ОСНОВНЕ ФОРМУЛЕ

1) Нека је Φ део равни одређен са $a \le x \le b$ и $0 \le y \le f(x)$, где је f ф-ја дефинисана, позитивна и непрекидна на $[a, b]$ и нека је T тело које настаје ротацијом фигуре Φ око осе x. Тада се запремина тела T може рачунати формулом $V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

Ако је f и диференцијабилна и њен први извод је непрекидан на $[a, b]$, онда се површина омотача (површи која настаје ротацијом лука криве $y = f(x)$ за $a \le x \le b$) може рачунати формулом

$$M(T) = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

(2)

Нека је $0 \le a < b$ и нека је f непрекидна, позитивна и монотона ф-ја на $[a,b]$. Нека је Φ део равни ограничен линијама $x=0$, $y=f(x)$, $y=f(a)$ и $y=f(b)$. Нека је T тело које настаје ротацијом фигуре Φ око осе y. Тада се запремина тела T може израчунати помоћу формуле

$$V(T) = \pi \left| b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2\int_a^b x f(x)\,dx \right|$$

Ако ф-ја f има први извод који је непрекидан на $[a,b]$, тада се запремина тела T може израчунати помоћу формуле

$$V(T) = \pi \int_a^b x^2 |f'(x)|\,dx$$

Нека је $0 \leq a < b$ и нека f задовољава услове:

$У_1$: f је непрекидна на $[a, b]$

$У_2$: f је ненегативна на $[a, b]$.

Нека је Φ део равни ограничен линијама $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ и $y = 0$. Нека је T тело које настаје ротацијом фигуре Φ око осе y. Тада се запремина тела T може рачунати по формули

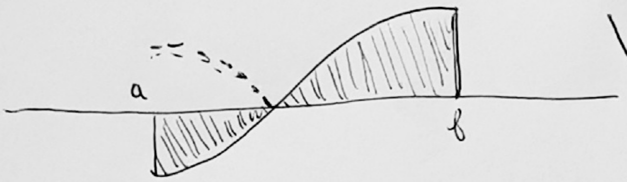
$$V(T) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Последица: Ако се изостави услов $У_2$, онда формула постаје

$$V(T) = 2\pi \int_a^b x\, |f(x)|\, dx$$

Изведене формуле

1) Нека је Φ део равни ограничен линијама $x=a$, $x=b$, $y=0$ и $y=f(x)$ где је f ф-ја непрекидна на $[a,b]$ и нека је T тело које настаје ротацијом фигуре Φ око осе x. Тада



$$V(T)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Ова формула следи из чињенице да фигуре Φ и Φ_+ која је одређена неједнакостима $a \le x \le b$ и $0 \le y \le |f(x)|$ и чињенице да $f(x)$ и $|f(x)|$ имају исте квадрате.

Омотач има површину

$$M(T)=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

Нека су f и g непрекидне на $[a,b]$ и нека важи $0 \le g(x) \le f(x)$ за свако $x \in [a,b]$.

Нека је $\Phi = \{(x,y) \mid a \le x \le b \wedge g(x) \le y \le f(x)\}$.

Ако је T тело које настаје ротацијом фигуре Φ око осе x, онда

$$V(T) = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$$

Омотач има два дела:

$$M(T) = 2\pi \int_a^b \left(f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} + g(x)\sqrt{1+g'^2(x)}\right) dx$$

(3)

Нека су f и g непрекидне на $[a,b]$ и нека важи $f(x)\cdot g(x)\leq 0$ за свако $x\in[a,b]$

Нека је Φ ограничено са $x=a, x=b, y=f(x)$ и $y=g(x)$.

Тада је $$V(T)=\pi\int_a^b \left(\max\{|f(x)|,|g(x)|\}\right)^2 dx$$

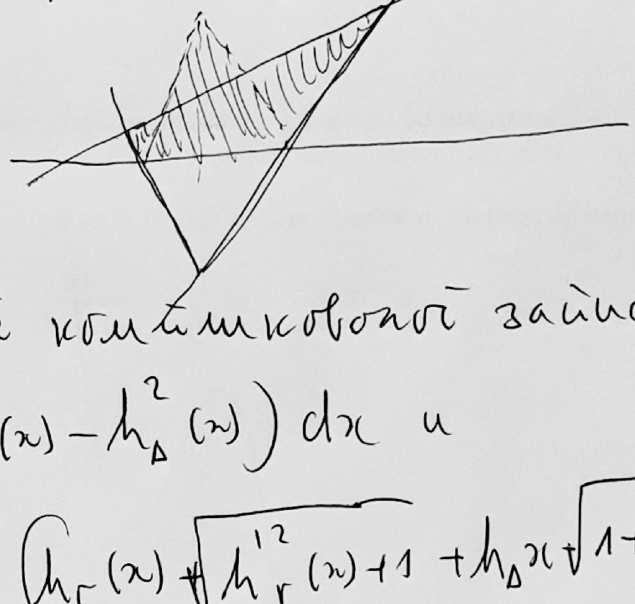
и $$M(T)=2\pi\int_a^b h(x)\sqrt{1+h'^2(x)}\,dx$$ за

$$h(x)=\max\{|f(x)|,|g(x)|\}$$ и

T - тело које настаје ротацијом фигуре Φ око осе x.

Нека су f и g непрекидне на $[a, b]$ и нека је Φ део равни ограничен између $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Нека је Φ_+ део фигуре Φ који је изнад x осе и Φ_- део фигуре Φ који је испод x осе и $\hat{\Phi}_-$ фигура симетрична фигури Φ_- у односу на x-осу и $\Phi_1 = \Phi_+ \cup \hat{\Phi}_-$.
Тада Φ и Φ_1 ротацијом око x осе дају исто тело.



Сада формула је компактновог записа

$$V(T) = \pi \int_a^b \left(h_r^2(x) - h_\Delta^2(x) \right) dx \quad \text{и}$$

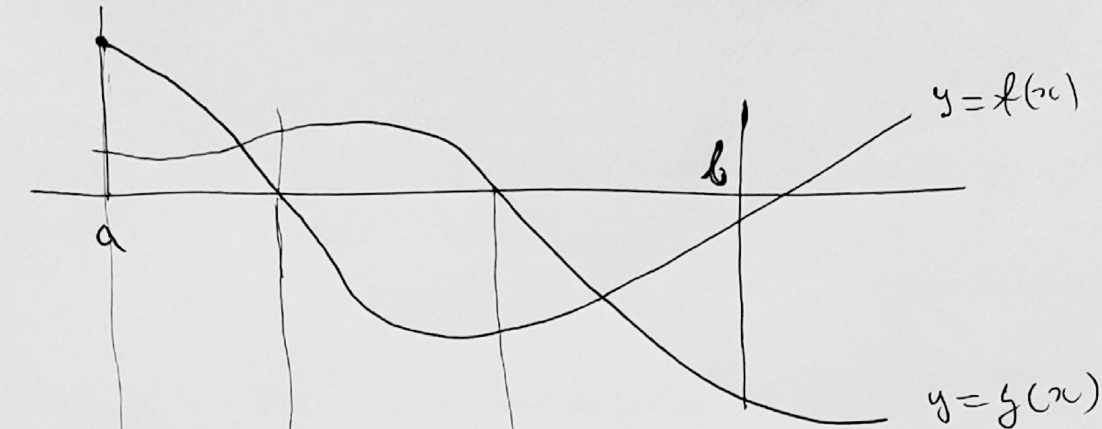
$$P(T) = 2\pi \int_a^b \left(h_r(x)\sqrt{h_r'^2(x)+1} + h_\Delta(x)\sqrt{1+h_\Delta'^2(x)} \right) dx$$

при чему је $h_r(x) = \max\{|f(x)|, |g(x)|\}$

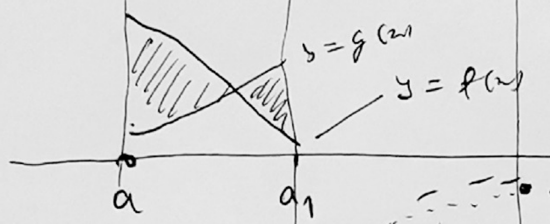
и

$$h_\Delta(x) = \frac{|\max\{f(x), g(x)\}| - \max\{f(x), g(x)\} + |\min\{f, g\}| + \min\{f, g\}}{2}$$

и зато је не треба памтити, већ задетак треба „разбити" на простије делове (5)

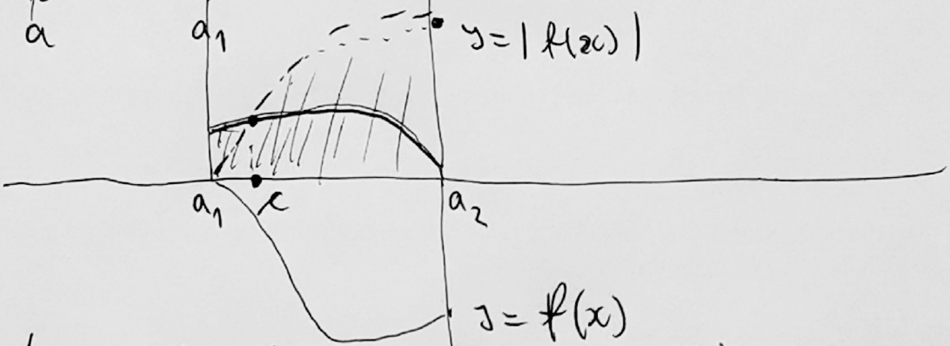


1)



$$V(T)=\pi\int_a^{a_1}\left(f^2-g^2\right)dx$$

2)



прво нађемо тачку c такву да је $g(c)=|f(c)|$

$a_1 \le x \le c \;\wedge\; 0 \le y \le g(x)$ (јер је $0\le|f(x)|\le g(x)$ на $[a_1,c]$)

и $c \le x \le a_2 \;\wedge\; 0 \le y \le |f(x)|$ (јер је $0\le g(x)\le|f(x)|$ на $[c,a_2]$)

$$V(T)=\pi\int_{a_1}^{c} g^2(x)\,dx+\pi\int_{c}^{a_2} f^2(x)\,dx$$

3) $$V(T)=\pi\int_{a_2}^{b}\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$$

1) За вежбање

Нека је Φ_1 фигура ограничена линијама $x=2$ и $x=y^2$ и нека је Φ_2 фигура ограничена линијама $y=0$, $x=2$ и $y=-x^2$. Нека је $\Phi_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2$ и нека T_i настаје ротацијом фигуре Φ_i око осе x и $\hat{T}_i$ тело које настаје ротацијом фигуре Φ_i око осе y. Израчунати

$V(T_i)$ и $V(\hat{T}_i)$ за $i = 1, 2, 0$

2) T_x настаје ротацијом фигуре Φ око осе x и T_y настаје ротацијом фигуре Φ око осе y. $V(T_x)$, $P(T_x)$, $V(T_y) = ?$ при чему је Φ фигура ограничена линијама

а) $y=x$, $y=3x-x^2$ б) $y=-x$, $y=3x-x^2$

в) $y=x$, $y=x^2-2x$ г) $y=x$, $y=|x^2-2x|$

д) $y=x$, $y=x^2-x$ ђ) $y=x$, $y=|x^2-x|$

е) $x=0$, $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$, тангента из $(0,0)$ на $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

ж) $x=0$, $y=1$, $y=x$ з) $y=0$, $x=1$, $x=y$