RANG MATRICE

Sa $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ćemo označavati skup svih realnih matrica[1] sa m vrsta i n kolona. U $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sabiranje matrica i množenje matrice realnim brojem definišemo na sledeći način:

- $$\begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} & \dots & a_{(1,n)} \\ a_{(2,1)} & a_{(2,2)} & \dots & a_{(2,n)} \\ \vdots & & & \\ a_{(m,1)} & a_{(m,2)} & \dots & a_{(m,n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{(1,1)} & b_{(1,2)} & \dots & b_{(1,n)} \\ b_{(2,1)} & b_{(2,2)} & \dots & b_{(2,n)} \\ \vdots & & & \\ b_{(m,1)} & b_{(m,2)} & \dots & b_{(m,n)} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{(1,1)}+b_{(1,1)} & a_{(1,2)}+b_{(1,2)} & \dots & a_{(1,n)}+b_{(1,n)} \\ a_{(2,1)}+b_{(2,1)} & a_{(2,2)}+b_{(2,2)} & \dots & a_{(2,n)}+b_{(2,n)} \\ \vdots & & & \\ a_{(m,1)}+b_{(m,1)} & a_{(m,2)}+b_{(m,2)} & \dots & a_{(m,n)}+b_{(m,n)} \end{bmatrix}$$
- $$\lambda \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} & \dots & a_{(1,n)} \\ a_{(2,1)} & a_{(2,2)} & \dots & a_{(2,n)} \\ \vdots & & & \\ a_{(m,1)} & a_{(m,2)} & \dots & a_{(m,n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{(1,1)} & \lambda a_{(1,2)} & \dots & \lambda a_{(1,n)} \\ \lambda a_{(2,1)} & \lambda a_{(2,2)} & \dots & \lambda a_{(2,n)} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{(m,1)} & \lambda a_{(m,2)} & \dots & \lambda a_{(m,n)} \end{bmatrix}$$

Primer 1. $2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 19 \\ 24 \end{bmatrix}.$

Definicija 1. *Linearna kombinacija* kolona $K_1, \dots, K_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ je svaki izraz oblika

$$\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_n K_n,$$

pri čemu su koeficijenti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ proizvoljni realni brojevi. □

Linearne kombinacije kolona možemo koristiti za tzv vektorsku reprezentaciju sistema linearnih jednačina. Na primer, sistem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= -3 \end{aligned}$$

ekvivalentan je jednačini

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Pored vektorske reprezentacije sistema linearnih jednačina koristićemo i tzv matričnu reprezentaciju sistema linearnih jednačina. Na primer, prethodnom sistemu odgovara matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ -1 & -1 & 4 & | & 0 \\ 5 & 3 & 8 & | & -3 \end{bmatrix},$$

[1] komponente su im realni brojevi

koju još zovemo i proširenom matricom sistema. Ako izostavimo poslednju kolonu[2], dobijamo matricu koju zovemo i matricom sistema. Radi preglednosti se u proširenoj matrici sistema kolona slobodnih članova odvaja od matrice sistema isprekidanom linijom.

0.1. **Matrična reprezentacija Gausovog algoritma.** Kroz konkretan primer ćemo pokazati kako se rešavanje sistema linearnih jednačina Gausovim algoritmom može predstaviti kao niz elementarnih operacija nad vrstama proširene matrice sistema.

Pođimo od sistema

$$\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 & = & -3 \end{array}$$

i njegove proširene matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & -3 \end{array}\right].$$

U prvom koraku markirajmo x_1 u drugoj jednačini i eliminišimo ga iz preostale dve. Ovo se izvodi na taj način što ćemo prvoj jednačini dodati drugu pomnoženu sa 2 i što ćemo trećoj jednačini dodati drugu pomnoženu sa 5.

Paralelno sa ovim ćemo transformisati proširenu matricu sistema primenjujući matrične modifikacije prethodnih elementarnih operacija: prvoj vrsti ćemo dodati drugu vrstu pomnoženu sa 2, a trećoj vrsti ćemo dodati drugu vrstu pomnoženu sa 5. Posle primene naznačenih transformacija dobijamo

$$\begin{array}{rcr} -x_2 + 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ -2x_2 + 28x_3 & = & -3 \end{array} \text{ i } \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 28 & -3 \end{array}\right].$$

Primetimo da se na ovaj način polazna proširena matrica sistema transformisala u proširenu matricu novog sistema.

U drugom koraku markirajmo x_2 u prvoj jednačini novog sistema i eliminišimo ga iz preostalih jednačina novog sistema. Ovo radimo tako što drugoj jednačini dodamo prvu pomnoženu sa -1 i što trećoj jednačini dodamo prvu pomnoženu sa -2.

Paralelno sa ovim ćemo transformisati novu proširenu matricu sistema primenjujući matrične modifikacije prethodnih operacija: drugoj vrsti dodamo prvu pomnoženu sa -1, a trećoj vrsti dodamo prvu pomnoženu sa -2. Posle primene navedenih transformacija dobijamo

$$\begin{array}{rcr} -x_2 + 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 - 3x_3 & = & -2 \\ 14x_3 & = & -7 \end{array} \text{ i } \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -7 \end{array}\right].$$

Množenjem poslednje jednačine i poslednje vrste sa $\frac{1}{14}$ dobijamo

$$\begin{array}{rcr} -x_2 + 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 - 3x_3 & = & -2 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \text{ i } \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

[2]kolona slobodnih članova

Baš kao i u prvom koraku, elementarne transformacije nad vrstama su kao rezultat proizvele matricu koja je proširena matrica novog sistema.

U poslednjem koraku markirajmo x_3 u trećoj jednačini i eliminišimo ga iz preostalih jednačina. Paralelno sa ovim izvršimo odgovarajuće transformacije na proširenoj matrici sistema. Dobijamo

$$\begin{array}{rcl} -x_2 & = & \frac{11}{2} \\ -x_1 & = & -\frac{7}{2} \\ x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \quad \text{i} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & \frac{11}{2} \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Najzad, množenjem prve i druge jednačine, odnosno prve i druge vrste sa -1, dobijamo

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & -\frac{11}{2} \\ x_1 & = & \frac{7}{2} \\ x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \quad \text{i} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Matrični tok rešavanja prethodnog sistema predstavljamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & -3 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 28 & -3 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -7 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & \frac{11}{2} \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Ako sa V_i označimo tekuću i-tu vrstu, onda smo prilikom rešavanja redom vršili sledeće elementarne transformacije:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} V_1 + 2V_2 \\ V_2 \\ V_3 + 5V_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 - V_1 \\ V_3 - 2V_1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \frac{1}{14}V_3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} V_1 - 7V_3 \\ V_2 + 3V_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -V_1 \\ -V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

0.2. **Definicija ranga matrice.**

Definicija 2. Kolone $K_1, \ldots, K_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ su *linearno nezavisne* ako ni jedna od njih nije linearna kombinacija preostalih. Ekvivalentno, kolone $K_1, \ldots, K_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ su linearno nezavisne ako je

$$\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_n K_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

jedino u slučaju kada je $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. U suprotnom za kolone $K_1, \ldots, K_n$ kažemo da su *linearno zavisne*. □

Primer 2. Ispitajmo linearnu nezavisnot kolona $K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Mi zapravo ispitujemo koliko ima trojki realnih brojeva (x, y, z) takvih da je

$$xK_1 + yK_2 + zK_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Kako je jednačina (1) ekvivalentna jednačini

$$\begin{bmatrix} x \\ x + 3y \\ 2x + y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i kako je ova jednačina ekvivalentna homogenom sistemu

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x + 3y &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

čije je jedinstveno rešenje $x = y = z = 0$, zaključujemo da su kolone K_1, K_2 i K_3 linearno nezavisne. □

Definicija 3 (Rang matrice)**.** Rang matrice definišemo kao broj njenih linearno nezavisnih kolona. □

Iz definicije ranga matrice neposredno sledi da rang neke matrice ne može biti veći od broja njenih kolona.

Primer 3. Na osnovu prethodnog primera sledi da je rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ jednak 3, što je ujedno i broj njenih kolona.

Primer 4. Odredimo rang matrice

$$[K_1\ K_2\ K_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$0K_1 + K_2 + 0K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kolone K_1, K_2 i K_3 su linearno zavisne, pa je rang date matrice manji od 3. Ispitajmo linearnu nezavisnost kolona K_1 i K_3. Jednačina

$$xK_1 + yK_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ekvivalentna homogenom sistemu

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

čije je jedinstveno rešenje $x = y = 0$, odakle sledi da su kolone K_1 i K_3 linearno nezavisne, pa je rang date matrice veći ili jednak od 2. Kako smo na početku pokazali da je rang strogo manji od 3, dobijamo da je vrednost ranga jednaka 2. □

Napomena. Na osnovu prethodnog primera vidimo da kolone čije su sve komponente jednake 0 ne utiču na rang.

0.3. **Osobine ranga matrice.**

Teorema 1. Rang matrice se ne menja primenom elementarnih operacija na vrstama i kolonama.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da se rang čuva elementarnim operacijama nad vrstama, a potom da se rang čuva i elementarnim operacijama nad kolonama. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & \cdots & a_{(1,n)} \\ \vdots & & \\ a_{(m,1)} & \cdots & a_{(m,n)} \end{bmatrix}.$$

Kako je jednačina

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{(1,1)} \\ \vdots \\ a_{(m,1)} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{(1,n)} \\ \vdots \\ a_{(m,n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ekvivalentna homogenom sistemu

$$\begin{aligned} a_{(1,1)}x_1 + \cdots + a_{(1,n)}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{(m,1)}x_1 + \cdots + a_{(m,n)}x_n &= 0 \end{aligned},$$

elementarnim operacijama nad vrstama se ne menja skup rešenja ovog sistema, odakle sledi da elementarne operacije nad vrstama ne menjaju rang.

Preostaje da dokažemo da elementarne operacije nad kolonama ne menjaju rang. U tom cilju je dovoljno da pokažemo sledeće: ako je matrica $[K_1' \ \dots \ K_n']$ dobijena iz matrice $[K_1 \ \dots \ K_n]$ primenom neke od elementarnih operacija nad kolonama, onda kolone $K_1, \dots, K_n$ i $K_1', \dots, K_n'$ generišu iste linearne kombinacije. U slučaju permutacije kolona ovo je trivijalno tačno, pa ćemo dokaz izvesti samo u slučaju preostale dve elementarne operacije nad kolonama.

1 : $[K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n] \sim [\lambda K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$, $\lambda \neq 0$. Tada za proizvoljne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ važi

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_n K_n = \frac{\lambda_1}{\lambda}(\lambda K_1) + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_n K_n,$$

odakle sledi da kolone $K_1, K_2, \dots, K_n$ i $\lambda K_1, K_2, \dots, K_n$ imaju iste linearne kombinacije.

2 : $[K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n] \sim [K_1 + \lambda K_2 \ K_2 \ \dots \ K_n]$, $\lambda \neq 0$. Tada za proizvoljne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ važi

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_n K_n = \lambda_1(K_1 + \lambda K_2) + (\lambda_2 - \lambda_1 \lambda) K_2 + \cdots + \lambda_n K_n,$$

odakle sledi da kolone $K_1, K_2, \dots, K_n$ i $K_1 + \lambda K_2, K_2, \dots, K_n$ imaju iste linearne kombinacije. □

Primer 5. Odredimo rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Kako su poslednje tri kolone jednake $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, njih ne uzimamo u obzir prilikom određivanja ranga. Ostaje da ispitamo linearnu nezavisnost prve dve kolone K_1 i K_2. Primetimo da je jednačina

$$xK_1 + yK_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ekvivalentna homogenom sistemu

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ -5y &= 0 \end{aligned}$$

čije je jedino rešenje $x = y = 0$, odakle sledi da su kolone K_1 i K_2 linearno nezavisne. Dakle, rang polazne matrice jednak je 2. □

Zadatak za samostalan rad 1. Neka $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Dokazati da rang matrice A ne može biti veći ni od m ni od n. □

Zadatak za samostalan rad 2. Neka $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$. Dokazati da je rang matrice A jednak m ako i samo ako je determinanta matrice A ražličita od 0. □

Zadatak za samostalan rad 3. Dokazati da je rang matrice jednak je redu njene najveće kvadratne podmatrice čija je determinanta ražlicita od 0. □

0.4. **Primena ranga na sisteme.** U opštem slučaju sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih predstavljamo na sledeći način:

$$\begin{array}{rcl} a_{(1,1)}x_1 + \cdots + a_{(1,n)}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{(m,1)}x_1 + \cdots + a_{(m,n)}x_n & = & b_m \end{array}.$$

Matricu A ovog sistema čine koeficijenti u jednačinama i formiramo je na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & \cdots & a_{(1,n)} \\ \vdots & & \\ a_{(m,1)} & \cdots & a_{(m,n)} \end{bmatrix}.$$

Proširenu matricu sistema B formiramo dodavanjem kolone slobodnih članova matrici sistema A. Preciznije,

$$B = \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & \cdots & a_{(1,n)} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{(m,1)} & \cdots & a_{(m,n)} & b_m \end{bmatrix}.$$

Ako sa $r(A)$ i $r(B)$ redom označimo rangove matrica A i B, onda je

$$r(A) \leqslant r(B)$$

jer je svaka kolona matrice A ujedno i kolona matrice B. Kolone matrice sistema ćemo redom označavati sa $K_1, \ldots, K_n$, a kolonu slobodnih članova ćemo označavati sa K.

Teorema 2. (Kroneker–Kapelijeva teorema) Uz prethodnu simboliku važi sledeće:

(1) Sistem $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$ je određen ukoliko je $r(A) = r(B) = n$;
(2) Sistem $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$ je neodređen ukoliko je $r(A) = r(B) < n$;
(3) Sistem $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$ je nemoguć ukoliko je $r(A) < r(B)$.

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati u slučaju nehomogenog sistema linearnih jednačina. Slučaj homogenog sistema je jednostavniji, pa se ostavlja za samostalan rad.

Prvo pokažimo poslednju tačku. Logički, ona ima formu $p \Rightarrow q$, pri čemu je p iskaz "$r(A) < r(B)$" a q je iskaz "Sistem $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$ je nemoguć". Primenjujući kontrapoziciju[3], treba da pokažemo da iz saglasnosti datog sistema sledi jednakost rangova matrica A i B.

[3] u pitanju je tautologija $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Neka je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ proizvoljno rešenje sistema $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$. Tada je

$$\begin{aligned} [K_1 \ \ldots \ K_n \ K] &\sim [K_1 \ \ldots \ K_n \ K - \lambda_1 K_1 - \cdots - \lambda_n K_n] \\ &= \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & \ldots & a_{(1,n)} & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{(m,1)} & \ldots & a_{(m,n)} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pa je $r(B) = r(A)$.

Da bismo dokazali prve dve tačke dovoljno je da pokažemo da iz određenosti sistema $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$ sledi da je $r(A) = r(B) = n$. U tom cilju, pretpostavimo da je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ jedino rešenje sistema $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$. Tvrdimo da je $r(A) = r(B) = n$. Pretpostavimo suprotno. Tada su kolone $K_1, \ldots, K_n$ linearno zavisne, pa postoje realni brojevi $\delta_1, \ldots, \delta_n$ takvi da je

$$\delta_1 K_1 + \cdots + \delta_n K_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

i bar jedan od brojeva $\delta_1, \ldots, \delta_n$ je različit od 0. Međutim, tada je

$$(\lambda_1 + \delta_1, \ldots, \lambda_n + \delta_n)$$

takođe rešenje sistema $x_1K_1 + \cdots + x_nK_n = K$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je sistem određen jer je

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (\lambda_1 + \delta_1, \ldots, \lambda_n + \delta_n).$$

$\square$