Примена теореме Кронекера и Капелија на систем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

подразумева рачунање ранга двеју матрица:

- ранг матрице система $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \text{и} \end{bmatrix}$

- ранг матрице система и слободних чланова $A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

и при рачунању рангова дозвољено је чинити елементарне трансформације и на врстама и на колонама.

Напомена 1: Уколико се при рачуну врше само трансформације на врстама, онда се добија матрица која одговара систему који би се добио да се на почетни систем примене тачно оне трансформације на једначинама које смо при рачуну ранга матрице применили на врстама. Зато је пожељно вршити само елементарне трансформације на врстама.

Напомена 2: Све елементарне операције на врстама које извршимо кад рачунамо ранг матрице A могу да послуже као почетни део елементарних операција на врстама које чинимо да бисмо израчунали ранг матрице $A|B$.

Напомена 3: Имајући у виду претходне две напомене, ради уштеде, истовремено рачунамо ранг матрица A и $A|B$ тако што трансформишемо матрицу $A_P = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ строго водећи рачуна о следеће две ствари:

-радимо само са врстама (да бисмо касније могли да наставимо Гаусов алгоритам)

-док год постоје елементи матрице A (лево од вертикалне црте; сви елементи осим елемената последње колоне) које можемо маркирати, њих маркирамо.

Тада је ранг матрице A једнак броју маркираних елемената лево од вертикалне црте, а ранг матрице $A|B$ једнак броју свих маркираних елемената матрице A_P.

Пример 1: Користећи Кронекер-Капелијеву теорему дискутовати број решења система

$$\begin{cases} x + y - pz + t = 0 \\ x + y + 2z + pt = 1 \\ 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

у зависности од реалног параметра p. У случајевима кад систем има решења, наћи их.

Решење: Матрица A_P за задати систем је $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -p & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & p & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Елементе последње колоне не маркирамо док постоје елементи осталих колона које можемо маркирати. Елементи a_{13} и a_{24} зависе од вредности параметра p. Како ми смемо да маркирамо само елементе који нису једнаки нули, да бисмо избегли дискусију за које вредности параметра p су наведени елементи различити, а за које су једнаки нули, маркираћемо елементе који не зависе од параметра p, док год таквих елемената различитих од нуле има (лево од вертикалне црте). Да бисмо имали што једноставнији рачун, пожељно је бирати елемент из оних колона и врста у којима се не појављују елементи чија вредност зависи од вредности парамера p, кад год таквих елемената има (лево од вертикалне црте). У нашем случају, то су елементи прве две колоне и последње две врсте. Ако изаберемо елемент a_{32} или a_{43} имаћемо најмање рачуна. Рецимо да маркирамо елемент a_{32}.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -p & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & p & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Елементарним трансформацијама на врстама направимо нуле у колони маркираног елемента.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -p-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & p-2 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Једини елемент у чијој врсти и колони нема елемената чије вредности зависе од параметра p је a_{41}. Маркирајмо га.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -p-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & p-2 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Елементарним трансформацијама на врстама направимо нуле у колони маркираног елемента.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p-1 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Једини елемент (лево од вертикалне црте) чија вредности не зависи од параметра p је a_{23}. Маркирајмо га.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & p-1 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Другу једначину помножену бројем $p+1$ додајмо првој.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & (p+1)(p-1) & p+1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & p-1 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Остала је једна врста у којој нисмо маркирали ни један елемент. Прва три елемнта те врсте су нуле, тако да је једини кандидат за маркирање лево од црте (тј. који припада матрици A) елемент a_{14}. Њега смемо да маркирамо само у оним случајевима када је различит од нуле.

$$a_{14} = 0 \Leftrightarrow (p-1)(p+1) = 0 \Leftrightarrow (p = 1 \text{ или } p = -1)$$

Зато разликујемо три случаја: $p = 1, \quad p = -1 \quad$ и $\quad p \notin \{-1, 1\}$.

I случај $p = 1$:

За ову вредност параметра p, матрица коју смо до сад трансформисали постаје

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Само прва врста матрице нема маркиране елементе, а они елементи који одговарају матрици A (елементи лево од црте) су нуле, па за маркирање једино преостаје елемент a_{15}.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Ранг матрице A је број маркираних елемената лево од црте, дакле $\text{rang}(A) = 3$, а ранг матрице A_P је број маркираних елемената у целој матрици, дакле $\text{rang}(A_P) = 4$. По Кронекер-Капелијевој теореми, зато што рангови матрица нису једнаки, систем нема решења.

II случај $p = -1$:

За ову вредност параметра p, матрица коју смо до сад трансформисали постаје

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Сви елементи прве врсте су једнаки нули, па немамо шта да маркирамо. Ранг матрице A је број маркираних елемената лево од црте, дакле $\text{rang}(A) = 3$, а ранг матрице A_P је број маркираних елемената у целој матрици, дакле $\text{rang}(A_P) = 3$. По Кронекер-Капелијевој теореми, зато што су рангови матрица једнаки, систем има решења.

Пошто је број непознатих већи од ранга матрице A_P, систем има бесконачно много решења. Степен слободе система је $n - \operatorname{rang}(A_P) = 1$. Решимо систем. С обзиром да смо користили једино трансформације на врстама, почетни систем је еквивалентан оном коме је матрица

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Дакле, почетни систем је еквивалентан систему

$$\begin{cases} & & & 0 & = & 0 \\ & & +\boxed{z} & -2t & = & 1 \\ 2x & +\boxed{y} & +z & +2t & = & 0 \\ \boxed{-x} & & & -t & = & 0\,. \end{cases}$$

Променљива t је слободна.

$$\begin{cases} t = \alpha \end{cases} \quad ,\alpha \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} & & +\boxed{z} & -2t & = & 1 \\ 2x & +\boxed{y} & +z & +2t & = & 0 \\ \boxed{-x} & & & -t & = & 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} t = \alpha \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \quad ,\alpha \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} 2x & +\boxed{y} & +z & +2t & = & 0 \\ \boxed{-x} & & & -t & = & 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} t = \alpha \\ z = 2\alpha + 1 \\ x = -\alpha \end{cases} \quad ,\alpha \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} 2x & +\boxed{y} & +z & +2t & = & 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} t = \alpha \\ z = 2\alpha + 1 \\ x = -\alpha \\ y = -2\alpha - 1 \end{cases} \quad ,\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$R = \{(-\alpha, -2\alpha - 1, 2\alpha + 1, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

III случај $p \notin \{-1, 1\}$:

Елемент a_{14} матрице

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & (p+1)(p-1) & p+1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & p-1 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

није нула па смемо да га маркирамо.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \boxed{(p+1)(p-1)} & p+1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & p-1 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Ранг матрице A је број маркираних елемената лево од црте, дакле $\operatorname{rang}(A) = 4$ и ранг матрице A_P је број маркираних елемената у целој матрици, дакле $\operatorname{rang}(A_P) = 4$. По Кронекер-Капелијевој теореми, зато што су рангови матрица једнаки, систем има решења. Пошто је број непознатих једнак рангу матрице A_P, систем има јединствено решење. Решимо систем. С обзиром да су користили једино трансформације на врстама, почетни систем је еквивалентан оном коме је матрица

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \boxed{(p+1)(p-1)} & p+1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & p-1 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Дакле, почетни систем је еквивалентан систему

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & \boxed{(p+1)(p-1)t} & = & p+1 \\ & & \boxed{+z} & +(p-1)t & = & 1 \\ 2x & \boxed{+y} & +z & +2t & = & 0 \\ \boxed{-x} & & & -t & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Израчунајмо вредности маркираних променљивих (у реду обрнутом од реда маркирања).

$$\left\{ t = \tfrac{1}{p-1} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & \boxed{+z} & +(p-1)t & = & 1 \\ 2x & \boxed{+y} & +z & +2t & = & 0 \\ \boxed{-x} & & & -t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} t & = & \frac{1}{p-1} \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & \boxed{+y} & +z & +2t & = & 0 \\ \boxed{-x} & & & -t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} t & = & \frac{1}{p-1} \\ z & = & 0 \\ x & = & -\frac{1}{p-1} \end{array}\right.$$

$$\left\{ 2x \quad \boxed{+y} \quad +z \quad +2t \quad = \quad 0 \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} t &= \frac{1}{p-1} \\ z &= 0 \\ x &= -\frac{1}{p-1} \\ y &= 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$R = \left\{ \left(-\frac{1}{p-1}, 0, 0, \frac{1}{p-1} \right) \right\}.$$